

IPHO 2010

2. Physique de la cheminée

Introduction

Des gaz issus d'une combustion sont relâchés dans l'atmosphère à une température T_{Air} via une cheminée de hauteur h et de section A (voir la figure 1). Le combustible est brûlé dans un foyer ayant une température T_{Smoke} (Smoke = fumée). On désigne par B le volume de gaz libéré par le foyer par unité de temps.

On suppose que :

- La vitesse des gaz à l'intérieur du foyer est tellement faible qu'on peut la négliger
- La masse volumique des gaz libérés est considérée comme identique à celle de l'air dans les mêmes conditions de température et de pression ; tant que le gaz est dans le foyer il est considéré comme un gaz parfait
- La pression de l'air varie en fonction de la hauteur en suivant les lois de la statique des fluides incompressibles ; le changement de masse volumique de l'air avec la hauteur est négligeable.
- Le gaz obéit à l'équation de Bernoulli, qui implique que la quantité suivante est constante en tout point du fluide :

$$\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{constante}$$

où ρ est la masse volumique du gaz, $v(z)$ sa vitesse, $p(z)$ sa pression, et z est la hauteur.

- Le changement de masse volumique du gaz (Smoke) est négligeable dans la cheminée.

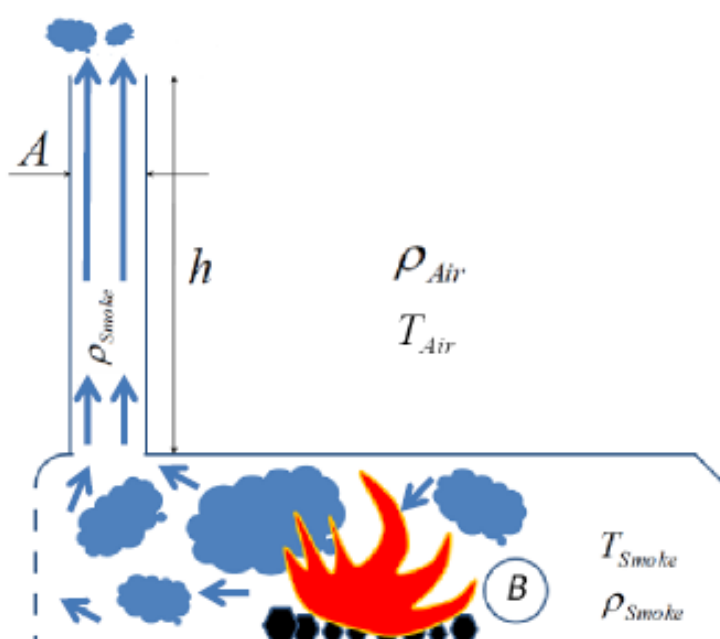


Fig 1. Schéma d'une cheminée de hauteur h avec un foyer à la température T_{Smoke} .

Question 1

- a) Quelle est la hauteur minimale de la cheminée nécessaire à son bon fonctionnement, c'est-à-dire telle que tout le gaz produit puisse être évacué ? Exprimez votre résultat en fonction de B , A , T_{Air} , $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et $\Delta T = T_{\text{Smoke}} - T_{\text{Air}}$.
Important : dans toutes les questions suivantes, cette hauteur minimale est supposée être la hauteur de la cheminée. (3,5 points)
- b) Deux cheminées de sections identiques sont construites afin de fonctionner dans différentes parties du monde. La première fonctionne dans les régions froides sous une température atmosphérique moyenne de -30°C . La seconde fonctionne dans les régions chaudes, sous une température atmosphérique moyenne de 30°C . Pour les deux cheminées, la température du foyer est de 400°C . La hauteur de la cheminée destinée à fonctionner dans les régions froides est de 100 m. Dans ce cas, quelle est la hauteur de l'autre cheminée ? (0,5 points)
- c) Comment varie la vitesse des gaz tout au long de la cheminée ? Réalisez un schéma en supposant que la section de la cheminée est constante. Indiquez l'endroit où les gaz entrent dans la cheminée. (0,6 points)
- d) Comment varie la pression du gaz dans la cheminée en fonction de sa hauteur z . (0,5 points)

Centrale électrique solaire

Le flux de gaz dans une cheminée peut être utilisé pour construire une centrale électrique solaire particulière, la cheminée solaire. L'idée est illustrée par la figure 2. Le soleil chauffe l'air qui se trouve sous un collecteur de surface S . Ce collecteur est ouvert sur sa périphérie afin de permettre une entrée non perturbée d'air (voir Fig. 2). Lorsque l'air chauffé monte le long de la cheminée (flèches fines en traits pleins), de l'air froid provenant des alentours entre dans le collecteur (flèches épaisses en pointillés). Ceci permet d'obtenir un flux d'air continu dans la centrale électrique. Ce flux d'air dans la cheminée fait tourner une turbine, ce qui permet la production d'énergie électrique.

L'énergie des radiations solaires par unité de temps et par unité de surface horizontale du collecteur est notée G . On suppose que toute cette énergie est utilisée afin de chauffer l'air dans le collecteur (la capacité thermique massique de l'air est notée c et on peut négliger sa dépendance avec la température de l'air). On définit le rendement d'une cheminée solaire comme le rapport entre l'énergie cinétique du flux de gaz et l'énergie solaire absorbée par l'air lors de son réchauffement avant son entrée dans la cheminée.

41st International Physics Olympiad, Croatia – Theoretical competition, July 19th, 2010

3/4

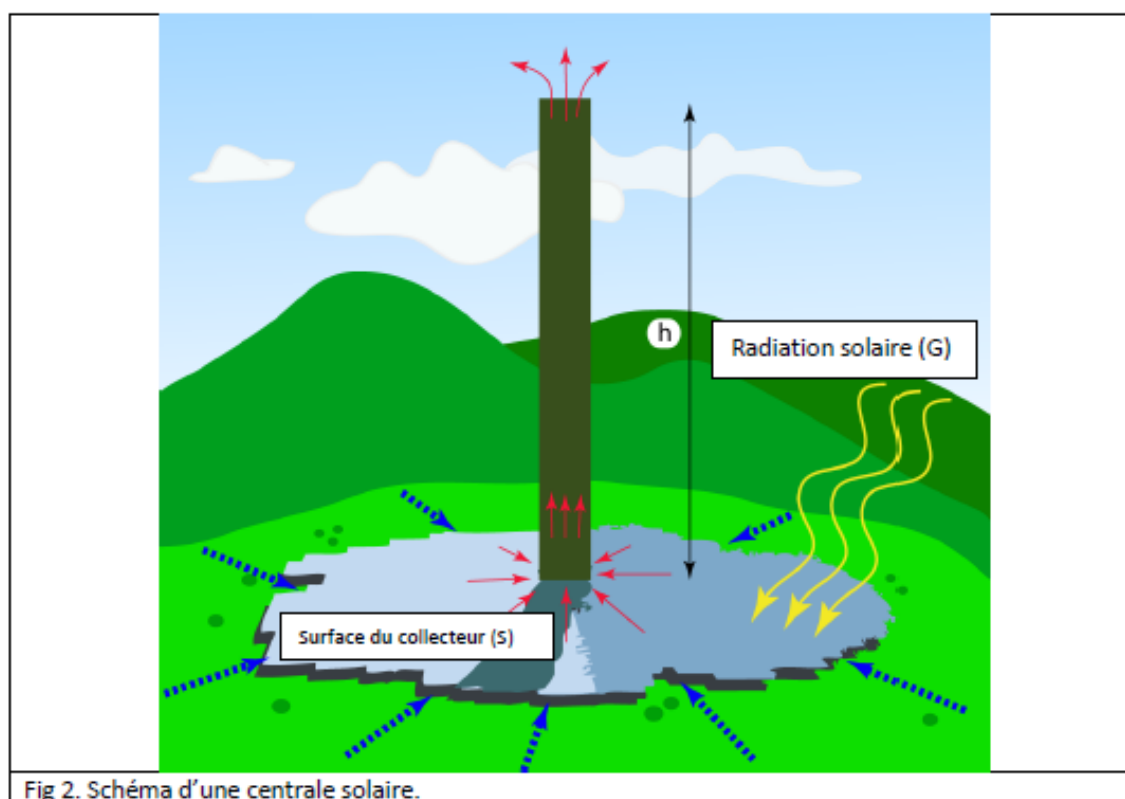


Fig 2. Schéma d'une centrale solaire.

Question 2

- Quel est le rendement de la cheminée solaire ? (2,0 points)
- Tracez une courbe montrant comment le rendement de la cheminée change avec sa hauteur. (0,4 points)

Prototype de Manzanares

Un prototype de cheminée solaire a été construit à Manzanares (Espagne). Cette cheminée a une hauteur de 195 m et un rayon de 5 m. Le collecteur est circulaire et a un diamètre de 244 m. La capacité thermique massique de l'air dans les conditions normales d'utilisation de ce prototype est $1012 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, la masse volumique de l'air chaud vaut $0,9 \text{ kg/m}^3$ et la température de l'air atmosphérique est $T_{\text{air}} = 295 \text{ K}$. A Manzanares, la puissance solaire par unité de surface horizontale est typiquement de 150 W/m^2 lors d'une journée ensoleillée.

Question 3

- Quel est le rendement de ce prototype de centrale électrique ? Donnez une estimation numérique. (0,3 points)
- Quelle puissance peut être générée par ce prototype de centrale électrique ? (0,4 points)
- Quelle énergie cette centrale électrique peut-elle produire lors d'une journée ensoleillée ? (0,3 points)

IPHO 2011

2. Une bulle de savon chargée électriquement.

Une bulle de savon sphérique de rayon R_0 , remplie d'air de masse volumique ρ_i et de température T_i , est entourée par d'air de densité ρ_a , à la pression atmosphérique P_a et à la température T_a . Le film de savon a une tension de surface γ , une masse volumique ρ_s et une épaisseur t . La masse et la tension de surface du savon ne changent pas avec la température. Supposez $R_0 \gg t$.

Le gain en énergie dE nécessaire pour accroître la surface d'un interface savon-air de dA , est $dE = \gamma dA$, où γ est la tension de surface du film.

2.1

Trouver le rapport $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ en fonction de γ , P_a et R_0 . [1.7 point]

2.2

Trouver la valeur numérique de $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ en utilisant $\gamma = 0,0250 \text{ N.m}^{-1}$, $R_0 = 1,00 \text{ cm}$ et $P_a = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-2}$. [0.4 points]

2.3

La bulle est initialement formée avec un air plus chaud à l'intérieur. Trouver la valeur numérique minimale de T_i telle que la bulle puisse flotter dans l'air immobile. Utiliser $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_a = 1,30 \text{ kg.m}^{-3}$, $t = 100 \text{ nm}$ et $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$.

[2 points]

Après un certain temps, la bulle sera en équilibre thermique avec son environnement. Dans de l'air immobile, cette bulle chuterait alors vers le sol.

2.4

Trouver la vitesse minimale u d'un courant d'air ascendant (air s'écoulant vers le haut) empêchant les bulles de tomber lorsqu'elles sont à l'équilibre thermique. Donnez votre réponse en fonction de ρ_s , R_0 , g , t et du coefficient de viscosité de l'air η . On suppose que la vitesse est petite de sorte que la loi de Stokes soit vérifiée, et on néglige les variations du rayon lorsque la température redescend à l'équilibre. La force de viscosité donnée par la loi de Stokes est $F = 6\pi\eta R_0 u$.

[1.6 point]

2.5

Calculer la valeur numérique de u en prenant $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

[0.4 point]

Les calculs ci-dessus suggèrent que les termes dus à la tension de surface γ ajoutent très peu à l'exactitude du résultat. Dans toutes les questions ci-dessous, vous pouvez négliger les termes de tension de surface.

2.6

Si cette bulle sphérique est maintenant chargée uniformément avec une charge q , trouver une équation vérifiée par son nouveau rayon R_1 en fonction de R_0 , P_a , q et de la permittivité du vide ϵ_0 .

[2.0 points]

2.7

Supposons que la charge totale n'est pas trop grande (i.e. $\frac{q^2}{\varepsilon_0 R_0^4} \ll P_a$) et que la bulle ne

subit qu'une petite augmentation de son rayon, déterminer ΔR où $R_I = R_0 + \Delta R$.

On donne $(1+x)^n \approx 1+nx$ où $x \ll 1$.

[0.7 point]

2.8

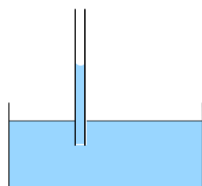
Quelle doit être la valeur de cette charge q , en fonction de $t, \rho_a, \rho_b, \varepsilon_0, R_0, P_a$ pour que la bulle flotte sans bouger dans l'air immobile ? Calculer sa valeur numérique.

La permittivité du vide est $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

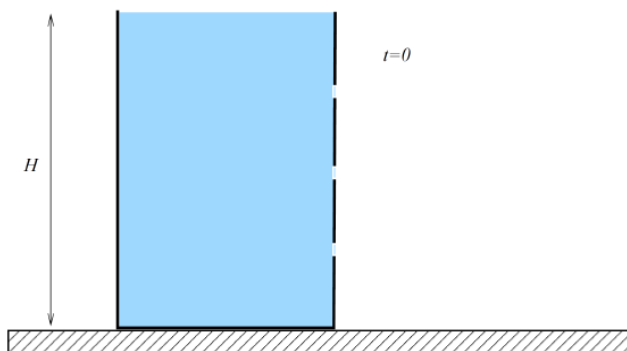
[1.2 point]

IPHO 2015

- Q15.** On note h la hauteur à laquelle remonte un liquide dans un tube capillaire de rayon r petit devant la longueur capillaire du liquide. En ajoutant une petite quantité de tensioactif, on abaisse la tension de surface du liquide d'un facteur 2 sans modifier sensiblement sa masse volumique. Quel serait alors le rayon du tube qui permettrait la même hauteur de remontée, en supposant que l'on est dans une situation de mouillage total (soit un angle de contact nul) ?

(a) $r/2$ (b) r (c) $\sqrt{2}r$ (d) $2r$

- Q20.** On considère un vase cylindrique, de hauteur H , rempli à ras-bord d'un liquide. La partie supérieure du vase est ouverte à l'air libre, l'épaisseur du fond est négligeable et il est posé sur une table de sorte que son axe de révolution soit vertical. Trois petits orifices ont été effectués dans le vase, l'un à la distance $h_1 = H/4$ du fond du vase, le deuxième à la distance $h_2 = H/2$, le troisième à la distance $h_3 = 3H/4$ et on les ouvre simultanément à $t = 0$. On néglige tout effet de frottement ou de viscosité.



Que peut-on dire des portées d_1 , d_2 et d_3 des jets au niveau de la table, observés peu de temps après l'ouverture des orifices ?

(a) $d_1 > d_2 > d_3$ (b) $d_2 > d_1 > d_3$ (c) $d_2 > d_1 = d_3$ (d) $d_3 > d_2 > d_1$

Exercice n°1 : lentille liquide

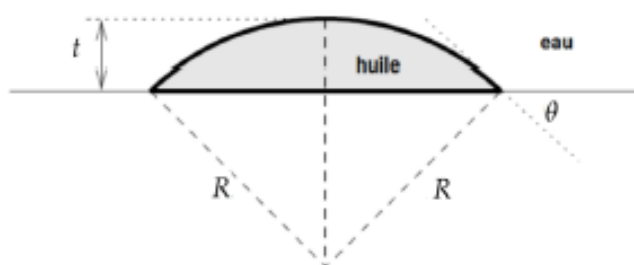
Les smartphones et appareils photos actuels sont équipés d'un module "autofocus" permettant d'adapter la distance focale de la lentille de l'objectif pour réaliser la mise au point sur les photographies.

Certains de ces appareils sont équipés de lentilles liquides : une goutte d'huile est placée dans une cellule de verre hermétique remplie d'eau ou d'un liquide similaire ne se mélangeant pas avec l'huile. Les deux liquides sont scellés et tiennent dans un revêtement métallique d'un diamètre inférieur à 10 mm.

En appliquant une tension à la goutte, la forme de celle-ci change en l'espace d'un centième de seconde. Cette technologie a de nombreux avantages par rapport aux autres dispositifs mécaniques actuellement utilisés :

- la puissance nécessaire à l'adaptation de la forme de la goutte d'huile est extrêmement faible (quelques milliwatts suffisent), ce qui est important dans des dispositifs limités par la durée de vie des batteries ;
- seuls des liquides sont mis en jeu dans ce dispositif, il est donc particulièrement résistant aux chocs et bien plus rapide que les systèmes mécaniques ;
- enfin, la petite taille du dispositif est un réel atout dans les appareils mobiles.

On se propose d'étudier le principe de fonctionnement de ces lentilles liquides. On s'intéresse uniquement au comportement de la goutte d'huile représentée ci-dessous par une calotte sphérique de rayon R déposée sur un substrat horizontal. Cette calotte a une épaisseur t . L'angle de contact entre le substrat et la goutte est noté θ .

**Question n°1**

Citer un autre exemple de lentille à focale variable.

Question n°2

En modifiant la tension appliquée sur le substrat, l'angle de contact θ peut être modifié, ce qui permet de modifier la distance focale de la lentille. Pour la lentille formée par l'huile plongée dans l'eau, la distance focale est donnée par la formule suivante :

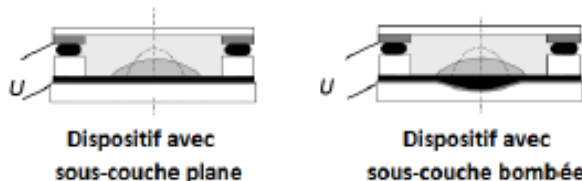
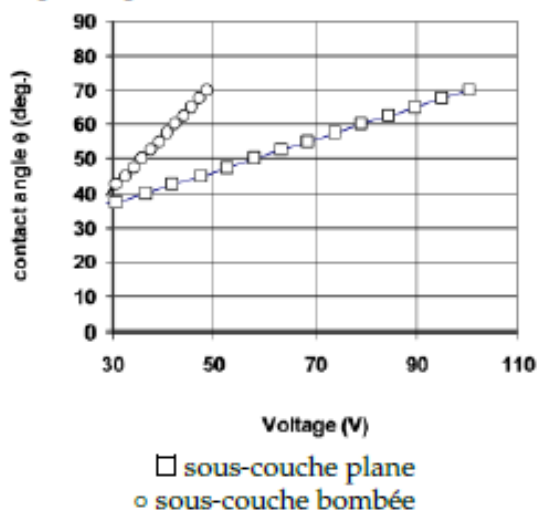
$$\frac{1}{f} = \frac{n_{\text{huile}} - n_{\text{eau}}}{R}$$

avec n_{huile} et n_{eau} les indices de réfraction de l'huile et de l'eau.

En raisonnant de manière qualitative, comment la distance focale de la lentille varie-t-elle avec l'angle de contact ?

Question n°3

La courbe suivante représente l'angle de contact en fonction de la tension appliquée pour une goutte déposée sur un substrat avec une sous-couche plane (carrés) et pour une goutte déposée sur un substrat avec une sous-couche bombée (cercles). Commenter l'allure de ces courbes. Quel type de substrat conseilleriez-vous pour réaliser une lentille liquide destinée à un téléphone portable ? Justifier.



En traits pleins, la lentille est représentée lorsqu'aucune tension n'est appliquée aux électrodes. Pour une tension non nulle, on obtient une lentille ayant la forme représentée en traits pointillés.

Question n°4

Exprimer l'angle de contact θ en fonction de R et t .

Question n°5

En choisissant la géométrie adaptée à un téléphone portable, déterminer l'angle de contact lorsqu'aucune tension n'est appliquée.

Question n°6

On réalise la lentille en utilisant une goutte d'huile sphérique de rayon $r = 2,5$ mm. Celle-ci s'étale pour former une calotte sphérique d'épaisseur t . Exprimer le rayon R du dioptré ainsi formé en fonction de r . Quelle sera l'épaisseur t de la lentille en l'absence de tension ?

Question n°7

La forme d'une goutte déposée sur une surface dépend de l'angle de contact mais aussi de sa taille. On s'intéresse ici à l'influence de la taille de la goutte uniquement.

On peut définir la longueur capillaire l_c comme la longueur pour laquelle la pression hydrostatique est égale à la pression de Laplace. En raisonnant par analyse dimensionnelle, proposer une expression de la pression de Laplace qui ne dépend que du rayon R de la goutte et de la tension superficielle γ à la limite eau/huile.

Question n°8

Toujours par analyse dimensionnelle, donner alors une expression de la longueur capillaire l_c . Pourquoi l'huile ne s'étale-t-elle pas lorsqu'on prépare la lentille liquide ?

On donne quelques caractéristiques de l'huile :

masse volumique ρ	920 kg.m^{-3}
indice de réfraction n_{huile}	1,52
tension de surface à l'interface eau/huile γ	$20.10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$

Problème n°2 : Vol en jetlev

Un jetlev est un dispositif fixé au dos d'un pilote lui permettant de s'élever au-dessus d'un lac. Une poussée suffisante est permise grâce à l'expulsion d'eau à grande vitesse par deux tuyères orientées vers le bas et alimentées grâce à un tuyau flexible d'une dizaine de mètres de long. Afin de limiter le poids de l'engin, la pompe et le carburant sont disposés dans un bateau auxiliaire.



Image issue du site www.jetlev-flyer.com

Pour répondre aux questions qui suivent, il vous appartiendra de modéliser la situation physique et de la mettre en équation. Il est attendu que :

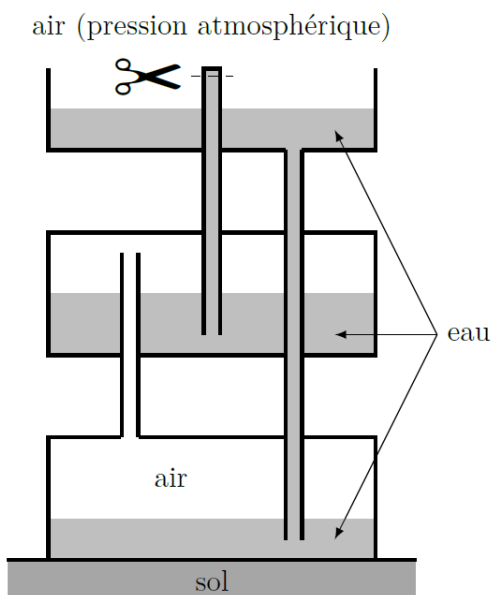
- vous représentiez par un (ou plusieurs) schéma(s) la situation physique étudiée
- vous choisissiez les notations que vous utilisez en attribuant un nom à chacune des grandeurs physiques que vous serez amené à introduire
- vous précisiez les lois physiques que vous appliquez
- vous précisiez, en le justifiant, les différentes hypothèses ou approximations que vous utilisez
- vous proposiez des ordres de grandeur réalistes des données physiques manquantes
- les éventuels calculs soient menés sous forme littérale, avec pour objectif final d'obtenir une valeur numérique

Question n°1 : Effectuer une analyse qualitative des phénomènes physiques permettant d'expliquer le vol stationnaire de l'utilisateur d'un jetlev.

Question n°2 : Quelle puissance doit fournir la pompe permettant au pilote de rester à une hauteur de quelques mètres au dessus de la surface de l'eau ? On pourra s'aider d'un bilan de quantité de mouvement et d'énergie entre deux instants successifs.

IPHO 2016

6. Sur le système suivant, initialement au repos, on coupe l'extrémité supérieure du tube central. Que se passe-t-il ?



- (a) L'eau jaillit du tube central.
 (b) Le niveau d'eau baisse dans le tube central.
 (c) Rien.
 (d) On ne peut rien dire : il manque une donnée.
18. Un filet d'eau sort d'un robinet avec le débit volumique D , la section de sortie a un rayon r_0 . On note h la distance à la sortie pour laquelle le rayon de la section du filet a été divisé par 2 en régime permanent. L'écoulement d'eau peut être considéré comme celui d'un fluide parfait, la pression en tout point du filet d'eau est supposée égale à la pression ambiante et les phénomènes de tension superficielle sont négligeables.

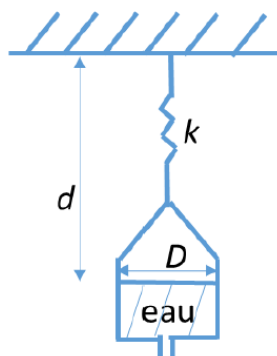


Si on choisit un robinet de rayon de sortie $2r_0$, avec un débit $2D$, comment est modifiée la distance h ?

- (a) $h \rightarrow h/8$ (b) $h \rightarrow h/4$ (c) $h \rightarrow h/2$ (d) h est inchangée.

IPHO 2017

Q17. (*) Un cylindre ouvert de diamètre $D = 30$ cm contient de l'eau, de masse volumique 1000 kg.m^{-3} . Ce cylindre est accroché via un ressort de raideur k à une paroi horizontale fixe. L'eau peut s'évacuer par un trou placé à la base du cylindre. Quelle valeur donner à k pour que la distance d entre la surface de l'eau et la paroi horizontale soit maintenue constante (on prend $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$) ?



(a) $3,4 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$

(b) $2,7 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$

(c) $6,9 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$

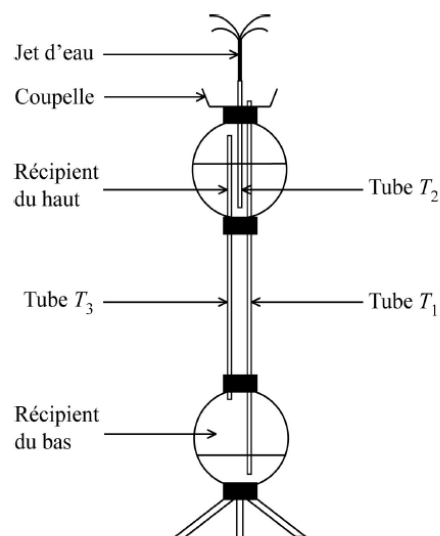
(d) $1,7 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$

Problème 1 : La fontaine de Héron

Ce problème propose d'étudier la fontaine de Héron, qui doit son nom au savant grec Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle après J.C.). Cette fontaine est un dispositif astucieux qui permet de faire jaillir de l'eau sans utiliser de pompe.

La fontaine est constituée de deux récipients fermés partiellement remplis d'eau, surmontés d'une coupelle (voir figure 1). Un premier tube T_1 relie le fond de la coupelle au fond du récipient du bas. Un second tube T_2 plonge au fond du récipient du haut, et émerge au-dessus de la coupelle ; un troisième tube T_3 relie les parties supérieures des deux récipients, contenant de l'air (voir figure 1).

Lorsqu'on remplit la coupelle d'eau, l'eau du récipient du haut jaillit par le tube au-dessus de la coupelle, qui ensuite se vide dans le récipient du bas. Lorsque le récipient du haut est vide, la fontaine s'arrête.



La fontaine de Héron est basée sur le principe du siphon, que nous étudierons dans un premier temps. Dans tout le problème, le liquide de la fontaine de Héron est de l'eau, dont la masse volumique ρ est supposée uniforme et constante.

I. Loi de l'hydrostatique et principe du siphon

On considère un récipient rempli d'eau, à l'équilibre, et deux points M et N tels que M est plus haut que N ; on note z_M l'altitude du point M et z_N celle du point N.

La pression en N est supérieure à la pression en M et la différence de pression entre M et N est égale à $\|\vec{P}\| / S$, avec $\|\vec{P}\|$ la norme du poids de la colonne d'eau, de hauteur $z_M - z_N$ et de surface S , située entre M et N (voir figure 2).

On note g l'intensité de la pesanteur.

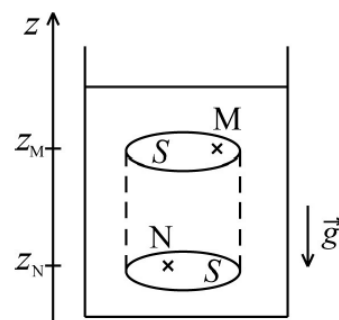


Figure 2 : Hydrostatique

- 1) Exprimer la pression P_N en N en fonction de la pression P_M en M, de ρ , g , z_M et z_N . Cette équation, appelée loi de l'hydrostatique, nous permettra de comprendre le fonctionnement des siphons, puis de la fontaine de Héron.

Le principe du siphon est représenté sur la figure 3 : une extrémité A d'un tuyau est plongée dans un récipient rempli d'eau, et l'autre extrémité B est placée dans l'air.

On amorce initialement le siphon en aspirant l'eau en B, afin de remplir le tuyau d'eau. On constate alors que si l'extrémité B du tuyau est placée au-dessous du niveau initial de la surface de l'eau (repéré par le point C), alors l'eau du récipient se vide spontanément par l'extrémité B du tuyau. C'est l'effet siphon.

On note z_A l'altitude du point A, z_B celle du point B et z_C celle du point C.

La pression atmosphérique est notée P_0 .

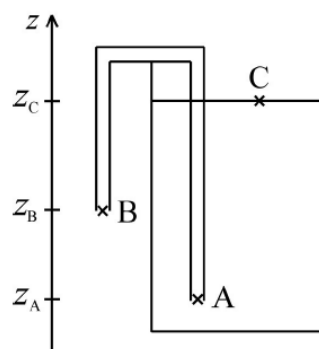


Figure 3 : Siphon

- 2) On bouche le tuyau en B. L'eau ne s'écoule plus et est à l'équilibre. On peut alors appliquer la loi de l'hydrostatique. En déduire la pression P_A en A en fonction de P_0 , ρ , g , z_A et z_C .

Lorsque l'eau s'écoule, on ne peut plus appliquer la loi de l'hydrostatique. On suppose l'écoulement stationnaire, et sans dissipation visqueuse ou thermique. On peut alors appliquer la loi de Bernoulli sur une ligne de courant entre les points A et B. La vitesse de l'écoulement est notée v_A au point A et v_B au point B.

La loi de Bernoulli s'écrit alors : $\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + g z_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + g z_B$.

- 3) On suppose que le tuyau est de section constante et que le débit entrant en A est le même que le débit sortant en B, si bien que $v_A = v_B$. Exprimer alors la pression P'_A en A en fonction de P_0 , ρ , g , z_A et z_B .
- 4) En déduire comment le siphon fonctionne, et expliquer pourquoi il est nécessaire que l'extrémité libre du tuyau soit placée au-dessous du niveau de la surface de l'eau.

II. Fontaine de Héron

- 5) Expliquer qualitativement en quoi la fontaine de Héron peut être vue comme un siphon. Quel récipient se vide dans quel autre ? Reproduire le schéma de la figure 1 et y représenter par des flèches le sens d'écoulement de l'eau dans chaque tuyau.

On cherche à évaluer la vitesse d'éjection de l'eau à la sortie du tube T_2 , la hauteur du jet en sortie du tube T_2 , ainsi que la durée au bout de laquelle la fontaine s'arrête.

La figure 4 schématise les deux récipients, la coupelle et les tubes qui les relient.

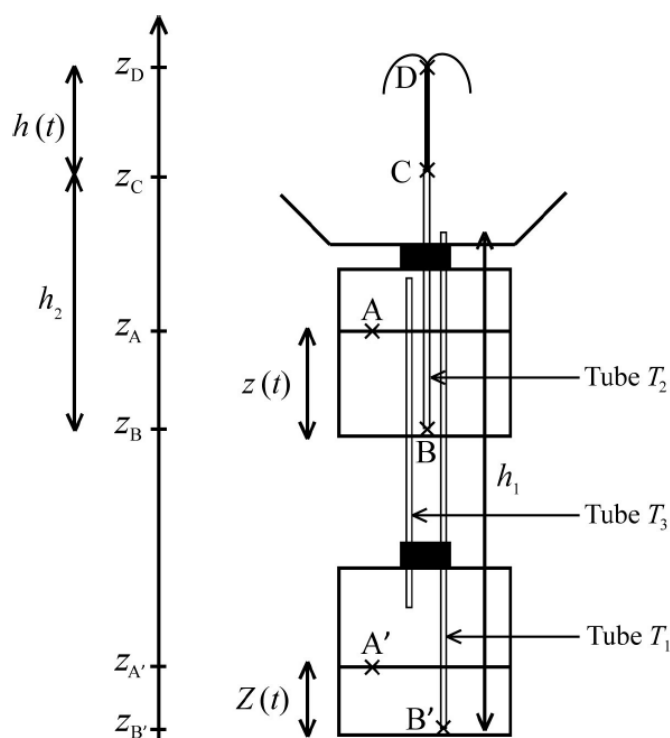


Figure 4 : Schéma de la fontaine de Héron

Les récipients sont identiques. Afin de simplifier la résolution, ils sont supposés parallélépipédiques, de section carrée S dans un plan horizontal. La hauteur d'eau dans le récipient du haut est notée $z(t)$, et celle dans le récipient du bas $Z(t)$. Les trois tubes ont la même section s . Le tube T_1 est de hauteur h_1 et le tube T_2 de hauteur h_2 . La pression atmosphérique est notée P_0 .

Le point A (respectivement A') est à la surface de l'eau, dans le récipient du haut (respectivement du bas). Le point B est à l'entrée du tube T_2 , supposée quasiment au même niveau que le fond du récipient du haut, si bien que $z(t) = z_A(t) - z_B$. De même, le point B' est à l'entrée du tube T_1 , supposée quasiment au même niveau que le fond du récipient du bas, si bien que $Z(t) = z_{A'}(t) - z_{B'}$.

Le point C est situé à la sortie du tube T_2 , donc $h_2 = z_C - z_B$. Le point D est situé en haut du jet d'eau. La hauteur du jet d'eau est notée $h(t) = z_D(t) - z_C$.

Les normes de la vitesse de l'eau aux points A, B et C sont notées respectivement v_A , v_B et v_C .

Les variations de débit sont supposées suffisamment lentes pour que les écoulements puissent être considérés comme stationnaires. $Z(t)$ et $z(t)$ varient suffisamment lentement pour qu'on puisse appliquer la loi de l'hydrostatique dans les récipients en des points situés loin des entrées des tubes T_1 et T_2 .

On suppose qu'à l'instant initial, la fontaine vient d'être amorcée ; tous les tubes sont remplis d'eau, le récipient du haut est rempli, et le récipient du bas contient très peu d'eau : $z(t=0) = H$ et $Z(t=0) = 0$.

Données : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $h_1 = 60 \text{ cm}$; $h_2 = 25 \text{ cm}$; $H = 15 \text{ cm}$; la section S des récipients est carrée, de 10 cm de côté ; la section intérieure s des tubes est circulaire, de $3,0 \text{ mm}$ de diamètre.

- 6) Quel est le lien entre $Z(t)$ et $z(t)$?
- 7) $P_{A'}$ est la pression de l'air dans le récipient du bas. Déterminer la pression $P_{A'}$ en A' en fonction de P_0 , ρ , g , h_1 et Z .
- 8) Le tube T_3 assure l'égalité des pressions dans l'air des deux récipients, donc $P_{A'} = P_A$.
 - a) Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et C, en négligeant la vitesse v_A de l'eau au point A devant la vitesse v_C de l'eau au point C. En déduire l'expression de $v_C(t)$ en fonction de h_1 , h_2 , $z(t)$, $Z(t)$ et g .
 - b) Comment évolue $v_C(t)$ entre l'instant initial et l'instant où la fontaine s'arrête ?
- 9) La hauteur du jet d'eau est $h(t) = z_D(t) - z_C$.
 - a) Déterminer l'expression de $h(t)$ en fonction de h_1 , h_2 , $z(t)$ et $Z(t)$.
 - b) Comment la hauteur $h(t)$ évolue-t-elle entre l'instant initial et l'instant où la fontaine s'arrête ?
 - c) On note $h_{\min}$ et $h_{\max}$ les valeurs minimale et maximale de $h(t)$. Que vaut la hauteur moyenne $\langle h \rangle = \frac{h_{\min} + h_{\max}}{2}$ du jet d'eau ? Faire l'application numérique.
 - d) En pratique, on observe que la hauteur du jet d'eau ne dépasse pas 20 cm . Comment peut-on expliquer cette différence ?

On cherche maintenant à déterminer la durée au bout de laquelle la fontaine s'arrête. Pour cela, on commencera par établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

- 10) On considère le récipient du haut. En faisant un bilan de volume entre les instants t et $t + dt$, déterminer le lien entre $\frac{dz}{dt}$, s , S et v_B .

- 11) Le tube T_2 étant de section constante et l'écoulement étant supposé stationnaire, la vitesse v_B de l'eau au point B est égale à la vitesse v_C de l'eau au point C. En supposant que les résultats précédents restent valables, montrer que $z(t)$ vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dz}{dt} + \frac{s}{S} \sqrt{2g(h_1 - h_2 - H + 2z)} = 0$$

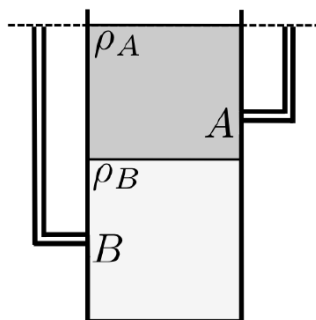
- 12) Intégrer cette équation différentielle entre $t = 0$ et $t = T$ (instant auquel la fontaine s'arrête). En déduire l'expression de T en fonction de s , S , g , h_1 , h_2 et H .

IPHO 2018

Q13. On s'intéresse à un récipient constitué :

- d'un réservoir principal dans lequel reposent deux liquides de masses volumiques différentes $\rho_A < \rho_B$.
- et de deux échappements infiniment fins séparés du réservoir principal par les clapets A et B.

Que constate-t-on après l'ouverture des deux clapets ? (on supposera que les liquides montent doucement dans les tuyaux jusqu'à l'équilibre).



- | | |
|--|---|
| (a) Les deux échappements sont pleins. | (c) L'échappement branché en A n'est pas plein ,
l'échappement branché en B est plein. |
| (b) L'échappement branché en A est plein,
l'échappement branché en B n'est pas plein. | (d) Aucun des deux échappements n'est plein. |

IPHO 2019**Physique des systèmes vivants (10 points)**

Données : pression atmosphérique normale $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Partie A. Physique du flux sanguin (4,5 points)

Cette partie est une analyse de deux modèles simplifiés de la circulation sanguine dans les vaisseaux.

Les vaisseaux sanguins ont une forme approximativement cylindrique et on sait que pour un écoulement stable et non turbulent d'un fluide incompressible dans un cylindre rigide, la différence de pression du fluide entre les deux extrémités du cylindre est donnée par :

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

où ℓ et r sont respectivement la longueur et le rayon du cylindre, η la viscosité du fluide et Q le débit volumique, c'est-à-dire le volume de fluide qui traverse une section transversale du cylindre par unité de temps. Cette expression fournit souvent un ordre de grandeur correct de la différence de pression dans un vaisseau, même sans tenir compte du flux pulsatile, de la compressibilité et de la forme irrégulière du vaisseau et du fait que le sang n'est pas un fluide simple mais un mélange de cellules et de plasma. De plus, cette expression est similaire à la loi d'Ohm, en interprétant le débit volumique comme l'intensité d'un courant électrique, la différence de pression comme une tension et le facteur $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ comme une résistance.

On considère sur la figure 1 le réseau symétrique d'artérioles (petites artères) qui délivre du sang au lit capillaire d'un tissu. Dans ce réseau, à chaque bifurcation, un vaisseau est divisé en deux vaisseaux identiques. Cependant les vaisseaux de niveaux supérieurs sont plus fins et plus courts : on considère que les rayons et les longueurs des vaisseaux de deux niveaux consécutifs i et $i+1$ sont liés respectivement par $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ et par $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.

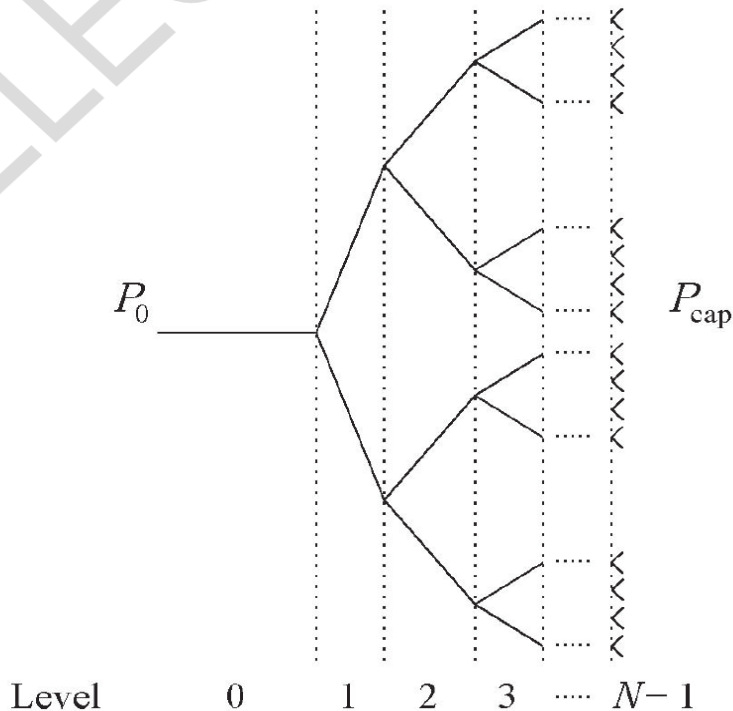


Figure 1. Réseaux d'artérioles.

A.1 Exprimer le débit volumique Q_i dans un vaisseau de niveau i quelconque en fonction du nombre total N de niveaux, de la viscosité η , du rayon r_0 , de la longueur ℓ_0 du premier vaisseau et de la différence $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ entre la pression P_0 de l'artériole de niveau 0 et la pression P_{cap} du lit capillaire. 1.3pt

A.2 Calculer la valeur numérique du débit volumique Q_0 de l'artériole de niveau 0 si son rayon vaut $6,0 \times 10^{-5}$ m et sa longueur $2,0 \times 10^{-3}$ m. On considère que la pression à l'entrée de cette artériole vaut 55 mmHg et que le réseau de vaisseaux possède $N = 6$ niveaux de l'entrée au lit capillaire de pression 30 mmHg. On considère que la viscosité du sang est $\eta = 3,5 \times 10^{-3}$ kg.m⁻¹.s⁻¹. Exprimer le résultat en mL/h. 0.5pt

Analogie entre un vaisseau sanguin et un circuit RLC

L'approximation des vaisseaux cylindriques rigides est insuffisante pour plusieurs raisons. Il est particulièrement important d'inclure la dépendance en temps du flux et de prendre en compte le changement de diamètre du vaisseau qui se produit lorsque la pression varie (pendant un cycle de pompage du sang réalisé par le cœur). De plus on observe que dans les gros vaisseaux la pression sanguine varie de manière significative au cours d'un cycle, alors que dans les plus petits vaisseaux l'amplitude des oscillations de pression est beaucoup plus faible et l'écoulement est presque indépendant du temps.

Lorsque la pression augmente dans un vaisseau élastique, il y a une augmentation de son diamètre, lui permettant ainsi de stocker plus de fluide et de le délivrer lorsque la pression baisse. Pour cette raison, le comportement élastique du vaisseau peut être simulé en ajoutant un condensateur à notre description initiale. De plus, si on tient compte de la dépendance en temps du débit sanguin, il faut considérer l'inertie du fluide proportionnelle à sa densité $\rho = 1,05 \times 10^3$ kg.m⁻³. Cette inertie peut être décrite par une inductance dans notre modèle. La figure 2 représente le circuit équivalent à un seul vaisseau dans ce modèle. La capacité équivalente et l'inductance sont respectivement données par

$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{et} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

où h est l'épaisseur de la paroi du vaisseau et E le module de Young de l'artère, un coefficient qui décrit la variation de la taille du tissu du vaisseau lorsqu'une force est appliquée. Le module de Young s'exprime en unités de pression. Il est de l'ordre de $E = 0,06$ MPa pour les artérioles.

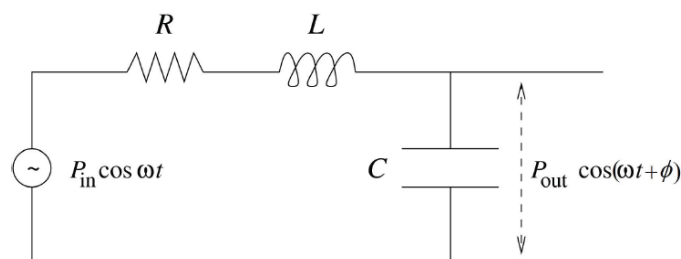


Figure 2. Circuit électrique équivalent à un unique vaisseau sanguin.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.3 | Exprimer en régime stationnaire l'amplitude P_{out} de la pression à la sortie du vaisseau sanguin en fonction de l'amplitude P_{in} de la pression à l'entrée, de la résistance équivalente R , de l'inductance L et de la capacité C , pour un flux de pulsation ω .
Établir la condition sur η , ρ , E , h , r et ℓ pour qu'à basse fréquence l'amplitude de l'oscillation de pression soit inférieure à P_{in} . | 2.0pt |
| A.4 | Pour le réseau de vaisseaux étudié en A.2 , estimer la longueur h maximale de l'artériole afin que la condition établie en A.3 soit satisfaite (on considère que h est indépendant du niveau i). | 0.7pt |

Partie B. Croissance d'une tumeur (5,5 points)

La croissance tumorale est un processus très complexe où les mécanismes biologiques tels que la prolifération cellulaire et la sélection naturelle sont étroitement liées à la physique. Dans ce problème, nous allons considérer un modèle simplifié de croissance tumorale permettant d'étudier l'augmentation de la pression couramment observée dans les tumeurs solides.

On considère un groupe de cellules normales formant un tissu entouré d'une membrane basale inextensible qui contraint le tissu à conserver sa forme : une sphère de rayon R (Figure 3).

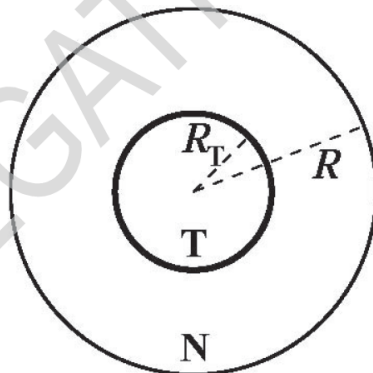


Figure 3. Tumeur simplifiée.

Initialement, le tissu n'a pas de contraintes résiduelles, c'est-à-dire que la pression en chacun de ses points est égale à la pression atmosphérique P_0 .

Au temps $t = 0$, une tumeur commence à se développer au centre de cette sphère et à mesure qu'elle grandit, la pression à l'intérieur du tissu augmente. Considérons que les deux tissus (normal N et tumoral T) sont compressibles de telle sorte que leurs densités ρ_N et ρ_T augmentent linéairement avec la pression :

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

où ρ_0 est la densité du tissu au repos, p est la surpression par rapport à la pression atmosphérique et K_N et K_T sont respectivement les coefficients de compressibilité (modules d'élasticité) des tissus normaux et tumoraux. En général, les tumeurs sont plus rigides et ont donc un module d'élasticité plus grand.

- B.1** La masse des cellules normales n'est pas altérée pendant la croissance de la tumeur. 1.0pt
Exprimer le rapport entre le volume tumoral et le volume tissulaire, $v = V_T/V$, en fonction de $\mu = M_T/M_N$, rapport entre la masse de la tumeur (M_T) et celle du tissu normal (M_N), et de $\kappa = K_N/K_T$ rapport des modules d'élasticité.

L'hyperthermie est parfois utilisée en association avec la chimiothérapie et la radiothérapie dans le traitement du cancer. Dans la méthode de l'hyperthermie, les cellules cancéreuses sont sélectivement chauffées au-delà de la température normale du corps humain, 37 °C, jusqu'à des températures supérieures à 43 °C induisant leur mort. Les chercheurs développent actuellement des nanotubes couverts de protéines qui se lient aux cellules tumorales. Lorsque le tissu est irradié en proche infrarouge, les nanotubes absorbent davantage de rayonnement que les tissus environnants et peuvent donc être chauffés sélectivement, ainsi que les cellules tumorales auxquelles ils sont attachés.

On considère que la tumeur, les cellules normales et le tissu environnant ont une conductivité thermique constante k , c'est-à-dire que dans la géométrie de ce problème, l'énergie qui traverse une surface sphérique de rayon r par unité de temps et par unité de surface est égale à k fois la dérivée de la température par rapport à r . Les nanotubes sont uniformément répartis dans le volume tumoral et sont capables de délivrer une puissance thermique par unité de volume $\mathcal{P}$. On supposera que très loin de la tumeur, la température est égale à la température normale du corps humain.

- B.2** Exprimer la température au centre de la tumeur en régime stationnaire, en fonction de $\mathcal{P}$, de k , de la température du corps humain et du rayon R_T de la tumeur. 1.7pt

- B.3** Calculer la valeur numérique de $\mathcal{P}_{\min}$, puissance minimale par unité de volume nécessaire pour chauffer toutes les cellules d'une tumeur de rayon 5,0 cm à une température supérieure à 43,0 °C. On considère que la conductivité thermique du tissu vaut $k = 0,60 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$. 0.5pt

On considère que la tumeur est irriguée par un réseau de vaisseaux avec une structure ramifiée comme en question **A.1**. Lorsque la tumeur croît, quand sa pression p devient supérieure à la pression P_{cap} des vaisseaux les plus fins, le rayon de ces vaisseaux diminue d'une petite quantité δr . Si cette pression atteint une valeur critique p_c (ce qui correspondrait à une diminution δr_c du rayon), les vaisseaux les plus minces s'effondrent, compromettant sérieusement l'irrigation de la tumeur. La pression et la variation du rayon peuvent être reliés par la loi phénoménologique suivante :

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

On considère que seuls les plus petits vaisseaux (de niveau $N - 1$) ont leur rayon modifié lorsque la pression de la tumeur augmente.

- B.4** En régime linéaire (c'est à dire lorsque $p - P_{\text{cap}}$ est très petit), exprimer la diminution relative du débit $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ dans les plus petits vaisseaux, en fonction du rapport volumique tumoral $v = V_T/V$, de K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} et P_{cap} . 2.3pt