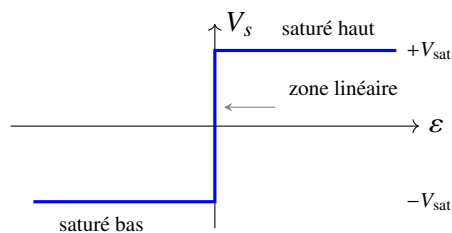


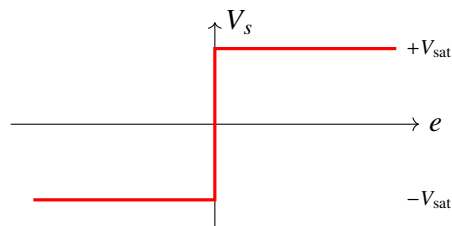
Éléments de correction.

Partie I — L'AO en commutation

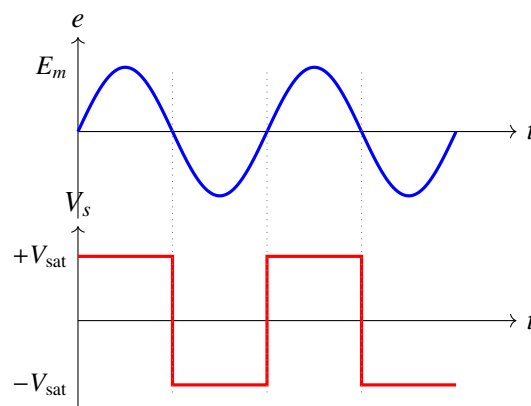
1. Régime saturé. Le gain différentiel μ étant infini, la moindre tension $\varepsilon = V_+ - V_- \neq 0$ sature la sortie : $\varepsilon > 0 \Rightarrow V_s = +V_{\text{sat}}$, $\varepsilon < 0 \Rightarrow V_s = -V_{\text{sat}}$. La caractéristique $V_s(\varepsilon)$ présente trois domaines : une zone *linéaire* (transition quasi verticale de pente μ autour de $\varepsilon = 0$) et deux zones *saturées* ($+V_{\text{sat}}$, $-V_{\text{sat}}$). En commutation, seuls les deux paliers sont empruntés.



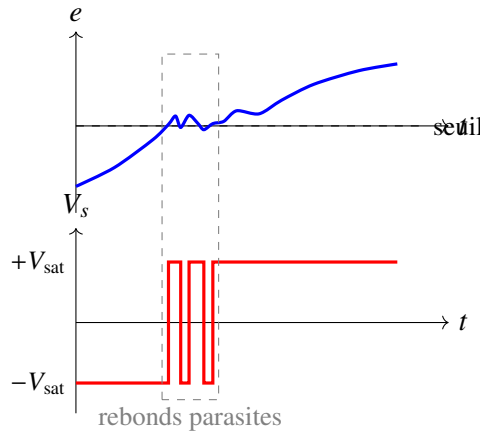
2. Comparateur simple. $V_- = 0$ donc $\varepsilon = e$: $V_s = +V_{\text{sat}}$ si $e > 0$, $-V_{\text{sat}}$ si $e < 0$. Caractéristique en échelon à $e = 0$: *un seul seuil*.



3. Mise en forme. Avec $e = E_m \sin \omega t$, V_s est un créneau $\pm V_{\text{sat}}$ qui bascule à chaque passage par zéro de e . Le montage réalise une *mise en forme* : conversion sinus $\rightarrow$ créneau (détecteur de passage par zéro, extraction du signe).



4. Bruit près du seuil. Au voisinage de $e = 0$, e varie lentement ; un bruit de faible amplitude lui fait franchir plusieurs fois la valeur 0, d'où des basculements multiples parasites (« rebonds »).



5. Trigger non inverseur.

$V_- = 0$; $i_+ = 0$ donc, par Millman au nœud +,

$$V_+ = \frac{R_2 e + R_1 V_s}{R_1 + R_2}.$$

6. Comme $\varepsilon = V_+$, le basculement a lieu quand $V_+ = 0$, soit $e = -\frac{R_1}{R_2} V_s$. Si $V_s = +V_{sat}$: bascule (vers $-V_{sat}$)

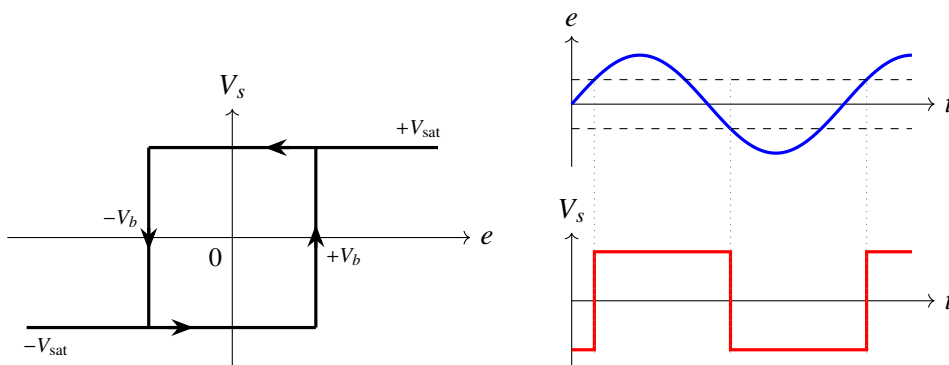
quand e descend sous $-V_b$; si $V_s = -V_{sat}$: bascule (vers $+V_{sat}$) quand e dépasse $+V_b$, avec $V_b = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

Deux seuils $\pm V_b$, franchis en sens opposés.

Signes : si $V_s = +V_{sat}$ alors $V_+ > 0$ et donc $e > -V_b$ et inversement si $V_s = -V_{sat}$ alors $V_+ < 0$ et donc $e < +V_b$.

7. Cycle (non inverseur).

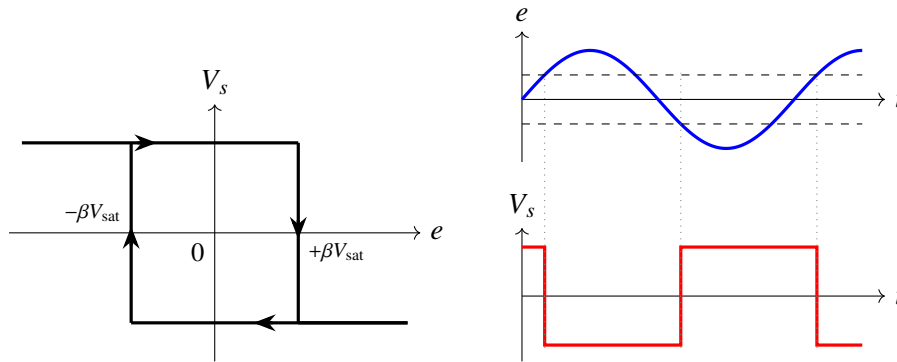
Parcouru dans le sens *trigonométrique* (V_s croît avec e), largeur $\Delta e = 2V_b$. Pour $e = E_m \sin \omega t$ ($E_m > V_b$), les basculements se font aux seuils $\pm V_b$ (et non aux passages par zéro) : V_s « retarde » sur e .



8. La sortie ne rebascule pas tant que e n'a pas traversé l'autre seuil : un bruit d'amplitude b ne provoque plus de basculement parasite tant que $b < 2\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$ (largeur du cycle).

9. Trigger inverseur.

Le pont fixe $V_+ = \beta V_s$, $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$. Basculement quand $\varepsilon = \beta V_s - e = 0$, soit $e = \pm \beta V_{sat}$. Cette fois V_s décroît quand e croît : cycle parcouru en sens *horaire* (au lieu de trigonométrique).

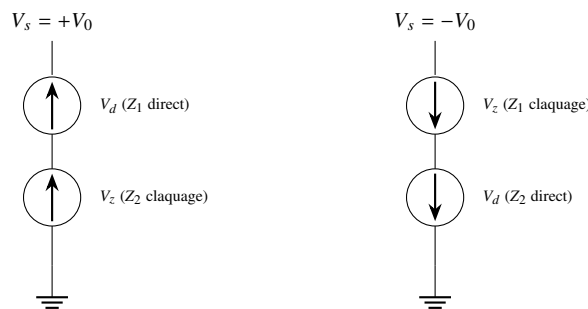


10. Comparaison des deux bascules.

	Non inverseur (B)	Inverseur (C)
Signal appliqué sur	entrée +	entrée -
Seuils	$\pm \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$	$\pm \beta V_{\text{sat}}, \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$
Sens du cycle	trigonométrique	horaire
V_s selon e	croît avec e	décroît avec e

Points communs : sortie à deux états $\pm V_{\text{sat}}$; réaction (positive) ramenée sur l'entrée + ; deux seuils distincts (hystérésis) donc immunité au bruit ; cycle rectangulaire de même hauteur $2V_{\text{sat}}$.

11. Écrêtage Zener. Quand la sortie tend vers $+V_{\text{sat}}$, l'une des Zener est passante en *direct* (chute V_d), l'autre en *claquage* (chute V_z) : la tension utile est écrêtée à $|V_s| = V_z + V_d \equiv V_0$, indépendante de V_{sat} (les rôles s'échangent pour $-V_0$). *Intérêt* : amplitude de sortie précise et reproductible.



Partie II — L'oscillateur à relaxation

12. Intégrateur.

C relie la sortie à l'entrée - : régime linéaire

$$V_- = V_+ = 0.$$

Courants d'entrée nuls $\Rightarrow$ courant dans R = courant dans C : $\frac{u_1}{R} = -C \frac{du_2}{dt}$, soit $\frac{du_2}{dt} = -\frac{u_1}{RC}$. Pour

$u_1 = \pm V_0$: u_2 est une rampe de pente $\mp V_0/RC$.

13. Expressions exactes.

À $t = 0^+$, $u_1 = +V_0$; ce basculement s'est produit car u_2 a atteint le seuil haut, donc $u_2(0) = +\frac{R_1}{R_2} V_0$.

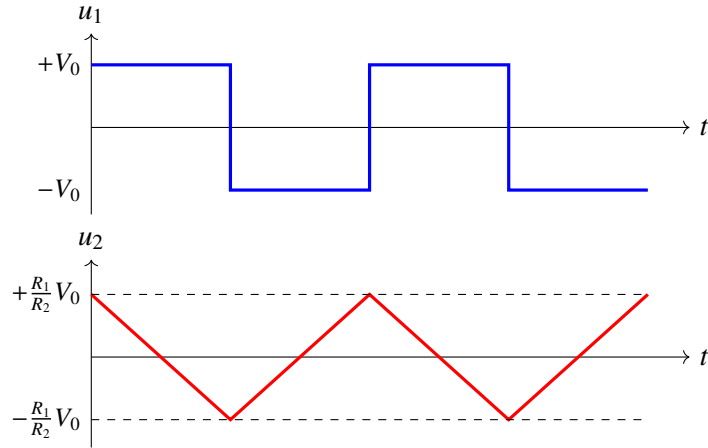
$$0 \leq t < \frac{T}{2} : \quad u_1 = +V_0, \quad u_2(t) = \frac{R_1}{R_2} V_0 - \frac{V_0}{RC} t \quad (\text{descente jusqu'à } -V_b),$$

$$\frac{T}{2} \leq t < T : \quad u_1 = -V_0, \quad u_2(t) = -\frac{R_1}{R_2} V_0 + \frac{V_0}{RC} \left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Le signal résulte de phases de charge/décharge (RC) séparées par des basculements brusques : à *relaxation*, fondamentalement non sinusoïdal (contrairement à un oscillateur quasi sinusoïdal à boucle sélective).

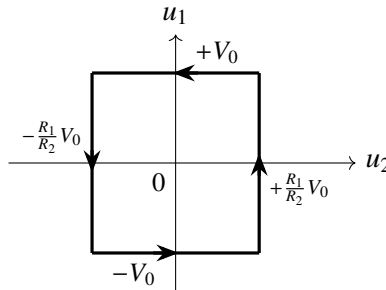
14. Chronogrammes.

u_1 créneau $\pm V_0$; u_2 triangle entre $\pm \frac{R_1}{R_2} V_0$. Quand $u_1 = +V_0$, u_2 descend ; quand $u_1 = -V_0$, u_2 monte.



15. Caractéristique $u_1(u_2)$.

Le point de fonctionnement ne parcourt que le *cycle* (car u_2 reste borné entre les seuils) : rectangle de niveaux $\pm V_0$ et de seuils $\pm \frac{R_1}{R_2} V_0$, dans le sens *trigonométrique*.



16. Période.

Sur la première demi-alternance, $u_2(t) = \frac{R_1}{R_2} V_0 - \frac{V_0}{RC} t$ atteint le seuil bas $-\frac{R_1}{R_2} V_0$ à $t = \frac{T}{2}$:

$$\frac{R_1}{R_2} V_0 - \frac{V_0}{RC} \cdot \frac{T}{2} = -\frac{R_1}{R_2} V_0 \Rightarrow \frac{T}{2} = 2 \frac{R_1}{R_2} RC \Rightarrow T = 4 RC \frac{R_1}{R_2}.$$

V_0 se simplifie : T ne dépend ni de V_0 ni des tensions de saturation ; la fréquence est fixée par RC et R_1/R_2 seuls (bonne stabilité, réglage aisé).

17. A.N.

$$T = 4 \times 10^4 \times 50 \cdot 10^{-9} \times \frac{1}{2} = 10^{-3} \text{ s, soit}$$

$$f_0 = 1 \text{ kHz, } u_2^{\text{crête}} = \frac{R_1}{R_2} V_0 = \frac{1}{2} \times 15 = 7,5 \text{ V.}$$

$f_0 = 1 \text{ kHz}$ est *modérée* : les effets dynamiques (vitesse de balayage, retards) sont négligeables, l'hypothèse quasi statique du préambule est bien vérifiée.

18. Effet de l'écristage.

Il fixe $V_0 = V_z + V_d$, donc l'amplitude du triangle $\frac{R_1}{R_2} V_0$ (bien définie). La période $T = 4RC R_1/R_2$ ne dépendant pas de V_0 , elle est *inchangée* : l'écristage stabilise l'amplitude sans toucher à la fréquence.

19. Diode d'asymétrie.

Selon le signe de u_1 :

$u_1 > 0$: diode passante $\Rightarrow$ résistance $R_{\parallel} = \frac{RR'}{R+R'}$ (descente rapide, durée $t_{\downarrow} = 2 \frac{R_1}{R_2} R_{\parallel} C$)

$u_1 < 0$: diode bloquée $\Rightarrow$ résistance R (montée lente, $t_{\uparrow} = 2 \frac{R_1}{R_2} RC$). Le rapport cyclique (fraction où $u_1 = +V_0$) vaut

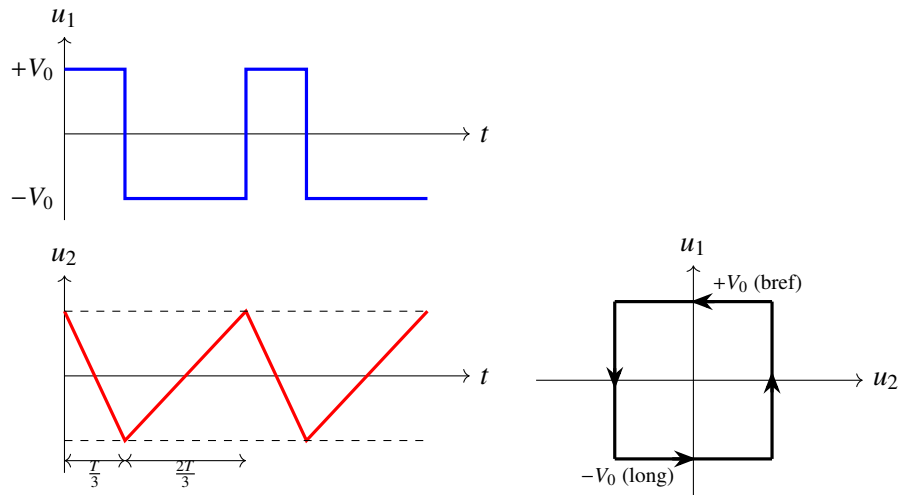
$$\alpha = \frac{t_{\downarrow}}{t_{\uparrow} + t_{\downarrow}} = \frac{R_{\parallel}}{R + R_{\parallel}} = \boxed{\alpha = \frac{R'}{R + 2R'}}.$$

Sans diode ($R' \rightarrow \infty$) : $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$ (symétrique).

$$\text{Et } \frac{R'}{R+2R'} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{R' = R}.$$

20. Tracés ($\alpha = \frac{1}{3}$).

La phase $u_1 = +V_0$ dure $\frac{T}{3}$ (descente rapide), la phase $u_1 = -V_0$ dure $\frac{2T}{3}$ (montée lente) : u_2 est un triangle asymétrique.



La caractéristique $u_1 = f(u_2)$ est *inchangée* (mêmes seuils, mêmes niveaux) : la diode agit sur l'intégrateur, pas sur le comparateur. Seuls les *temps de séjour* sur les deux branches deviennent inégaux, d'où l'asymétrie des chronogrammes.

Partie III — Filtrage

21. Filtre idéal.

Un passe-bas idéal coupe les hautes fréquences avec une pente infinie (ordre infini).

Un passe-bas idéal, de fréquence de coupure entre f_0 et $2f_0$, transmet donc le fondamental et supprime *totale*ment les harmoniques ($\geq 2f_0$) : il ne reste que $\sin \omega t$, donc une sinusoïde *pure*.

Un filtre *réel* d'ordre fini n'atténue que partiellement les harmoniques (réjection finie) : il subsiste des harmoniques résiduels, donc un THD non nul.

22. Contenu spectral — signaux symétriques ($\alpha = \frac{1}{2}$).

Rangs *impairs* uniquement (aucun harmonique pair). Les deux premiers harmoniques (rangs 3 et 5) :

Signal	harmonique (rang)	fréquence	ampl. relative
u_1 (créneau)	1 ^{er} (rang 3)	$3f_0$	1/3
	2 ^e (rang 5)	$5f_0$	1/5
u_2 (triangle)	1 ^{er} (rang 3)	$3f_0$	1/9
	2 ^e (rang 5)	$5f_0$	1/25

23. Contenu spectral — signaux asymétriques ($\alpha = \frac{1}{3}$).

Cette fois *tous* les rangs sont présents *sauf* les multiples de 3 (donc pairs *et* impairs). Les trois premiers harmoniques (rangs 2, 4 et 5) :

Signal	harmonique (rang)	fréquence	ampl. relative
u_1 (créneau)	1 ^{er} (rang 2)	$2f_0$	1/2
	2 ^e (rang 4)	$4f_0$	1/4
	3 ^e (rang 5)	$5f_0$	1/5
u_2 (triangle)	1 ^{er} (rang 2)	$2f_0$	1/4
	2 ^e (rang 4)	$4f_0$	1/16
	3 ^e (rang 5)	$5f_0$	1/25

L'asymétrie fait apparaître le *rang* 2 (à $2f_0$, proche du fondamental), absent des signaux symétriques.

24. Sallen–Key.

LNTTP donne directement :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jR_f C_f \omega - (R_f C_f \omega)^2} = \frac{1}{1 + 2j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{R_f C_f}$ et $\frac{1}{Q} = 2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}$. Filtre du *second ordre*, pente asymptotique -40 dB/décade.

25. Réglage $\omega_0 = 2\omega$ (coupure à $2f_0$).

L'harmonique de rang m correspond à $\frac{m\omega}{\omega_0} = \frac{m}{2}$, donc $\underline{H}(mf_0) = \frac{1}{1 + jm - \frac{m^2}{4}}$ et

$$|\underline{H}(mf_0)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{m^2}{4})^2 + m^2}} = \frac{1}{1 + \frac{m^2}{4}} = \boxed{\frac{4}{4 + m^2}}.$$

En particulier le fondamental ($m = 1$) est transmis avec $|\underline{H}(f_0)| = \frac{4}{5} = 0,8$. Valeurs : $|\underline{H}| = \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{13}, \frac{1}{5}, \frac{4}{29}$ pour $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

26. THD après filtrage.

Principe. Le THD se calcule sur les amplitudes *en sortie de filtre* : chaque harmonique de rang n est multiplié par $|\underline{H}(nf_0)|$, y compris le fondamental ($|\underline{H}(f_0)| = \frac{4}{5}$). Donc

$$d = \frac{\sqrt{\sum_{n \geq 2} (a_n |\underline{H}(nf_0)|)^2}}{a_1 |\underline{H}(f_0)|} = \sqrt{\sum_{n \geq 2} r_n^2}, \quad r_n = \frac{a_n}{a_1} \cdot \underbrace{\frac{|\underline{H}(nf_0)|}{|\underline{H}(f_0)|}}_{G_n} = \frac{a_n}{a_1} \cdot \frac{5}{4 + n^2},$$

r_n étant l'amplitude du rang n rapportée au fondamental, tous deux après filtrage. Facteurs d'atténuation relative du filtre :

$$G_2 = \frac{5}{8} = 0,62, \quad G_3 = \frac{5}{13} = 0,38, \quad G_4 = \frac{5}{20} = 0,25, \quad G_5 = \frac{5}{29} = 0,17.$$

Sans diode ($\alpha = \frac{1}{2}$, rangs impairs — on garde les rangs 3 et 5) :

$$u_1 \left(\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n} \right) : r_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{13} = \frac{5}{39} = 0,128, \quad r_5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{29} = \frac{1}{29} = 0,034 \Rightarrow d = \sqrt{0,128^2 + 0,034^2} \simeq \mathbf{13\%},$$

$$u_2 \left(\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n^2} \right) : r_3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{13} = 0,043, \quad r_5 = \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{29} = 0,007 \Rightarrow d \simeq \mathbf{4,3\%}.$$

Avec diode ($\alpha = \frac{1}{3}$, rangs 2, 4 et 5) :

$$u_1 \left(\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n} \right) : r_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16} = 0,31, \quad r_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{20} = 0,062, \quad r_5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{29} = 0,034 \Rightarrow d \simeq \mathbf{32\%},$$

$$u_2 \left(\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n^2} \right) : r_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{32} = 0,156, \quad r_4 = \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{20} = 0,016, \quad r_5 = \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{29} = 0,007 \Rightarrow d \simeq \mathbf{16\%}.$$

Dans le cas asymétrique, le *rang* 2 (r_2) domine tout : proche de f_0 , il est peu atténué, d'où des THD nettement plus élevés.

	sans diode ($\alpha = \frac{1}{2}$)	avec diode ($\alpha = \frac{1}{3}$)
u_1 (créneau, $1/n$)	13 %	32 %
u_2 (triangle, $1/n^2$)	4,3 %	16 %

27. Comparaison au constructeur — sinus symétrique. Les quatre valeurs dépassent la garantie $\lesssim 1\%$. Le meilleur candidat pour un sinus *symétrique* est le *triangle symétrique* (4,3 %) : il cumule les deux atouts (spectre en $1/n^2$ et absence d'harmonique pair). *Conclusion* : on filtre la sortie de l'intégrateur en configuration symétrique ; mais un simple passe-bas d'ordre 2 ne suffit pas pour atteindre le 1 % garanti.

28. Sinus asymétrique. Le sinus asymétrique « cible » ayant un THD de l'ordre de 9 %, on compare les deux candidats asymétriques : créneau (32 %) et triangle asymétrique (16 %). Le meilleur candidat est le *triangle asymétrique*, nettement plus proche de la référence — même mécanisme : le triangle décroît en $1/n^2$, le créneau en $1/n$.

29. Dispositif. Un *conformateur à diodes* (réseau non linéaire à points de cassure) inséré entre l'oscillateur et le filtre : il « arrondit » le triangle en un quasi-sinus par approximation linéaire par morceaux, ramenant le THD au niveau du pour-cent. C'est la solution des générateurs de fonctions du commerce (ICL8038, XR2206, MAX038).

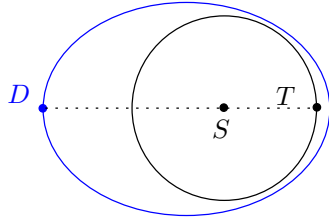
Fin du corrigé.

Sujet X-ENS MPI 2026 - Éléments de correction

Q01. Le mobile (planète, astéroïde) est soumis à la seule force gravitationnelle du Soleil qui est une **force centrale**. L'application du théorème du moment cinétique au mobile dans le référentiel héliocentrique assure que **le moment cinétique se conserve**.

Par définition du moment cinétique $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, le vecteur position est perpendiculaire au moment cinétique à tout instant. **Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et contenant le centre de force.**

Q02. La figure suivante représente la situation lorsque la Terre et Didymos sont en opposition par rapport au Soleil, la distance Terre-Didymos est alors maximale.



Il vient alors $DS_{\max} = r_{\max} = DT_{\max} - r_0 \approx DT_{\max} - r_{\min}$ donc $r_{\max} + r_{\min} \approx DT_{\max}$.

Sur la figure 1, on note $DT_{\max} \approx 3,2r_0$ et comme le demi-grand axe de Didymos est donné par $2a = r_{\min} + r_{\max}$, on en déduit $a \approx 1,6r_0$.

Q03. La Terre et Didymos étant en rotation autour du Soleil, on applique la troisième loi de Kepler dans sa version historique :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2} \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{a}{r_0} \right)^{3/2}$$

$$\text{A.N. : } T = 1 \times 1,6^{3/2} = \sqrt{1,6^3} \approx \sqrt{4} \Rightarrow T \approx 2 \text{ ans}$$

Q04. Partons d'une situation où la Terre et Didymos sont au plus proche autour de l'année 2003 sur la figure 1. Didymos est alors à son périhélie, une année plus tard, la Terre est revenue au même point tandis que Didymos a effectué une demi-révolution et se trouve à son apogée, la distance est alors maximale. Cela apparaît cohérent avec la figure avec une distance maximale atteinte autour de l'année 2004.

Q05. Dans le cas de l'interaction gravitationnelle avec un centre de force de masse M , on sait que pour un mouvement circulaire de rayon r la vitesse du mobile est donnée par $v^2 = GM/r$. Pour une orbite de rayon r_0 égal à celui de la Terre, la vitesse est nécessairement $v_0 = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q06. Avec $\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ et $\Delta\vec{v} // \vec{r}$, **le moment cinétique n'est pas modifié.**

Q07. Avant l'impulsion l'énergie mécanique est donnée par $E_{m,i} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$. À la suite de l'impulsion, il vient :

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}m(v_0\vec{e}_\theta + v_1\vec{e}_r)^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} + \frac{m}{2}v_1^2 = E_{m,i} + \frac{m}{2}v_1^2$$

$$\text{En conséquence } \Delta E_m = \frac{m}{2}v_1^2.$$

Pour une trajectoire liée elliptique et une attraction gravitationnelle, on sait que l'énergie mécanique a pour expression $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ en conséquence :

$$-\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{2r_0} + \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} - \frac{v_1^2}{GM} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \times \frac{v_1^2}{GM/r_0} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2} \right)$$

$$\text{Il vient } a = \frac{r_0}{1 - (v_1/v_0)^2}. \text{ Le demi-grand axe ne varie pas à l'ordre 1 en } |v_1|/v_0.$$

Q08. La conservation du moment cinétique permet de définir la constante des aires $C = r^2\dot{\theta} = r_0v_0$. Il vient alors :

$$E_m = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] - \frac{GMm}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$$

$$\text{En conséquence (avec } v_0^2 = GM/r_0) : E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} = mv_0^2 \left[\frac{r_0^2}{2r^2} - \frac{r_0}{r} \right].$$

Q09. La trajectoire circulaire est associée au minimum de l'énergie potentielle effective :

$$E'_{p,\text{eff}}(r) = mv_0^2 \left(-\frac{r_0^2}{r^3} + \frac{r_0}{r^2} \right)$$

$$\text{On note que } E'_{p,\text{eff}}(r = r_0) = 0.$$

Q10. L'énergie mécanique étant conservée, sa dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} + mv_0^2 \left[-\frac{r_0^2}{r^3} + \frac{r_0}{r^2} \right] = 0$$

Avec $r(t) = r_0 + r_1(t)$, il vient à l'ordre 1 en r_1/r_0 :

$$0 = \ddot{r}_1(t) + \frac{v_0^2}{r_0} \left[-\frac{1}{(1 + r_1(t)/r_0)^3} + \frac{1}{(1 + r_1(t)/r_0)^2} \right]$$

$$\Rightarrow 0 \approx \ddot{r}_1(t) + \frac{v_0^2}{r_0} \left[-\left(1 - 3\frac{r_1(t)}{r_0} \right) + \left(1 - 2\frac{r_1(t)}{r_0} \right) \right] \Rightarrow 0 = \ddot{r}_1(t) + \left(\frac{v_0}{r_0} \right)^2 r_1(t)$$

On obtient l'équation d'un **oscillateur harmonique** de pulsation $\omega = \frac{v_0}{r_0}$. **La période**

de cet oscillateur harmonique est donc égale à la période de révolution de la Terre autour du Soleil.

Q11. Avec $r_{\min} = 1,01 r_0$, on a bien $\frac{r_{\min} - r_0}{r_0} \ll 1$. On se trouve bien dans le cadre de l'approximation $|r_1|/r_0 \ll 1$.

Q12. $r_1(t) = r_{10} \cos(\omega t + \varphi)$ avec r_{10} qui doit être choisi tel que l'aphélie de DART $r_0 + r_{10}$ soit égal au périhélie de Didymos $r_{\min} = 1,01 r_0$, on en déduit donc $r_{10} = 0,01 r_0$.

Très généralement, le complément d'énergie fourni à la sonde DART lui permet d'osciller dans le puits harmonique avec une énergie mécanique complémentaire d'expression : $E'_m = \frac{1}{2} m \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r_1^2$. À son aphélie, $\dot{r}_1 = 0$, le complément d'énergie est entièrement sous forme d'énergie potentielle en conséquence :

$$\frac{1}{2} m \omega^2 r_{10}^2 = \frac{m}{2} v_1^2 \Rightarrow r_{10}^2 = \frac{v_1^2}{\omega^2} \Rightarrow r_{10} = \frac{r_0 |v_1|}{v_0}$$

Avec $r_{10} = 0,01 r_0$, on en déduit : $|v_1| = 0,01 v_0$, c'est-à-dire $v_1 = 0,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q13. La trajectoire de DART est la combinaison du mouvement circulaire de rotation auquel on ajoute une oscillation radiale de même période (Cf. Q10). **La période de révolution de DART est donc celle de la Terre en accord avec le fait que le demi-grand axe n'est pas modifié au premier ordre en $|v_1|/v_0$.**

Q14. Comme $r_1(t)$ est une fonction sinusoidale avec $r_1(t=0) = 0$, on a nécessairement $r_1(t) = r_{10} \sin(\omega t)$ ou $r_1(t) = -r_{10} \sin(\omega t)$.

En $t = 3T/4$, $\omega t = \frac{2\pi}{T} \times \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$. Afin d'obtenir un maximum pour cet instant, il faut retenir la solution $r_1(t) = -r_{10} \sin(\omega t)$

En particulier $\dot{r}_1(t=0) = -\omega r_{10} < 0$ ce qui nécessite une **impulsion initiale en direction du Soleil**.

Q15. $\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - B \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r + B \dot{\theta} \vec{e}_r$. Pour assurer $\vec{T} = \overrightarrow{\text{cste}}$, cela impose (avec $L = m r^2 \dot{\theta}$ la norme du moment cinétique) :

$$B = \frac{GM}{r^2 \dot{\theta}} \Rightarrow B = \frac{GMm}{L}$$

Q16. Pour un mouvement circulaire, la vitesse est orthoradiale est $v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$, en conséquence :

$$B = \frac{GMm}{m r_0 v_0} = \frac{GM}{r_0} \times \frac{1}{v_0} = \frac{v_0^2}{v_0} \Rightarrow B = v_0$$

$$\vec{T} = v_0 \vec{e}_\theta - v_0 \vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{T} = \vec{0}}$$

Q17. Le vecteur $\vec{T}$ étant une constante du mouvement, plaçons nous au périhélie pour le déterminer.

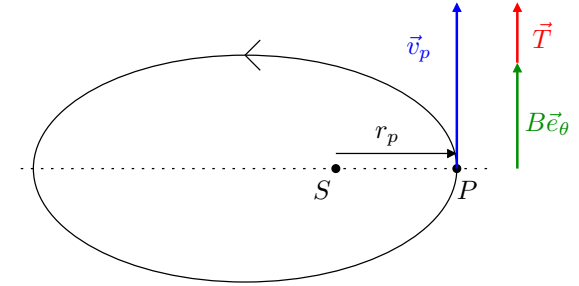
En ce point P , le vecteur vitesse et le vecteur unitaire orthoradial sont perpendiculaires à l'axe principal de l'ellipse, donc $\vec{T}$ est dans le plan de la trajectoire et perpendiculaire à l'axe principal de l'ellipse.

$$\text{D'une part : } B = \frac{GMm}{L} = \frac{GMm}{m r_p v_p} = \frac{GM}{r_p v_p}.$$

En exprimant l'énergie mécanique au périhélie, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} v_p^2 - \frac{GMm}{r_p} &= -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{r_a + r_p} \Rightarrow v_p^2 = \frac{2GM}{r_p} \left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p} \right] \\ \Rightarrow v_p &= 2 \frac{GM}{r_p v_p} \left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p} \right] \Rightarrow v_p = 2 \left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p} \right] B \end{aligned}$$

Comme $r_a \geq r_p$, le terme entre crochets est toujours inférieur à 1/2, donc $v_p \geq B$, le cas d'égalité étant obtenu pour la trajectoire circulaire comme on l'a montré à la question Q16. On en déduit ainsi le sens du vecteur $\vec{T}$ et le schéma demandé :



Q18. On sait que $B = \frac{GMm}{L}$. Par ailleurs, le moment cinétique est conservé lors de la manœuvre modifiant la trajectoire de DART, le moment cinétique est donc celui de la trajectoire circulaire, en conséquence $B = v_0$ (Cf. Q16).

Avec un complément de vitesse par rapport au mouvement circulaire $\Delta \vec{v} = -|v_1| \vec{e}_r$, il vient :

$$\vec{T} = v_0 \vec{e}_\theta - |v_1| \vec{e}_r - v_0 \vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\|\vec{T}\| = |v_1|}$$

Q19. À l'aphélie et au périhélie, le vecteur vitesse est purement orthoradial et les trois vecteurs $\vec{v}$, $\vec{T}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires. D'après la figure ci-dessus, il vient :

$$\boxed{v_p = v_0 + |v_1|} \quad \text{et} \quad \boxed{v_a = v_0 - |v_1|}$$

Q20. En exploitant la **constante des aires**, il vient $\boxed{r_p(v_0 + |v_1|) = r_a(v_0 - |v_1|)}$.

Avec $r_p + r_a = 2a$, il vient :

$$2a = r_a \left(1 + \frac{v_0 - |v_1|}{v_0 + |v_1|} \right) \Rightarrow \boxed{r_a = a \left(1 + \frac{|v_1|}{v_0} \right)}$$

En exploitant le résultat obtenu à la question Q07, on en déduit finalement :

$$\boxed{r_a = \frac{r_0}{1 - (v_1/v_0)^2} \left(1 + \frac{|v_1|}{v_0} \right)}$$

Q21. Au premier ordre en $|v_1|/v_0$, il vient :

$$r_a = r_0 \left(1 + \frac{|v_1|}{v_0} \right) \Rightarrow \boxed{r_{10} = r_0 \frac{|v_1|}{v_0}}$$

On retrouve le résultat de la question Q12.