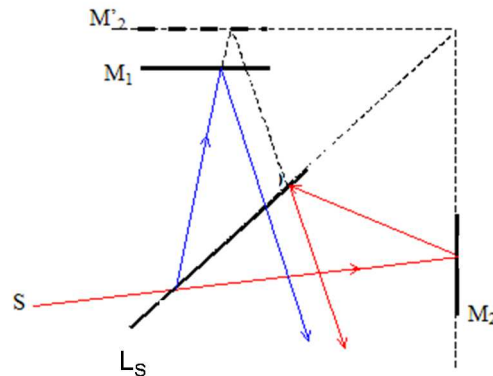


Mouvements de la photosphère du Soleil (X 2024 PC A)

I- Principe du dispositif optique

Interféromètre de Michelson

1. La « raie du nickel » a une longueur d'onde centrale environ égale à 677 nm : elle appartient à la partie rouge du **domaine visible**.
2. Un interféromètre de Michelson est constitué :
 - d'une **lame séparatrice** (L_s) dont une seule face est semi-réfléchissante : elle permet la division d'amplitude ;
 - de deux **miroirs plans** M_1 et M_2 identiques, **orthogonaux entre eux** dans la configuration en lame d'air à faces parallèles (M_2' désignant ci-dessous l'image de M_2 par réflexion sur L_s) ;
 - (éventuellement) d'une **lame compensatrice** (non représentée ci-dessous), qui compense la différence de marche introduite par la lame séparatrice ;



3. Sous incidence normale, la différence de marche entre la voie 2 et la voie 1 vaut $2d$, d'où l'ordre d'interférence :

$$p = \frac{2d}{\lambda}$$

4. A la longueur d'onde centrale de la raie de Ni : $p_0 = \frac{2 \times 6.10^{-3}}{677.10^{-9}}$ soit :

$$p_0 \approx 2.10^4$$

($p_0 = 17731,1$ avec une calculatrice !)

5. On superpose deux ondes cohérentes entre elles et de même intensité $\frac{I_0}{4}$. On déduit de

la **formule de Fresnel** :

$$I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(2\pi p))$$

6. A une longueur d'onde $\lambda_0 + \delta\lambda$: $p = \frac{2d}{\lambda_0 + \delta\lambda}$ soit $p = \frac{p_0}{1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}}$

On suppose $|\delta\lambda| \ll \lambda_0$, d'où :

$$\frac{1}{1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}} \approx 1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}$$

Ainsi :

$$I \approx \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi p_0 - 2\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right) \right)$$

p_0 étant supposé entier :

$$I \approx \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right) \right)$$

Dans le cadre de cette approximation, l'intensité est périodique en $\delta\lambda$, de période l'**intervalle**

spectral libre :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{p_0}$$

soit

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2d}$$

7. AN

$$\Delta\lambda = 3.10^{-2} \text{ nm} \quad (\text{avec la valeur approchée de } p_0 \text{ de Q4})$$

($\Delta\lambda = 3,8.10^{-2} \text{ nm}$ en continuant avec une calculatrice...)

8. Dans le cas du deuxième interféromètre, la différence de marche est doublée, donc l'ordre d'interférence à la longueur d'onde centrale de la raie l'est aussi. Ainsi, l'intervalle spectral libre est **divisé par deux** :

$$\Delta\lambda' \approx 2.10^{-2} \text{ nm}$$

9. On note de nouveau $p_0 = \frac{2d}{\lambda_0}$ l'ordre d'interférences au centre de la raie avec le premier

interféromètre et **on suppose encore** $|\delta\lambda| \ll \lambda_0$. Le premier interféromètre agit comme un filtre

de « fonction de transfert » $\frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right) \right)$, alors que le deuxième agit comme un filtre

de fonction de transfert $\frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(4\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right) \right)$, d'où :

$$I = \frac{I_0}{4} \left(1 + \cos \left(2\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right) \right) \left(1 + \cos \left(4\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right) \right)$$

10. Cette intensité s'écrit aussi : $I = I_0 \cos^2\left(\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}\right) \cos^2\left(2\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}\right)$

soit :
$$I = I_0 \cos^2\left(\pi \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) \cos^2\left(2\pi \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)$$

(i) Cette fonction est périodique en $\delta\lambda$, de période imposée par $\cos^2\left(\pi \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)$. Il s'agit donc de l'intervalle spectral libre déterminé dans **Q7**, soit environ $4 \cdot 10^{-2}$ nm, ce qui est en accord avec la **figure 2**.

(ii) Entre deux maxima principaux voisins, l'intensité s'annule si l'un des deux cosinus s'annule. Plaçons-nous sur l'intervalle $[0, \Delta\lambda]$:

- le premier cosinus s'annule en :
$$\delta\lambda_2 = \frac{\Delta\lambda}{2}$$
- alors que le deuxième s'annule en :
$$\delta\lambda_1 = \frac{\Delta\lambda}{4} \quad \text{et} \quad \delta\lambda_2 = \frac{3\Delta\lambda}{4};$$

Il y a ainsi trois annulations d'intensité uniformément réparties entre deux maxima consécutifs, ce qui est en accord avec la **figure 2**.

(ii') Deux annulations d'intensité de part et d'autre d'un maximum principal d'intensité permettent de définir une **largeur** du pic d'intensité :
$$\Delta\lambda_{\text{arg}} = \frac{\Delta\lambda}{2}$$

(en anticipant sur **Q11**, il serait probablement plus judicieux de caractériser un pic d'intensité par sa largeur à mi-hauteur, **environ** deux fois plus faible d'après la **figure 2**)

(iii) Entre deux annulations successives de l'intensité, on observe un maximum secondaire. En première approximation, il est atteint à égale distance des deux annulations successives. L'intensité de ce maximum secondaire est ainsi **de l'ordre de** :

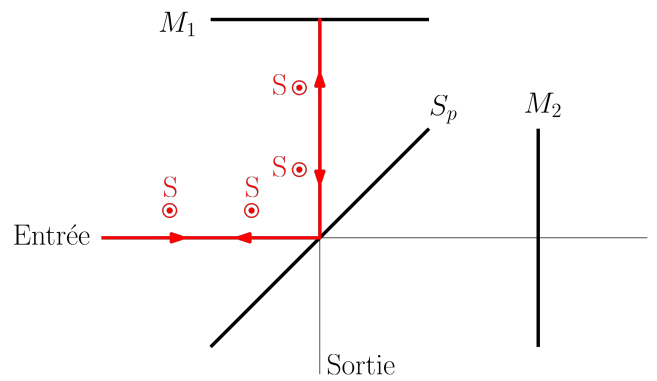
$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{d'où} \quad \frac{I}{I_0} \approx 7 \cdot 10^{-2}$$

ce qui est cohérent avec la **figure 2**.

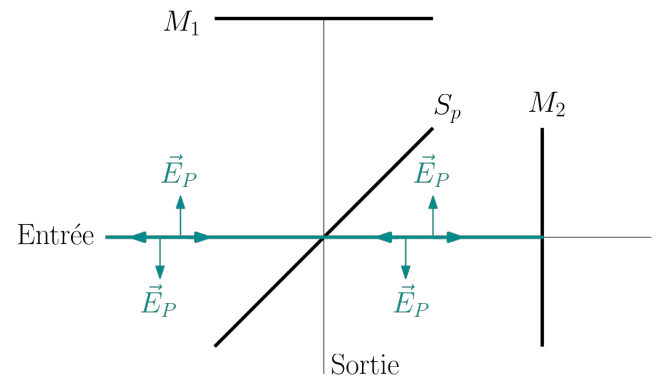
11. d'après l'énoncé, mais aussi en accord avec la **figure 2**, le filtre de Lyot permet d'isoler une bande spectrale de largeur (à mi-hauteur) 0,047 nm. A la sortie des deux interféromètres de Michelson, on réduit cette bande passante (**à mi-hauteur**) à environ 0,01 nm. L'intervalle spectral ainsi sélectionné est suffisamment fin pour isoler le « cœur » de la « raie du nickel ».

Utilisation de la polarisation

12. Une onde S est réfléchiée totalement par la lame et ne passe donc que par une seule voie, avant d'être de nouveau réfléchiée par la lame et de retourner ainsi vers l'entrée de l'interféromètre (les rayons sont séparés pour être distingués, mais ils sont en fait superposés deux à deux) :

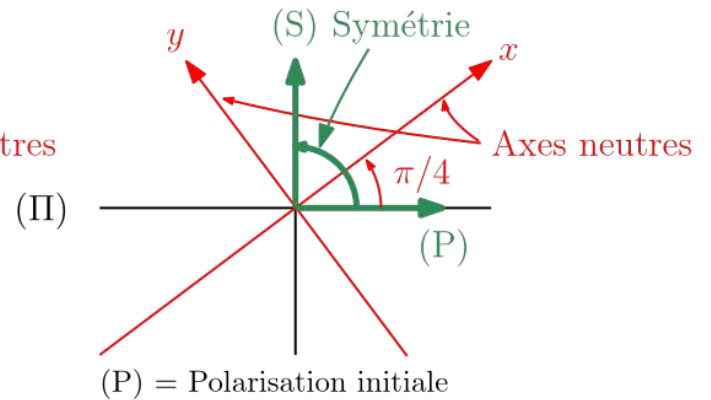
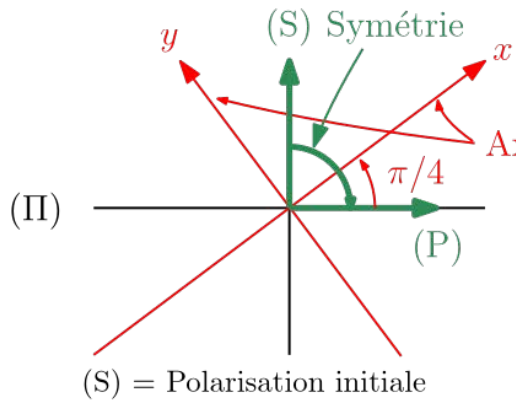


Une onde P est totalement transmise par la lame et ne passe donc que par une seule voie, avant d'être de nouveau totalement transmise par la lame et de retourner vers l'entrée de l'interféromètre :

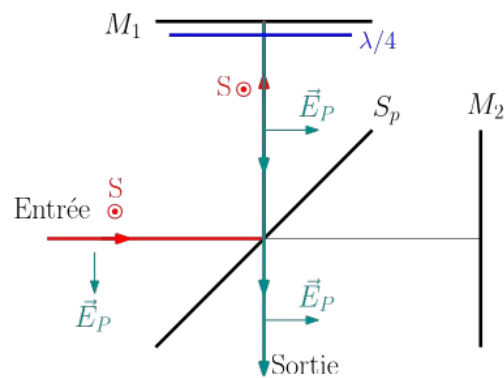
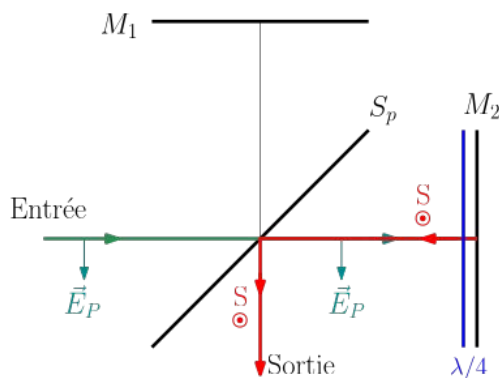


Aucune onde n'est obtenue à la sortie de l'interféromètre.

13. Les ondes S et P correspondent à des directions de polarisation symétriques par rapport aux lignes neutres de la lame demi-onde équivalente. Ainsi, la lame demi-onde transforme : une onde S en une onde P et une onde P en une onde S



14. Une onde S à l'entrée permet d'obtenir une onde P en sortie (à gauche ci-dessous). Une onde P à l'entrée permet d'obtenir une onde S en sortie (à droite ci-dessous).



15. Après le polariseur, on obtient une onde qui se décompose en une onde P et en une onde S, ces deux ondes étant en phase et de même amplitude. On obtient donc à la sortie de l'interféromètre deux ondes cohérentes entre elles :

- une onde P passée par la première voie et qui résulte de la composante S à l'entrée (figure ci-dessus à gauche) ;
- une onde S passée par la deuxième voie, qui résulte de la composante P à l'entrée (figure ci-dessus à droite) ; elle est déphasée par rapport à l'onde passée par la première voie ;

A la sortie de l'interféromètre, on superpose deux ondes certes cohérentes entre elles, mais de polarisations rectilignes orthogonales. On ne peut donc pas observer d'interférences. Le dispositif ne modifie pas la composition spectrale du rayonnement incident.

16. On note \vec{u}_x le vecteur unitaire indiquant l'axe rapide et \vec{u}_y celui associé à l'axe lent de la lame quart d'onde placée à la sortie de l'interféromètre. On exprime les champs électriques des deux ondes obtenues à la sortie de l'interféromètre :

Voie	Champ électrique avant la lame quart d'onde	Champ électrique après la lame quart d'onde
1	$E_0 \frac{\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t)$	$\vec{E}_1 = E_0 \frac{\vec{u}_x + \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_y}{\sqrt{2}} \exp(-i(\omega t + \varphi_0))$
2	$E_0 \frac{\vec{u}_x - \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \exp(2ip\pi)$	$\vec{E}_2 = E_0 \frac{\vec{u}_x - \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_y}{\sqrt{2}} \exp(-i(\omega t + \varphi_0)) \exp(2ip\pi)$

Dans le cas où l'ordre d'interférences p est entier, $\exp(2ip\pi) = 1$ et :

$$\vec{E}_2 = E_0 \frac{\vec{u}_x - \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_y}{\sqrt{2}} \exp(-i(\omega t + \varphi_0))$$

On en déduit le champ électrique total : $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \sqrt{2}E_0 \exp(-i(\omega t + \varphi_0))\vec{u}_x$

L'onde est donc polarisée rectilignement selon \vec{u}_x , l'une des deux lignes neutres de la lame.

Dans le cas plus général (non demandé), on obtient à la sortie de l'interféromètre :

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left((1 + \exp(2ip\pi))\vec{u}_x - i(1 - \exp(2ip\pi))\vec{u}_y \right) \exp(-i(\omega t + \varphi_0))$$

Soit : $\boxed{\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \sqrt{2}E_0 \exp(ip\pi) \left(\cos(p\pi)\vec{u}_x + \sin(p\pi)\vec{u}_y \right) \exp(-i(\omega t + \varphi_0))}$

ce qui correspond à une polarisation rectiligne selon une direction faisant un angle $p\pi$ avec \vec{u}_x .

17. Notons θ_0 l'angle entre l'axe de transmission du polariseur et « la » ligne neutre de la lame quart d'onde (son axe rapide si on suit le raisonnement retenu dans **Q16**) placée à la sortie de l'interféromètre. Notons $I_\lambda(\lambda)$ l'intensité spectrale à l'entrée de l'interféromètre. D'après la **loi de Malus**, l'intensité après le polariseur placé à la sortie de l'interféromètre est proportionnelle à :

$$I_\lambda(\lambda) \cos^2(\pi p - \theta_0) \simeq I_\lambda(\lambda) \cos^2\left(\pi p_0 \left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}\right) - \theta_0\right)$$

Au voisinage de λ_0 , à des termes d'ordre deux près :

$$I_\lambda(\lambda) \simeq I_\lambda(\lambda_0)$$

On obtient donc une intensité proportionnelle à $\cos^2\left(\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} + \theta_0\right)$. On la rend maximale pour

une valeur de $\delta\lambda$ donnée en imposant :

$$\theta_0 = -\pi p_0 \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}$$

Cartographie de la vitesse de la photosphère

18. Le capteur occupe une surface carrée de côté : $\boxed{21\mu m \times 1024 \simeq 22mm}$.

L'image du Soleil dans le plan focal image est un disque de diamètre évalué en se plaçant dans les conditions de Gauss :

$$2 \tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) f \simeq f \Delta \quad \text{soit} \quad \boxed{f \Delta \simeq 17mm}$$

Le capteur est donc assez grand pour former une image complète du Soleil.

19. Notons $I_0(\lambda)$ l'intensité spectrale dans le cas de la photosphère au repos et $\Delta\lambda_D$ le décalage Doppler en longueur d'onde. En supposant ce décalage faible :

$$F_i \simeq I_0(\lambda_i) + \left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_i)} \Delta\lambda_D$$

avec :

$$\Delta\lambda_D \simeq \frac{v}{c} \lambda_0$$

(en première approximation identique aux cinq longueurs d'onde sélectionnées, supposées suffisamment proches).

On a ainsi :

$$A = \sum_{i=1}^5 I_0(\lambda_i) + \left(\left(\left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_1)} + \left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_4)} \right) + \left(\left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_2)} + \left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_3)} \right) \right) \Delta\lambda_D$$

Cependant, I_0 est symétrique par rapport à λ_0 , donc $\frac{dI_0}{d\lambda}$ est impaire en $\lambda - \lambda_0$. On en déduit :

$$\left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_1)} + \left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_4)} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_2)} + \left(\frac{dI_0}{d\lambda}\right)_{(\lambda_3)} = 0$$

Ainsi A ne dépend pas de la vitesse radiale à l'ordre 1.

Sans calcul plus détaillé, l'expression B ne peut faire intervenir que des termes à l'ordre 2 en v .

Plus rapidement, on peut voir que ni A , ni B ne s'annule pour $v = 0$.

Enfin :

$$C = \left(\left(\left(\frac{dI_0}{d\lambda} \right)_{(\lambda_1)} - \left(\frac{dI_0}{d\lambda} \right)_{(\lambda_4)} \right) + \left(\left(\frac{dI_0}{d\lambda} \right)_{(\lambda_2)} - \left(\frac{dI_0}{d\lambda} \right)_{(\lambda_3)} \right) \right) \Delta\lambda_D$$

Soit :

$$C = 2 \left(\left(\frac{dI_0}{d\lambda} \right)_{(\lambda_1)} + \left(\frac{dI_0}{d\lambda} \right)_{(\lambda_2)} \right) \Delta\lambda_D$$

Cette expression est effectivement proportionnelle à la vitesse radiale.

20. On note $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_y$ la vitesse angulaire du Soleil (dont on ignore la rotation différentielle en fonction de la latitude !). Un point $M(x, y, z)$ a pour vitesse :

$$\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

Soit :

$$\vec{v}(M) = \Omega z \vec{u}_x - \Omega x \vec{u}_z$$

La vitesse radiale est sa projection selon \vec{u}_z , soit :

$$v_r = -\Omega x$$

21. Sur le bord est du Soleil, le décalage se produit vers le rouge, alors qu'il se produit vers le bleu sur son bord ouest. En valeur absolue :

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_0} = \frac{|v_r|}{c} \quad \text{soit} \quad \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 7 \cdot 10^{-6}$$

On a ainsi :

$$\delta\lambda \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$$

Ce décalage Doppler provenant de la rotation propre du Soleil n'est donc pas négligeable par rapport à la largeur de la raie ($12 \cdot 10^{-3}$ nm). Par conséquent, le décalage Doppler a un effet significatif sur l'intensité mesurée au voisinage de λ_0 et donc sur la valeur de C . Par contre, on peut s'interroger sur la pertinence du développement limité à l'ordre 1 proposé dans la réponse à **Q19** !

II- Éléments de physique des oscillations solaires

Modèle de fluide uniforme

22. On note $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$ la masse volumique et $\vec{v}(M,t) = v(x,t)\vec{u}_x$ le champ des vitesses. On note χ la compressibilité isentropique et on pose $c = \frac{1}{\sqrt{\chi\rho_0}}$. Dans l'approximation acoustique, les champs $p(x,t)$, $\mu(x,t)$ et $v(x,t)$ sont reliés par trois équations linéarisées :

	Avant linéarisation	Après linéarisation
Equation d'Euler (projetée selon (Ox) après linéarisation)	$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}P$	$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$
Equation locale de conservation de la masse	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$	$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2)$
Equation d'évolution thermodynamique	$\frac{D\mu}{Dt} = \chi\mu_0 \frac{DP}{Dt}$	$\mu = \frac{1}{c^2} p \quad (3)$

On reporte (3) dans (2), d'où :
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2')$$

On dérive (1) par rapport à x , on applique le théorème de Schwarz, puis on reporte (2') :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \\ &= -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \\ &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

D'où l'équation de d'Alembert pour une propagation unidimensionnelle :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$$

23. De façon plus générale :

$$\boxed{\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$$

24. $\exp(i(k_x x - \omega t)) f(z)$ est $2\pi R$ périodique en x , donc il existe un entier l tel que :

$$2\pi R k_x = 2\pi l$$

soit

$$\boxed{k_x = \frac{l}{R}}$$

25. Cette pulsation spatiale correspond à une période spatiale $\frac{2\pi}{k_x} = \frac{2\pi R}{l}$. Pour mettre en évidence cette composante spectrale, il faut, en accord avec le critère de Shannon-Nyquist, au moins deux échantillons par période, donc une résolution spatiale plus fine que $\frac{\pi R}{l}$.

D'après Q18, un pixel permet de former l'image d'un secteur de la surface solaire de côté (**de l'ordre de**, voir ci-dessous) :

$$\frac{21\mu m}{17mm} \times 2R \approx 2,5 \cdot 10^{-3} R$$

Cette valeur est (largement) inférieure à $\frac{\pi}{l} R \approx 1,6 \cdot 10^{-2} R$ évalué pour $l = 200$.

Il faut cependant noter que, dans ce raisonnement, on ignore l'effet de la position d'un pixel par rapport au centre du « disque solaire ». La largeur, le long de l'équateur, à la surface du Soleil, associée à un pixel est en effet d'autant plus grande que son centre est proche du bord du « disque solaire ». En d'autres termes, l'échantillonnage spatial n'est pas uniforme, ce qui complique significativement le problème (mais doit pouvoir être pris en compte).

26. On reporte la représentation complexe $\exp(i(k_x x - \omega t)) f(z)$ de la surpression dans l'équation de d'Alembert, d'où :

$$\left(-k_x^2 f(z) + f''(z)\right) \exp(i(k_x x - \omega t)) + \frac{\omega^2}{c^2} \exp(i(k_x x - \omega t)) f(z) = 0$$

On en déduit :

$$f''(z) = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2\right) f(z)$$

27. On déduit de l'équation d'Euler linéarisée :

$$-i\omega \vec{v}(x, z, t) = -ik_x \exp(i(k_x x - \omega t)) f(z) \vec{u}_x - \exp(i(k_x x - \omega t)) f'(z) \vec{u}_z$$

$$\vec{v}(x, z, t) = \frac{k_x}{\omega} \exp(i(k_x x - \omega t)) f(z) \vec{u}_x + \frac{1}{i\omega} \exp(i(k_x x - \omega t)) f'(z) \vec{u}_z$$

On peut donc interpréter la condition $f'(-H) = 0$ comme résultant de **l'annulation de la composante selon (Oz) de la vitesse** à l'interface entre la photosphère et le milieu qui se trouve à sa base (la zone convective). On peut aussi l'interpréter comme une condition de ventre de surpression. L'interface zone convective / photosphère est assimilée à une « paroi rigide et massive ».

La condition $f(0) = 0$ correspond à **l'annulation de la surpression** à l'interface entre la photosphère et la couche supérieure (la chromosphère). Cela revient probablement à considérer que l'impédance acoustique de ce milieu est très faible devant celle de la photosphère (ce qui pourrait se justifier par une masse volumique beaucoup plus faible, mais aussi une célérité des ondes acoustiques plus faible, car proportionnelle à la racine carrée de la température).

28. Ces deux conditions aux limites imposent des solutions sinusoïdales de l'équation différentielle de Q26. On doit donc avoir $\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 > 0$ et on a ainsi :

$$f(z) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} z\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} z\right)$$

où A et B sont deux constantes. La deuxième condition aux limites de Q27 impose :

$$A = 0$$

La première conduit à : $\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} B \cos\left(-\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} H\right) = 0$

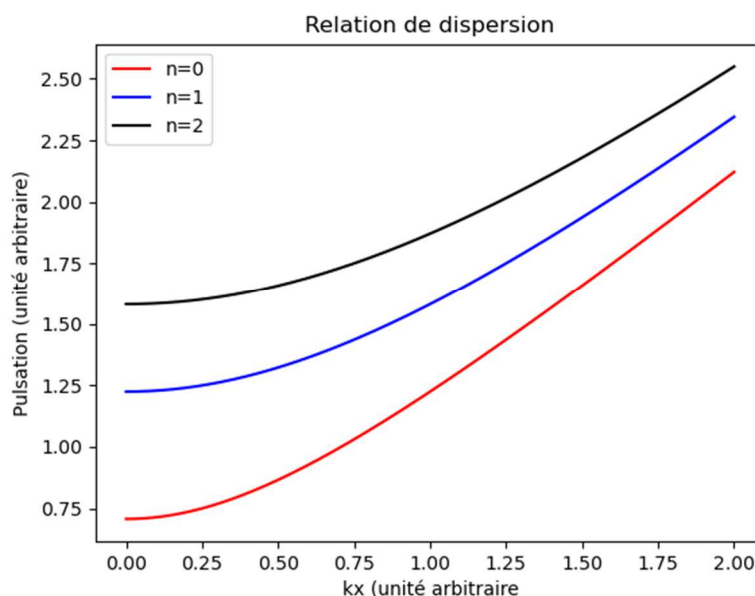
B n'est pas nul et il existe donc un entier n positif ou nul tel que :

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} H = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

D'où les pulsations des modes propres :

$$\omega_n = \sqrt{(k_x c)^2 + \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c}{H}\right)^2}$$

29. On en déduit $\omega_n(k_x)$ pour les trois premiers entiers (0, 1 et 2) :



En fait, il faudrait représenter sur chacune des courbes les points correspondants aux différentes valeurs de l .

30. On déduit de Q28 :

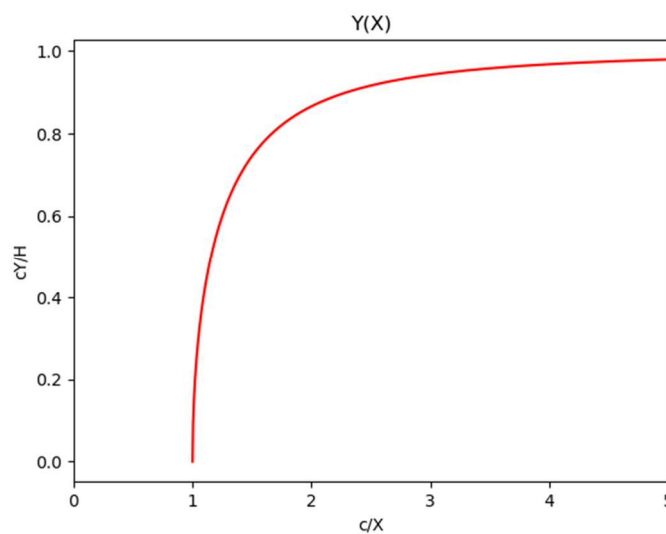
$$\sqrt{\frac{\omega_n^2}{c^2} - k_x^2} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{H}$$

Soit :

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{\omega_n}{k_x c}\right)^2}} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi c}{H \omega_n}$$

D'où :

$$Y = \frac{H}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{X^2}}$$



Modèle du fluide stratifié

31. La relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = (k_x^2 + k_z^2(z)) c^2(z)$$

32. L'angle d'incidence se déduit des composantes du vecteur d'onde (local) :

$$\sin i = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\sin i = \frac{k_x c(z)}{\omega}}$$

Ainsi, le long d'un rayon acoustique $\frac{\sin i}{c(z)}$ est conservé. En définissant un « indice acoustique »

comme le rapport $\frac{c_0}{c(z)}$, avec c_0 une célérité de référence, on retrouve l'analogie de la

deuxième loi de Snell-Descartes de la réfraction, ici appliquée à un milieu stratifié selon (Oz).

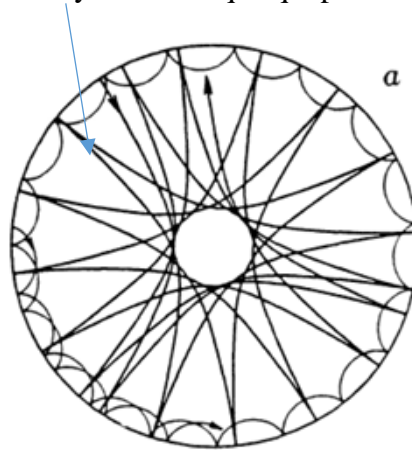
33. Le rayon ne peut se propager que dans le domaine où : $\frac{k_x c(z)}{\omega} \leq 1$

C'est-à-dire dans le domaine de célérité inférieure à :

$$c(z_{\min}) = \frac{\omega}{k_x}$$

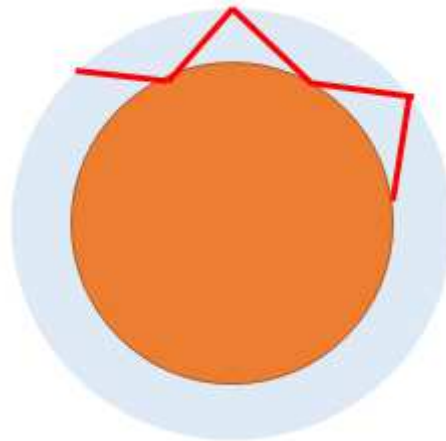
donc au-dessus de z_{\min} défini par la condition précédente (cette altitude existe car « la célérité croît indéfiniment lorsque z diminue »).

34. En prenant en compte l'incidence rasante à la base de la photosphère et la réflexion à sa surface, on obtient par exemple le rayon acoustique qui pénètre le moins à l'intérieur du Soleil :



Source : Scherrer et al., The Solar Oscillations Investigation - Michelson Doppler Imager, 1995SoPh..162..129S

35. Dans le modèle de fluide uniforme, on trace des segments de droite comme dans le cœur homogène d'un guide d'onde :



36. Dans un fluide homogène, k_z ne dépend pas de z le long d'un segment et $z_{\min} = -H$, donc :

$$\int_{z_{\min}}^0 k_z(z) dz = k_z H$$

Or, les deux conditions aux limites de Q27 imposaient :

$$k_z H = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

On retrouve donc la condition demandée avec :

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

L'équation (3) peut être interprétée comme une condition de retard de phase sur un demi-arc entre la base et le sommet de la photosphère. Multiplié par 2, elle correspond à un retard de phase sur un arc complet qui vaut $(2n+1)\pi$, en accord avec les conditions aux limites (ventre de suppression à la base, nœud de suppression à l'interface avec la chromosphère).

37. Les rayons sont identiques si les vecteurs d'onde ont la même direction en tout point, ce qui impose :

$$\frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \frac{k'_x}{\sqrt{k_x'^2 + k_z'^2}}$$

Donc :

$$\frac{k_x}{\omega} = \frac{k'_x}{\omega'}$$

38. La **figure 3** permet de représenter les différents modes (ω, k_x) , chaque mode étant en fait caractérisé par deux nombres entiers : n et l (degré angulaire).

On réécrit la condition (3) :

$$\int_{z_{\min}}^0 \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{\left(\frac{\omega_n}{k_x}\right)^2}} dz = \frac{(n+\alpha)\pi}{\omega_n}$$

On a cependant :

$$\frac{\omega_n}{k_x} = c(z_{\min})$$

Posons :

$$u = \frac{c(z)}{c(z_{\min})}$$

On a ainsi :

$$du = \frac{\frac{dc}{dz}}{c(z_{\min})} dz$$

$c(z)$ est une fonction monotone et $\frac{dc}{dz}$, fonction de z , peut aussi s'écrire comme une fonction

de u : $c(z_{\min}) = u \frac{\omega_n}{k_x}$, et on a ainsi :

$$dz = -\frac{c(z_{\min})}{f\left(u \frac{\omega_n}{k_x}\right)} du$$

On en déduit :

$$\int_{z_{\min}}^0 \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{\left(\frac{\omega_n}{k_x}\right)^2}} dz = \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}}{f\left(u \frac{\omega_n}{k_x}\right)} du$$

Cette dernière intégrale est une fonction de $\frac{\omega_n}{k_x}$. Ainsi, $\frac{(n+\alpha)\pi}{\omega_n}$ est effectivement une fonction de $\frac{\omega_n}{k_x}$ (« loi de Duvall »).

39. Pour appliquer l'approximation géométrique, on a implicitement supposé que $c(z)$ variait lentement le long d'un rayon acoustique, ce que l'on peut traduire par la condition :

$$\left| \overline{\text{grad}c} \cdot \frac{2\pi \vec{k}}{k} \right| \ll c$$

Soit :

$$2\pi \left| \frac{dc}{dz} k_z \right| \ll ck^2$$

On peut introduire une échelle de hauteur $\left| \frac{c}{dc} \frac{dc}{dz} \right| \approx h_c$, d'où :

$$2\pi |k_z| \ll k^2 h_c$$

Si on s'appuie sur la **figure 3**, il semblerait qu'un écart à la relation déduite de (3) se produit aux faibles valeurs de n ($n=0$ en particulier) lorsque $\frac{\omega_n}{k_x}$ augmente, ce qui correspond à des modes de faible degré l (les modes qui pénètrent le plus profondément dans le Soleil).