

1. Justifier des expressions de $\underline{v}_x(x, z, t)$, $\underline{v}_z(x, z, t)$ et $\underline{p}(x, z, t)$:

- ✘ Par invariance par translation parallèle à (Oy) de l'onde de surface, ces trois grandeurs ne dépendent pas de y
- ✘ Le milieu étant linéaire, à une excitation sinusoïdale correspond une réponse sinusoïdale.

2. Établir les trois équations liant \underline{v}_x , \underline{v}_z et \underline{p} .

- ✘ D'après les hypothèses de l'énoncé, on utilise l'équation d'Euler linéarisée :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}P + \rho \vec{g}$$

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$$

- ✘ Sachant que $P(x, z, t) = P_0 - \rho g z + p(x, z, t)$, on en déduit :

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

- ✘ L'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité), s'écrit :

$$\text{div} \vec{V} = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

- ✘ En représentation complexe, on obtient donc :

$$j\omega \rho \underline{v}_x(z) = jk p(z)$$

$$j\omega \rho \underline{v}_z(z) = -\frac{dp}{dz}$$

$$-jk \underline{v}_x(z) + \frac{d\underline{v}_z}{dz} = 0$$

- ✘ En combinant ces équations, on obtient l'équation différentielle vérifiée par $\underline{p}(z)$:

$$\frac{d^2 \underline{p}}{dz^2} - k^2 \underline{p}(z) = 0$$

- ✘ On intègre cette équation sans difficultés :

$$\underline{p}(z) = \underline{A} \exp(kz) + \underline{B} \exp(-kz)$$

- ✘ On en déduit :

$$\underline{v}_x(z) = \frac{k}{\rho \omega} (\underline{A} \exp(kz) + \underline{B} \exp(-kz))$$

$$\underline{v}_z = \frac{-k}{j\omega \rho} (\underline{A} \exp(kz) - \underline{B} \exp(-kz))$$

3. Conditions limites :

- ✘ On est dans le cas d'un écoulement parfait, donc la vitesse au fond de l'eau ne doit pas avoir de composante normale :

$$\underline{v}_z(-H) = 0 \Rightarrow \underline{B} = \underline{A} \exp(-2kH)$$

On en déduit :

$$\underline{p}(z) = 2\underline{A} \exp(-kH) \cosh(k(z + H))$$

✘ En utilisant p_0 la pression en $z = 0$, on a également :

$$\underline{p}(0) = p_0 = 2A \exp(-kH) \cosh(kH)$$

D'où :

$$\underline{p}(z) = p_0 \frac{\cosh(k(z+H))}{\cosh(kH)}$$

$$\underline{v}_x(z) = \frac{p_0 k \cosh(k(z+H))}{\rho \omega \cosh(kH)}$$

$$\underline{v}_z(z) = \frac{j p_0 k \sinh(k(z+H))}{\rho \omega \cosh(kH)}$$

✘ Soit, en revenant aux valeurs réelles instantanées :

$$p(x, z, t) = \frac{p_0 k \cosh(k(z+H))}{\rho \omega \cosh(kH)} \cos(\omega t - kx)$$

$$V_x(x, z, t) = \frac{p_0 k \cosh(k(z+H))}{\rho \omega \cosh(kH)} \cos(\omega t - kx)$$

$$V_z(x, z, t) = \frac{-p_0 k \sinh(k(z+H))}{\rho \omega \cosh(kH)} \sin(\omega t - kx)$$

✘ Soit une particule fluide située en (X_0, Z_0) en l'absence de houle, alors au passage de la houle ses coordonnées $(X(t), Z(t))$ vérifient :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{p_0 k \cosh(k(Z_0 + H))}{\rho \omega \cosh(kH)} \cos(\omega t - kX_0)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{-p_0 k \sinh(k(Z_0 + H))}{\rho \omega \cosh(kH)} \sin(\omega t - kX_0)$$

✘ Après intégration, on obtient :

$$X(t) = X_0 + \frac{p_0 k \cosh(k(Z_0 + H))}{\rho \omega^2 \cosh(kH)} \sin(\omega t - kX_0)$$

$$Z(t) = Z_0 + \frac{p_0 k \sinh(k(Z_0 + H))}{\rho \omega^2 \cosh(kH)} \cos(\omega t - kX_0)$$

En posant :

$$a = \frac{p_0 k \cosh(k(Z_0 + H))}{\rho \omega^2 \cosh(kH)}$$

$$b = \frac{p_0 k \sinh(k(Z_0 + H))}{\rho \omega^2 \cosh(kH)}$$

On obtient les équations :

$$X(t) = X_0 + a \sin(\omega t - kX_0)$$

$$Z(t) = Z_0 + b \cos(\omega t - kX_0)$$

Soit :

$$\left(\frac{X - X_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{Z - Z_0}{b}\right)^2 = 1$$

Avec :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\tanh(k(Z_0 + H))}$$

La trajectoire d'une particule fluide au passage de la houle est donc elliptique.

✘ Notons que dans le cas de particules fluides situées en profondeur, les ellipses sont très aplaties :

$$Z_0 \approx -H \Rightarrow a \gg b$$

- ✘ Notons enfin que l'expression de $Z(t)$ nous permet de trouver l'expression de h_0 . Pour cela, il suffit de poser $Z_0 = 0$:

$$Z(t) = \frac{p_0 k}{\rho \omega^2} \tanh(kH) \cos(\omega t - kX_0)$$

Expression à $h(t) = h_0 \cos(\omega t - kx)$ avec $x = X_0$

On obtient donc :

$$h_0 = \frac{p_0 k}{\rho \omega^2} \tan(kH)$$

4. Houle en eau profonde

- (a) Condition pour considérer la houle comme profonde :

$$H \gg \lambda \Rightarrow kH \gg 1$$

- ✘ On simplifie alors les expressions des différentes grandeurs précédentes en considérant que :

$$\cosh(kH) \approx \frac{1}{2} \exp(kH)$$

$$\cosh(k(H+z)) \approx \frac{1}{2} \exp(k(H+z))$$

$$\sinh(k(H+z)) \approx \frac{1}{2} \exp(k(H+z))$$

et on obtient :

$$p(x, z, t) = p_0 \exp(kz) \cos(\omega t - kx)$$

$$V_x(x, z, t) = \frac{kp_0}{\rho \omega} \exp(kz) \cos(\omega t - kx)$$

$$V_z(x, z, t) = -\frac{kp_0}{\rho \omega} \exp(kz) \sin(\omega t - kx)$$

$$X(t) = X_0 + \frac{p_0 k}{\rho \omega^2} \exp(kZ_0) \sin(\omega t - kX_0)$$

$$Z(t) = Z_0 + \frac{p_0 k}{\rho \omega^2} \exp(kZ_0) \cos(\omega t - kX_0)$$

$$a = b = R = \frac{p_0 k}{\rho \omega^2} \exp(kZ_0)$$

- ✘ La trajectoire d'une particule fluide est donc un cercle de rayon R , de centre (X_0, Z_0) . Notons que quand Z_0 diminue, le rayon R diminue également.

- (b)

$$h_0 = \frac{p_0 k}{\rho \omega^2}$$

- (c) La pression au niveau de la surface libre vaut P_0 la pression atmosphérique, on a donc :

$$P - 0 = p(x, z = h, t) + P_0 - \rho gh(x, t)$$

Soit :

$$p(x, h, t) = \rho gh(x, t)$$

$$p_0 \exp(kh) = \rho gh_0$$

Sachant que $hk \ll 1$, on en déduit :

$$p_0 = \rho gh_0$$

En combinant cette relation avec $h_0 = \frac{p_0 k}{\rho \omega^2}$, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk$$

La vitesse de phase vaut :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega}$$

Le milieu est donc dispersif

La vitesse de groupe vaut alors :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega}$$

Il y a déformation du paquet d'onde.

(d) Calcul de la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{g}{2\pi f^2} = 40 \text{ m}$$

Il faut donc une profondeur supérieure à 400 m.

5. Cas d'eaux peu profondes

(a) On est maintenant dans le cas où :

$$\lambda \gg H \Rightarrow Hk \ll 1$$

✘ On simplifie alors les expressions des différentes grandeurs précédentes en considérant que :

$$\cosh(kH) \approx 1$$

$$\cosh(k(H+z)) \approx 1$$

$$\sinh(k(H+z)) \approx k(H+z)$$

et on obtient :

$$p(x, z, t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$V_x(x, z, t) = \frac{kp_0}{\rho\omega} \cos(\omega t - kx)$$

$$V_z(x, z, t) = -\frac{k^2 p_0}{\rho\omega} (H+z) \sin(\omega t - kx)$$

$$X(t) = X_0 + \frac{p_0 k}{\rho\omega^2} \sin(\omega t - kX_0)$$

$$Z(t) = Z_0 + \frac{p_0 k^2}{\rho\omega^2} (Z_0 + H) \cos(\omega t - kX_0)$$

$$a = \frac{p_0 k}{\rho\omega^2}$$

$$b = \frac{p_0 k^2}{\rho\omega^2} (Z_0 + H)$$

✘ La trajectoire d'une particule fluide est donc une ellipse, de centre (X_0, Z_0) avec :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k(Z_0 + H)}$$

Notons que quand Z_0 diminue, les ellipses s'aplatissent.

✘

$$h_0 = \frac{p_0 k^2}{\rho\omega^2} H$$

✘ Sachant que l'on a toujours :

$$p_0 = \rho g h_0$$

En combinant cette relation avec $h_0 = \frac{p_0 k^2}{\rho\omega^2}$, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk^2 H$$

La vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales et valent :

$$v_\phi = v_g = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

Le milieu est donc non dispersif

(b) Les applications numériques donnent :

$$c = 3.2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\lambda = 16 \text{ m} \gg 1 \text{ m}$$

(c) A l'approche du rivage, on est dans le cas des eaux peu profondes et pourtant les vagues déferlent (déformation du paquet d'onde). Ceci s'explique simplement grâce à l'expression de la vitesse de groupe : cette vitesse dépend de la hauteur d'eau. Or, le front avant de la vague, à l'approche du rivage, se trouve naturellement à une profondeur moins importante que la partie arrière de la vague. Ainsi, la partie arrière de la vague va plus vite que la partie avant de la vague : la vague déferle.