

Optique

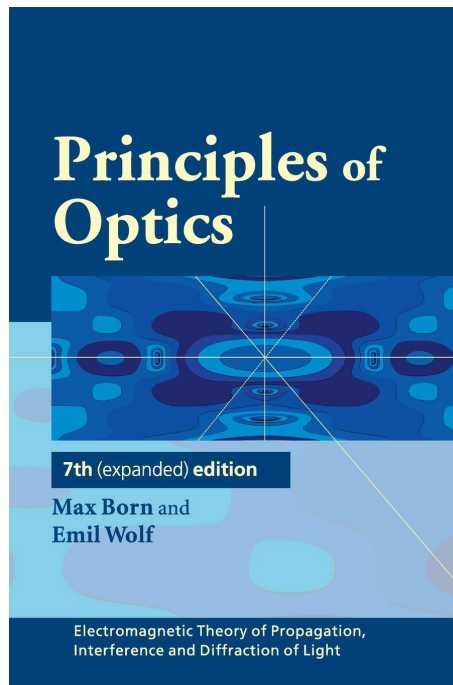


Figure 1 – La bible de l’optique physique

1 Optique géométrique

SVF

- ✗ Établir les 4 relations du prisme. Donner l’expression de la déviation minimale en fonction de l’indice du prisme (schéma obligatoire).
- ✗ Établir l’expression du grossissement d’une lunette astronomique (schéma obligatoire).
- ✗ Établir l’expression du grossissement d’un microscope (Schéma obligatoire).
- ✗ Établir l’expression de la profondeur de champ d’un appareil photo. (schémas obligatoires).
- ✗ Établir la latitude de mise au point dans le cas du système œil -loupe (on considèrera que l’on est placé au foyer image de la loupe et que l’œil est normal).
- ✗ Rappeler le principe des méthodes de focométrie suivantes : auto-collimation, Bessel, Silbermann, Badal.
- ✗ Expliquer le principe du réglage d’un goniomètre (schémas obligatoires).
- ✗ On considère un milieu d’indice continument variable :

$$n = n_0(1 + az)$$

avec z verticale ascendante et $|a/z| \ll 1 \forall z$

Déterminer l’équation d’un rayon lumineux dans un tel milieu.

- ✗ Déterminer la bande passante d’un fibre à saut d’indice.

1.1 4 relations du prisme (prisme de spectroscopie : $A = 60^\circ$)

✘ On considère le prisme suivant :

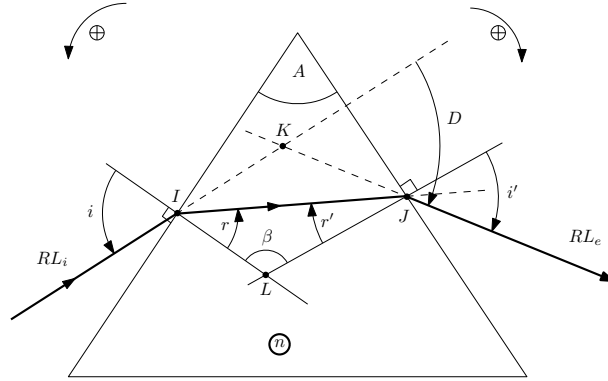


Figure 2

✘ Les lois de Descartes sur les deux dioptries donnent :

$$\sin i = n \sin r \quad (1)$$

$$n \sin r' = \sin i' \quad (2)$$

✘ La somme des angles dans le triangle (IAJ) étant égale à π , on a :

$$\pi = \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) + A \Rightarrow A = r + r' \quad (3)$$

✘ La somme des angles dans le triangle (IKJ) étant égale à π , on a :

$$\pi = (i - r) + (i' - r') + (\pi - D) \Rightarrow D = i + i' - A \quad (4)$$

✘ Pour trouver la valeur de i au minimum de déviation, on annule dD :

$$dD = 0 = di + di' \Rightarrow di = -di' \quad (5)$$

En prenant la différentielle des trois autres relations, on obtient :

$$\cos i di = n \cos r dr \quad (6)$$

$$\cos i' di' = n \cos r' dr' \quad (7)$$

$$0 = dr + dr' \quad (8)$$

D'où, en faisant le rapport des équations 6 et 7 et en utilisant les équations 5 et 8 :

$$\frac{\cos i}{\cos i'} = \frac{\cos r}{\cos r'}$$

Soit, en prenant le carré de cette équation :

$$\frac{1 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 i'} = \frac{1 - \sin^2 r}{1 - \sin^2 r'}$$

Soit :

$$\frac{1 - n^2 \sin^2 r}{1 - n^2 \sin^2 r'} = \frac{1 - \sin^2 r}{1 - \sin^2 r'}$$

D'où :

$$\begin{aligned}(1 - n^2 \sin^2 r) (1 - \sin^2 r') &= (1 - \sin^2 r) (1 - n^2 \sin^2 r') \\ (1 - n^2) \sin^2 r &= (1 - n^2) \sin^2 r'\end{aligned}$$

Les angles étant compris entre 0 et $\pi/2$ et l'indice étant différent de 1, on obtient :

$$r_m = r'_m$$

et donc :

$$\begin{aligned}r_m &= \frac{A}{2} \\ \sin i_m &= \sin i'_m = n \sin \left(\frac{A}{2} \right) \\ D_m &= 2i_m - A\end{aligned}$$

Soit enfin :

$$n = \frac{\sin \left(\frac{A + D_m}{2} \right)}{\sin \left(\frac{A}{2} \right)}$$

1.2 Grossissement d'une lunette astronomique

- ✗ On modélise la lunette astronomique par l'association de deux lentilles convergentes formant un système afocal comme indiqué sur la figure 3.

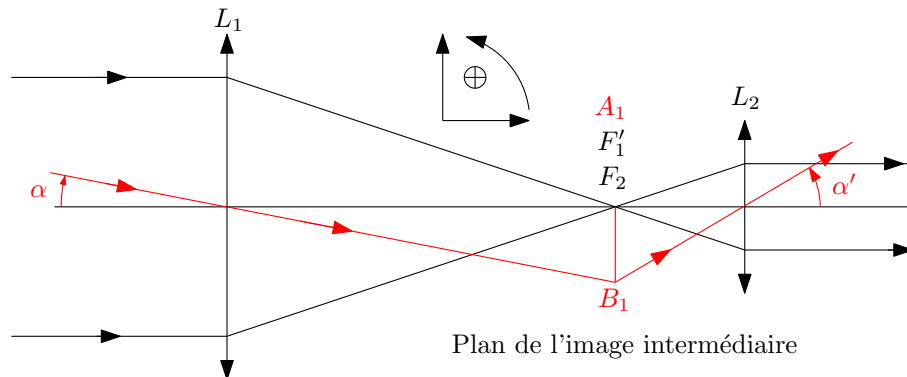


Figure 3

- ✗ Le schéma sagittal est le suivant :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

Les points A , A_1 et A' étant sur l'axe

$$B_\infty \xrightarrow{L_1} B_1 \xrightarrow{L_2} B'_\infty$$

Le point B étant en dehors de l'axe, vu sous un angle α et B' est un point à l'infini en dehors de l'axe vu sous un angle α'

- ✗ Attention à bien penser à orienter les distances et les angles !
- ✗ Attention à définir les angles à partir de directions fixes ! (ici axe focal)
- ✗ Le grossissement vaut :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

✘ D'après la figure 3 , on a :

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_1} < 0$$

$$\tan \alpha' \approx \alpha' = -\frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_2} > 0$$

D'où :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

1.3 Microscope

✘ On modélise le microscope comme indiqué figure 4

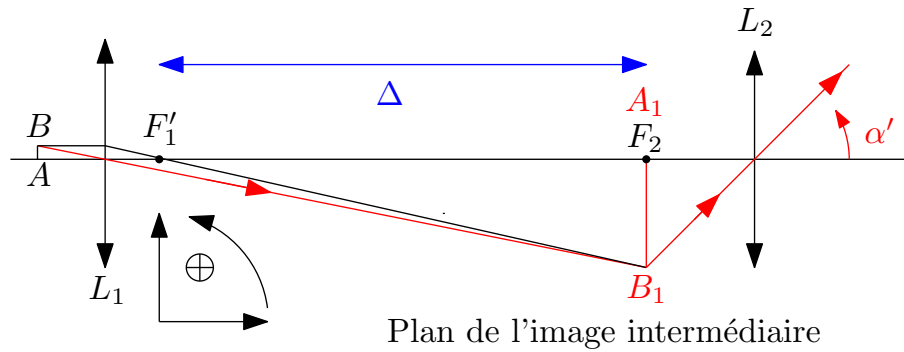


Figure 4

✘ Le grossissement du microscope vaut :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

où α est l'angle sous lequel on voit l'objet (AB) comme indiqué figure 5 :

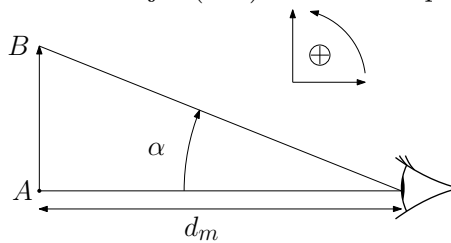


Figure 5

✘ Attention à bien penser à orienter les distances et les angles !

✘ Attention à définir les angles à partir de directions fixes ! (ici axe focal)

✘ D'après les figures 4 et 5, on a :

$$\tan \alpha \approx \alpha = -\frac{\overline{AB}}{d_m} < 0$$

$$\tan \alpha' \approx \alpha' = -\frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_2} > 0$$

D'où :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} \frac{d_m}{f'_2}$$

✘ Le grandissement de l'objectif vaut :

$$\gamma = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} < 0$$

- ✘ La formule de conjugaison de Newton pour le couple (A, A_1) donne :

$$\overline{F_1 A} \cdot \overline{F'_1 A_1} = -f_1'^2$$

Avec :

$$\overline{O_1 A} = \overline{O_1 F_1} + \overline{F_1 A} \Rightarrow \overline{O_1 A} = -f_1' - \frac{f_1'^2}{\Delta}$$

$$\overline{O_1 A_1} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 A_1} \Rightarrow \overline{O_1 A_1} = f_1' + \Delta$$

D'où :

$$\gamma = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} = \frac{f_1' + \Delta}{-f_1' - \frac{f_1'^2}{\Delta}}$$

Et donc :

$$G = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} \frac{d_m}{f_2'} = -\frac{d_m}{f_2'} \frac{f_1' + \Delta}{f_1' + \frac{f_1'^2}{\Delta}}$$

1.4 Profondeur de champ d'un appareil photo.

- ✘ On considère un appareil photo pour lequel la mise au point a été faite sur un point A comme indiqué figure 6

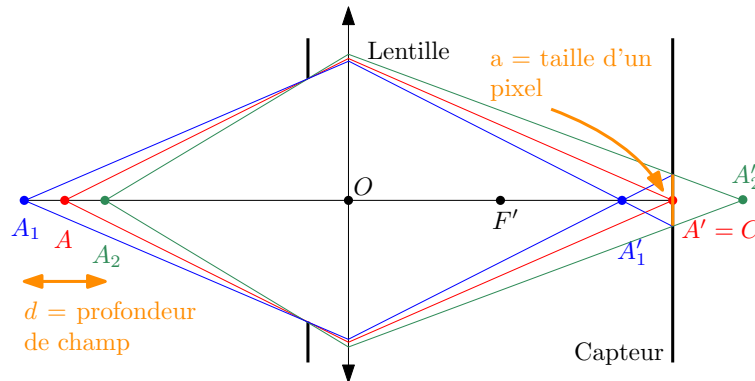


Figure 6

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

- ✘ On modifie la position de A sans changer la mise au point : l'image de A se décale et ne se forme plus exactement sur le capteur et on obtient donc une tache sur le capteur. Tant que la taille de la tache est inférieure à la taille d'un pixel, l'image apparaît nette. **L'intervalle des positions de A permettant d'obtenir une image nette définit la profondeur de champ** : ici il s'agit de la distance $\overline{A_1 A_2}$.
- ✘ En notant D le diamètre du diaphragme et a la distance caractéristique d'un pixel, on obtient grâce au théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{OA'_1}}{\overline{A'_1 A'}} = \frac{D}{a} \Rightarrow \overline{OA'_1} = \frac{D}{D+a} \overline{OA'}$$

$$\frac{\overline{OA'_2}}{-\overline{A'_2 A'}} = \frac{D}{a} \Rightarrow \overline{OA'_2} = \frac{D}{D-a} \overline{OA'}$$

✘ Soit, en sachant que $D \gg a$:

$$\overline{OA_1} = \overline{OA'} \left(1 - \frac{a}{D}\right)$$

$$\overline{OA_2} = \overline{OA'} \left(1 + \frac{a}{D}\right)$$

✘ Les formules de conjugaison pour les deux couples conjugués donnent :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{OA'_1}} - \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} = \frac{1}{\overline{OA'_2}} - \frac{1}{f'}$$

Soit, après simplifications :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{a\overline{OA} + (D + a)f'}{Df'\overline{OA}}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} = \frac{-a\overline{OA} + (D - a)f'}{Df'\overline{OA}}$$

Soit :

$$\overline{OA_1} = \overline{OA} \left(\frac{Df'}{Df' + a(f' + \overline{OA})} \right)$$

$$\overline{OA_2} = \overline{OA} \left(\frac{Df'}{Df' - a(f' + \overline{OA})} \right)$$

✘ On en déduit une expression générale de $d = \overline{A_1A_2}$:

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA} \left(\frac{2aDf'(f' + \overline{OA})}{(Df')^2 - a^2(f' + \overline{OA})^2} \right)$$

✘ Cas particulier fréquent où $|\overline{OA}| \gg f'$:

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA}^2 \left(\frac{2aDf'}{(Df')^2 - a^2(\overline{OA})^2} \right)$$

✘ **Cas particulier où la mise au point est faite à l'infini :**

☛ On doit exprimer uniquement $\overline{OA_2}$ et on prend $\overline{AO} \rightarrow \infty$:

$$|\overline{OA_2}| = -\frac{Df'}{a}$$

☛ Sachant que, pour augmenter la profondeur de champ, on cherche à minimiser cette distance, on peut tirer les conclusion suivantes : pour augmenter la profondeur de champ, il faut diminuer le diaphragme d'ouverture, augmenter la taille des pixels et diminuer la focale.

☛ Ordre de grandeur : on photographie un paysage en pleine journée (mise au point à l'infini ; $D \approx \frac{f'}{10} = 5 \text{ mm}$; $f' = 5 \text{ cm}$ et $a \approx 5 \mu\text{m}$), on obtient $|\overline{OA_2}| \approx 100 \text{ m}$.

✘ **Cas particulier d'une mise au point rapprochée**

☛ On néglige alors $a^2(\overline{OA})^2$ devant $(Df')^2$:

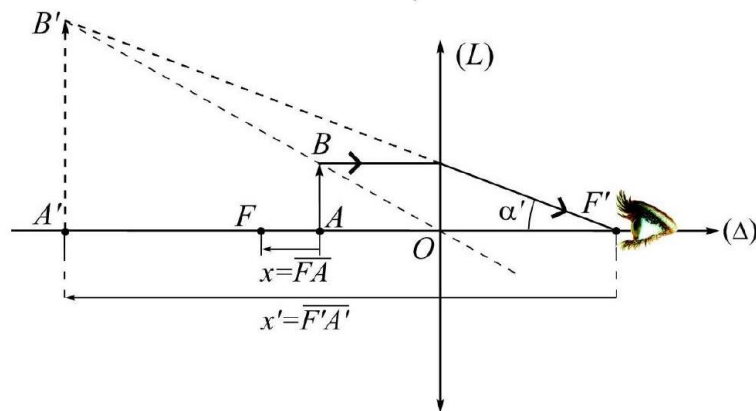
$$d = \overline{A_1A_2} = \overline{OA}^2 \left(\frac{2a}{Df'} \right)$$

☛ Ainsi, pour une prise de vue rapprochée, si l'on souhaite augmenter la profondeur de champ d , on doit à nouveau diminuer D ; diminuer la focale f' et augmenter la taille des pixels a . Notons que la distance de mise au point $|\overline{OA_2}|$ joue ici un rôle très important : plus on augmente la distance de mise au point, plus la profondeur de champ augmente.

1.5 Latitude de mise au point

- ✕ La latitude de mise au point, noté Δp est la distance entre les deux positions extrêmes de l'objet telles que l'image de l'objet soit visible par l'œil placé en F' , c'est-à-dire telles que l'image se forme entre :

- ☛ le Punctum Remotum (l'image à travers la loupe est située au PR de l'œil)
- ☛ et le Punctum Proximum (l'image à travers la loupe est située au PP de l'œil)



- ✕ Pour la démonstration, on part de la relation de Newton :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2$$

Soit :

$$x' \cdot x = -f'^2$$

(si on pose $x' = \overline{F'A'}$ et $x = \overline{FA}$)

Comme $x = \frac{-f'^2}{x'}$, lorsque :

- ✕ Lorsque l'image est au PP, on note $x'_1 = -d_m$, on a alors :

$$x_1 = \overline{FA_1} = \frac{f'^2}{d_m}$$

- ✕ Lorsque l'image est au PR, on note $x'_1 = -D_m$, on a alors :

$$x_2 = \overline{FA_2} = \frac{f'^2}{D_m}$$

alors :

$$\Delta p = \overline{A_2A_1} = \overline{A_2F} + \overline{FA_1} = -x_2 + x_1 = \frac{f'^2}{d_m} - \frac{f'^2}{D_m}$$

Pour un œil normal, D_m tend vers l'infini et donc :

$$\Delta p = \frac{f'^2}{d_m}$$

Il apparaît que la profondeur de champ est d'autant plus faible que la distance focale image est petite.

✘ Pour rappel, le grossissement de la loupe s'exprime comme suit :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

où α est l'angle sous lequel l'objet est vu sans la loupe quand il est placé au PP de l'oeil :

$$\alpha = \frac{AB}{d_m} > 0$$

De plus :

$$\alpha' = -\frac{A'B'}{x'} > 0$$

Avec :

$$\gamma = \frac{A'B}{AB} = \frac{-f}{x} = \frac{-x'}{f'}$$

D'où :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{A'B}{AB} \times \frac{d_m}{x'} = \frac{d_m}{f'}$$

Ainsi, pour augmenter le grossissement, il faut diminuer la focale de la loupe : entre latitude de mise au point et grossissement, il faut donc faire un compromis en fonction de ce que l'on veut.

1.6 Méthodes de Focométrie

Méthode d'autocollimation

- ✘ L'autocollimation est une méthode rapide permettant de placer un objet lumineux dans le plan focal objet d'une lentille convergente : ce n'est pas à proprement parler une méthode de focométrie.
- ✘ On effectue le montage suivant :

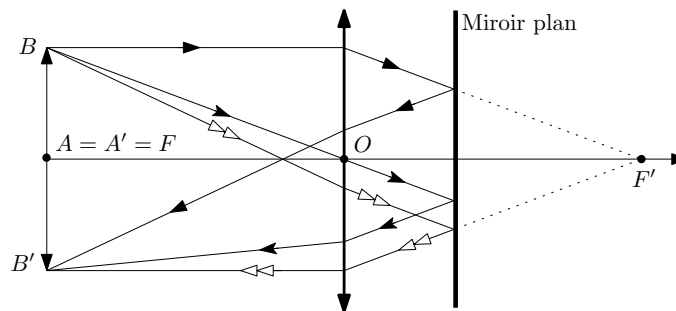


Figure 7 – Autocollimation : pour positionner rapidement un objet dans le plan focal objet

Lorsque l'image de l'objet, dans le plan de l'objet, est nette alors la distance entre l'objet et la lentille est égale à la distance focale image de la lentille : l'objet est placé dans le plan focal objet de la lentille.

Méthode de Bessel

- ✘ On place un objet et un écran sur un banc d'optique à une distance D l'un de l'autre : attention, il faut que D soit supérieure à $4f'$!
- ✘ On place la lentille dont on veut mesurer la focale entre l'objet et l'écran et on déplace la lentille de façon à avoir une image nette sur l'écran.

- ✗ On constate alors qu'il existe deux positions distinctes de la lentille (sauf si $D = 4f'$) pour lesquelles on observe une image nette sur l'écran.

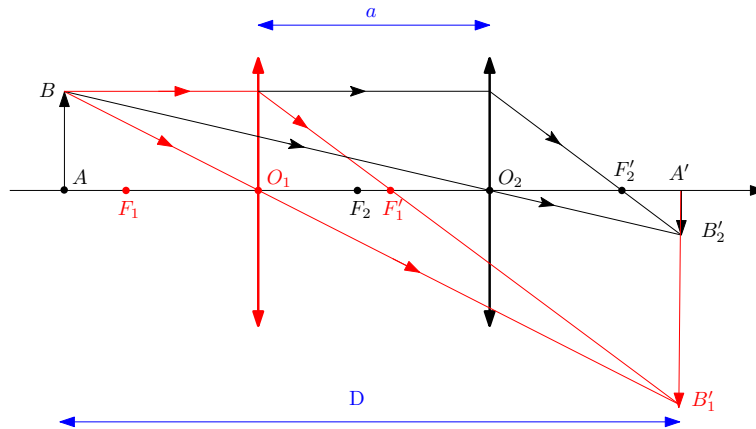


Figure 8 – Bessel : On détermine la distance entre les deux positions de la lentille pour lesquelles l'image est nette sur l'écran

- ✗ On note a la distance entre les deux positions de la lentille. On déduit alors la valeur de f' de la formule :

$$f' = \frac{D^2 - a^2}{4D}$$

- ✗ En effet :

☛ On a :

$$\overline{O_1O_2} = a$$

$$\overline{AA'} = D$$

☛ On note :

$$p_1 = \overline{O_1A}$$

$$p_2 = \overline{O_2A}$$

Avec :

$$p_1 - p_2 = a$$

$$p'_1 = \overline{O_1A'}$$

$$p'_2 = \overline{O_2A'}$$

☛ D'après le principe de retour inverse de la lumière, on a :

$$p_1 = -p'_2$$

$$p_2 = -p'_1$$

☛ En réécrivant la distance D , on obtient :

$$D = \overline{AA'} = \overline{AO_1} + \overline{O_1A'} \Rightarrow D = -p_1 + p'_1$$

$$D = \overline{AA'} = \overline{AO_2} + \overline{O_2A'} \Rightarrow D = -p_2 + p'_2$$

D'où :

$$2D = -2(p_1 + p_2) = -4p_1 + 2a \Rightarrow p_1 = \frac{a - D}{2} < 0$$

et donc :

$$p'_1 = -p_2 = -p_1 + a = \frac{D - a}{2} + a = \frac{D + a}{2}$$

- ☛ On utilise la formule de conjugaison pour le couple (AA') :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'}$$

D'où :

$$\frac{2}{D+a} - \frac{2}{a-D} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{2(a-D) - 2(D+a)}{a^2 - D^2} = \frac{1}{f'}$$

Soit :

$$f' = \frac{D^2 - a^2}{4D}$$

Méthode de Silbermann

- ✗ La méthode de Silbermann repose sur le résultat suivant :

$$\overline{OA} = -\overline{OA'} = -2f' \Rightarrow \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1$$

- ✗ Ainsi, pour déterminer f' , on place la lentille à équidistance de l'objet et de l'écran et on les éloigne jusqu'à obtenir un grandissement de -1 : la distance entre l'objet et l'écran vaut alors :

$$d = 4f'$$

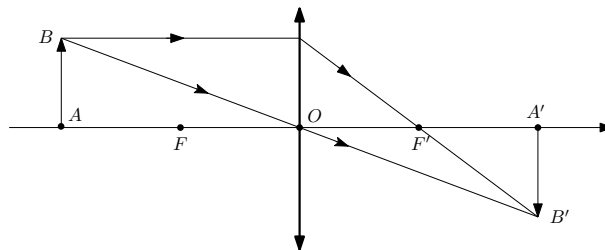


Figure 9 – Silbermann : On détermine par encadrement la position de la lentille pour laquelle le grandissement vaut -1

Méthode de Badal

- ✗ On considère le dispositif représenté figure 10.

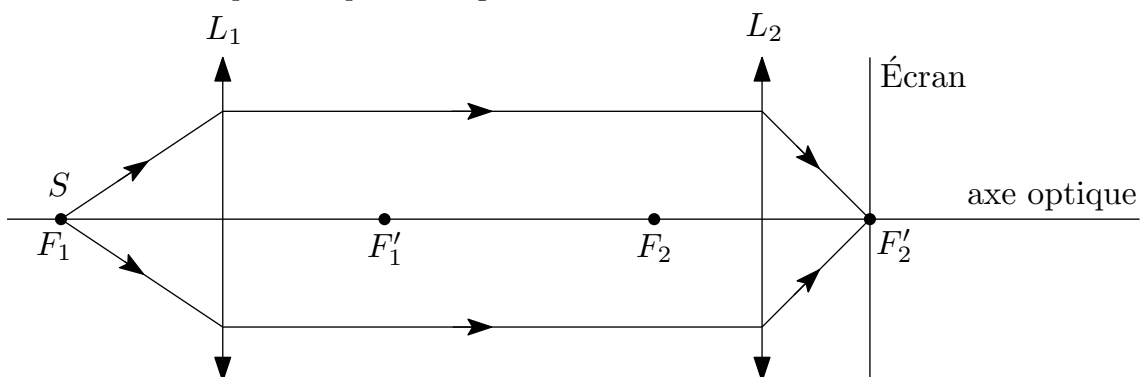


Figure 10 – Configuration initiale pour la méthode de Badal

- ✘ On place la lentille divergente, dont on souhaite déterminer la distance focale $f' < 0$ au niveau du foyer objet de la lentille L_2 , comme représenté figure 11.

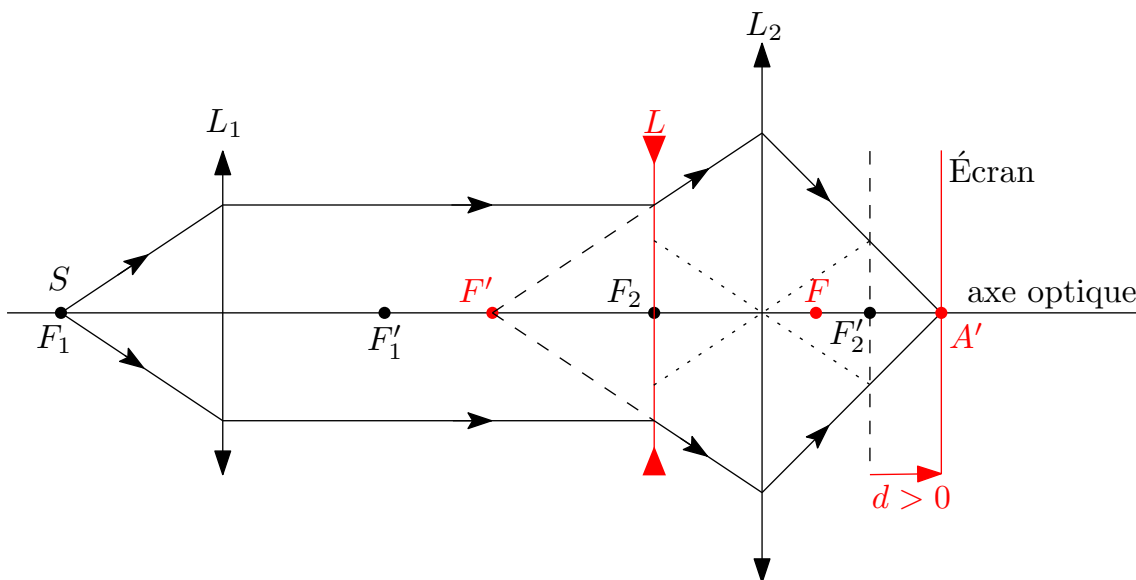


Figure 11 – Mesure de la distance focale d'une lentille divergente

- ✘ Pour obtenir à nouveau une image nette sur l'écran, on doit déplacer l'écran d'une distance $d > 0$.
- ✘ Cette distance d permet alors de déterminer la distance focale f' :

$$S = F_1 \xrightarrow{L_1} \infty \xrightarrow{L_2} F'_2$$

$$S = F_1 \xrightarrow{L_1} \infty \xrightarrow{L_2} F' \xrightarrow{L_2} A'$$

D'où en utilisant la formule de Newton :

$$\overline{F_2 F'} \cdot \overline{F'_2 A'} = -(f'_2)^2$$

Soit, sachant que : $\overline{F_2 F'} = f'$ et $\overline{F'_2 A'} = d$:

$$f' = -\frac{(f'_2)^2}{d} < 0$$

- ✘ Cette méthode marche aussi pour les lentilles convergentes, la distance d est alors négative (attention il faut que A' soit réel et donc que $f' > f'_2$)

1.7 Réglages goniomètre

Le goniomètre est constitué :

- ✘ D'une lunette, comprenant un oculaire et un objectif,
- ✘ D'un collimateur devant lequel on place une source lumineuse,
- ✘ D'un plateau sur lequel on place soit un réseau soit un prisme.

Réglage de l'oculaire

- ✘ L'oculaire est modélisé par une lentille convergente : il joue le rôle d'une loupe.

- ✕ Pour un œil normal¹, on règle l'oculaire en plaçant le plan du réticule² dans le plan focal objet de l'oculaire. Pour cela, il suffit d'éclairer le réticule grâce à l'éclairage de l'autocollimation³ et de l'observer directement dans l'oculaire comme représenté figure 12.

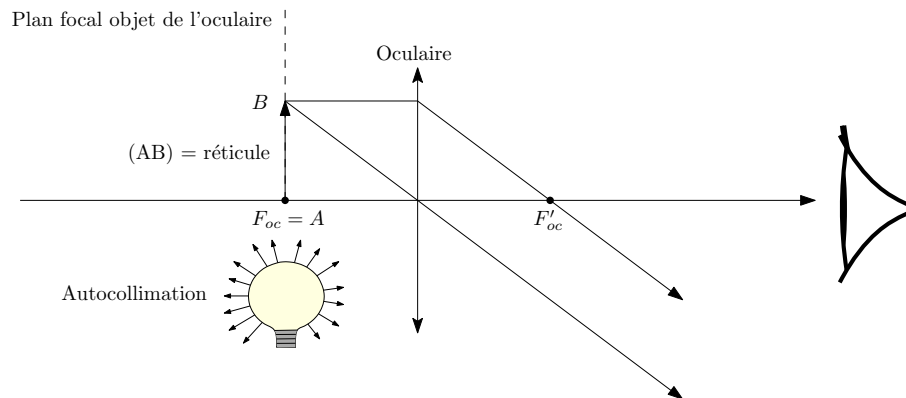


Figure 12 – Principe d'utilisation d'une loupe ou d'un oculaire (œil emmétrope)

- ✕ Principe du réglage :

- On tire l'oculaire jusqu'à ce que l'image du réticule soit floue : la distance entre le plan du réticule et le plan de l'oculaire étant alors supérieure à la distance focale de l'oculaire, l'image du réticule est au niveau de l'œil de l'observateur, voire au delà, elle ne peut donc pas être vue nettement comme représenté figure 40.

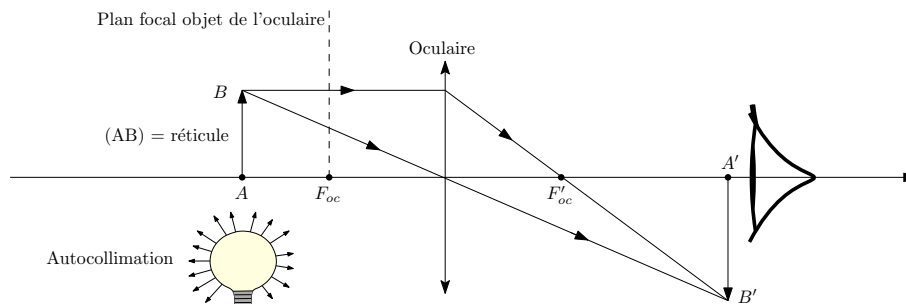


Figure 13 – Cas où l'oculaire est trop « tiré »

- On repousse doucement l'oculaire. La position de l'oculaire pour laquelle l'image du réticule redevient nette correspond au cas où le plan focal objet de l'oculaire est dans le plan du réticule comme représenté figure 12.
- Si l'on continue à repousser l'oculaire, le réticule paraît net (voir figure 41), mais l'œil accommode ce qui induit une fatigue de l'œil.

1. Le principe du réglage de l'oculaire pour un œil quelconque est l'observation au repos afin de ne pas fatiguer les yeux de l'observateur. Pour un œil normal (œil emmétrope), cette observation se fait à l'infini

2. Le réticule est un croix gravée dans une lame transparente, lame perpendiculaire à l'axe optique de la lunette

3. Le réticule est éclairé par une lampe placée sur le côté du tube et grâce à une lame semi-réfléchissante : il faut penser à la retirer une fois le réglage du goniomètre fini (tirette)

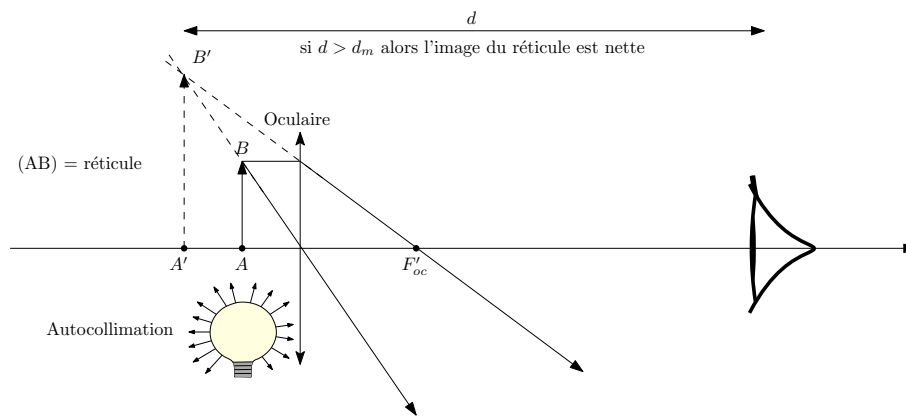


Figure 14 – Cas où l'oculaire est trop « poussé »

Réglage de l'objectif

- ✗ L'objectif est modélisé par une lentille convergente.
- ✗ Lorsque le système objectif-oculaire est réglé il forme une lunette astronomique et donc un système afocal. De fait, pour régler l'objectif, il faut placer le plan focal image de l'objectif dans le plan focal objet de l'oculaire soit le plan du réticule, comme représenté figure 15.

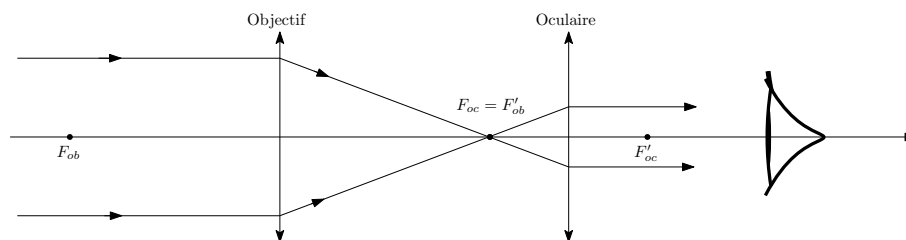


Figure 15 – Modélisation de la lunette

- ✗ Pour régler l'objectif, on utilise l'autocollimation : le réticule éclairé envoie des rayons lumineux en direction de l'oculaire (quand l'observateur regarde dans l'oculaire, il voit un premier réticule issu du réglage de l'oculaire), mais aussi en direction de l'objectif. Ainsi, le réticule joue le rôle d'objet pour l'objectif. Pour le placer dans le plan focal (objet) de l'objectif, il suffit de procéder comme pour autocollimation classique : on place à la sortie de la lunette un miroir plan qui renvoie les rayons lumineux émis par le réticule éclairé. Lorsque le réticule est dans le plan focal objet de l'objectif, un deuxième réticule apparaît net pour l'observateur, comme représenté figure 16.

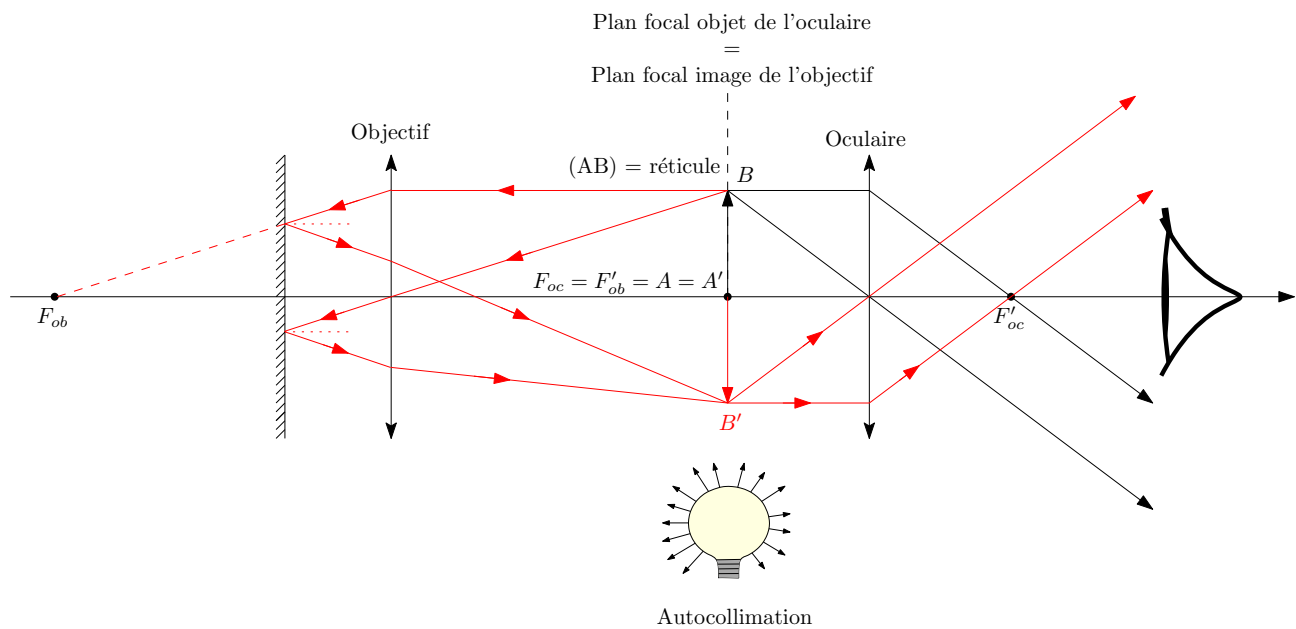


Figure 16 – Régler de l'objectif

Régler du collimateur

- ✗ Le collimateur est constitué d'une fente réglable et d'une lentille convergente. On utilise le collimateur en plaçant une lampe devant la fente.
- ✗ Le collimateur est réglé lorsque que le plan de la fente coïncide avec le plan focal objet de la lentille du collimateur, comme représenté figure 17.

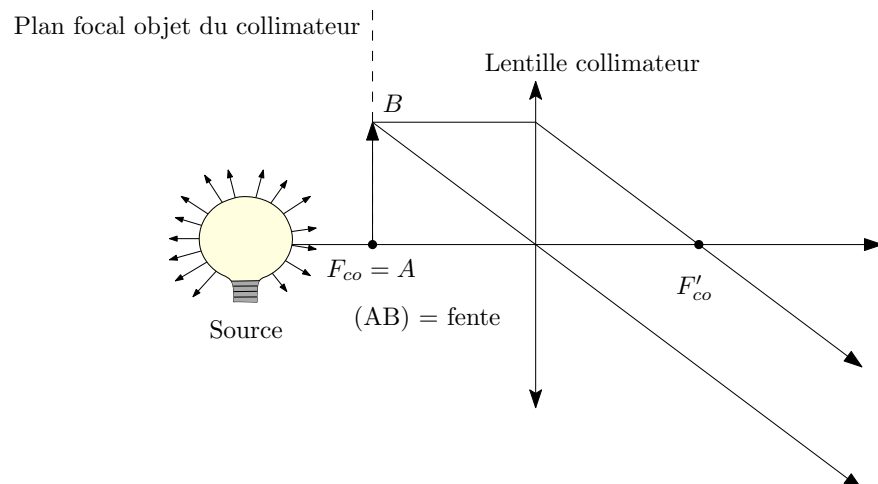


Figure 17 – Modélisation du collimateur

- ✗ Principe du réglage : on observe l'image de la fente à travers la lunette réglée. L'image de la fente est nette lorsque celle-ci envoie des rayons lumineux parallèles entre eux dans la lunette et donc lorsque la fente est placée dans le plan focal objet de la lentille du collimateur, comme représenté figure 18.

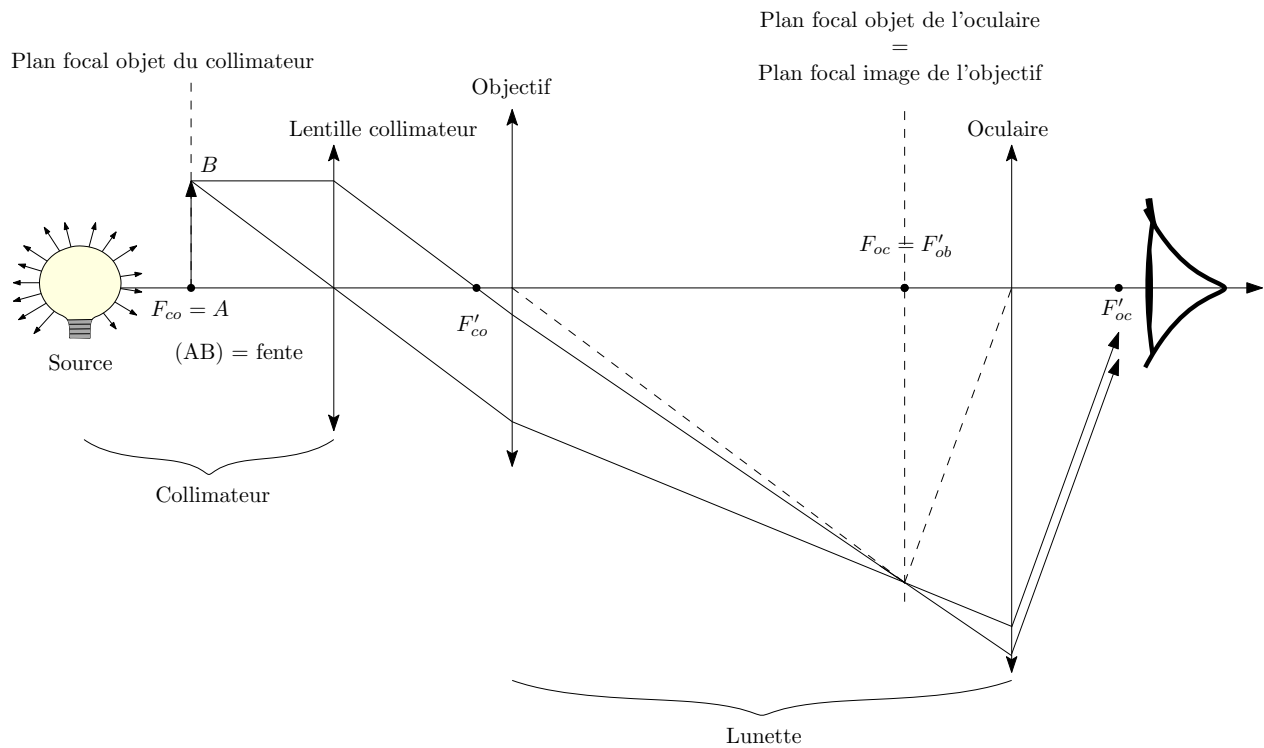
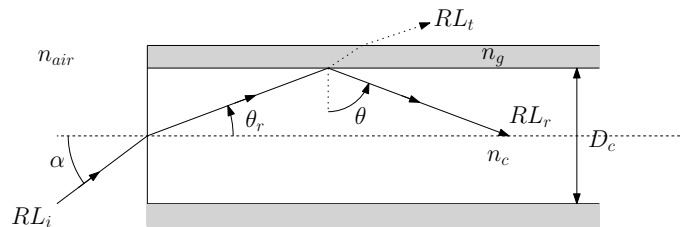


Figure 18 – Réglage du collimateur

1.8 Fibre optique

1.8.1 Cône d'acceptance et ouverture Numérique de la fibre optique

Considérons une fibre optique à saut d'indice et dans la mesure où $D_c \ll \lambda$, un grand nombre de modes peuvent se propager dans la fibre.



✘ D'après les lois de Descartes, on a :

$$n_{\text{air}} \sin \alpha = n_c \sin \theta_r$$

✘ On a de plus :

$$\theta_r + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_r = \frac{\pi}{2} - \theta$$

✘ En prenant $n_{\text{air}} = 1$, on obtient ;

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= n_c \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \sin \alpha &= n_c \cos \theta \end{aligned}$$

✘ Enfin, il existe un angle θ_c au dessus duquel il y a réflexion totale à l'interface coeur-gaine et donc possibilité de propagation guidée dans la fibre :

- ☛ Si $\theta > \theta_c$ La réflexion est totale et propagation dans la fibre
- ☛ Si $\theta < \theta_c$ une partie de l'énergie lumineuse est réfractée dans la gaine de diamètre D_g

✕ L'**angle d'acceptance** est défini comme l'angle pour lequel le rayon est réfracté parallèlement à la gaine :

$$n_c \sin \theta_c = n_g \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta_c = \frac{n_g}{n_c}$$

Si on considère le rayon lumineux provenant de l'extérieur, l'angle critique sera lié à α par la relation suivante :

$$\begin{aligned} n_{\text{air}} \sin \alpha &= n_c \sin \theta_r = n_c \cos \theta & \theta + \theta_r &= \frac{\pi}{2} \\ n_{\text{air}} \sin \alpha &= n_c \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

On a :

$$\sin \theta_c = \frac{n_g}{n_c}$$

Alors l'angle critique θ_c qui correspond à α_{Max} :

$$n_{\text{air}} \sin \alpha_{\text{Max}} = n_c \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} n_{\text{air}} \sin \alpha_{\text{Max}} &= n_c \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} \\ \Rightarrow \sin \alpha_{\text{Max}} &= \sqrt{n_c^2 - n_g^2} \end{aligned}$$

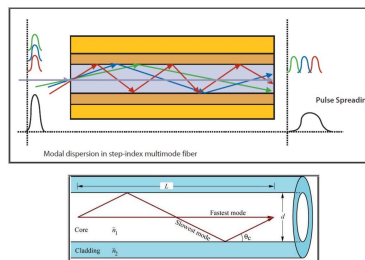
✕ L'**ouverture numérique** est définie comme suit :

$$ON = \sin \alpha_{\text{Max}} = n_c \cos \theta_c$$

✕ Le **cône d'acceptance** est le cône d'ouverture égale à $2\alpha_{\text{Max}}$

1.8.2 Bande passante

Lorsqu'on utilise une fibre multimode, la lumière peut prendre plusieurs chemins (modes) lorsqu'elle se propage dans la fibre. La distance parcourue par certains modes est donc différente de la distance parcourue par d'autres modes. Lorsqu'une impulsion est envoyée dans la fibre, elle se décompose selon les différents modes. Certaines composantes (modes) arrivent donc avant d'autres et l'impulsion s'étale.



✕ Le mode axial, mode fondamental, qui arrive le premier avec une vitesse (v) , parcourt la longueur L en un temps τ_0 .

- ✕ Le mode extrême possède une vitesse ($v \cos \theta$) par rapport au mode fondamental.

$$\tau_l = \frac{L}{\cos \theta_c} \frac{n_c}{c} : \text{ le temps le plus long}$$

- ✕ Ainsi, le mode fondamental qui est le plus rapide arrive le premier à la sortie de la fibre ; ensuite les modes moyens et en derniers le mode extrême qui est le plus lent. La **dispersion modale** correspond à la différence de temps mais entre le mode fondamental et le mode extrême pour arriver au bout de la fibre optique :

$$\Delta \tau_m = \tau_l - \tau_0 = \frac{Ln_c}{c} \left(\frac{1}{\cos \theta_c} - 1 \right)$$

- ✕ En appliquant la loi de Snell-Descartes :

$$\sin \alpha_{\max} = ON = n_c \sin \theta_l$$

ce qui donne :

$$\sin \theta_l = \frac{ON}{n_c}$$

Avec :

$$\cos \theta_l = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_l}$$

et :

$$\cos \theta_l = \left[1 - \left(\frac{ON}{n_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{ON^2}{2n_c^2}$$

$$\cos \theta_l = \left[1 - \left(\frac{ON}{n_c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{ON^2}{2n_c^2}$$

En remplaçant dans l'expression de la dispersion modale :

$$\frac{\Delta \tau_m}{L} = \frac{(ON)^2}{2 \cdot c \cdot n_c}$$

Sachant que :

$$ON = n_c \sqrt{2\Delta}$$

L'expression de la dispersion modale devient :

$$\frac{\Delta \tau_m}{L} \cong \frac{n_c \cdot \Delta}{c}$$

- ✕ **ODG :**

$$\begin{aligned} n_c &= 1.5 & c &= 3.10^8 \text{ km/s} \\ ON &= 0.14 & \frac{\Delta \tau_m}{L} &= \frac{(ON)^2}{2 \cdot c \cdot n_c} = 20 \text{ ns/km} \\ ON &= 0.4 & \frac{\Delta \tau_m}{L} &= \frac{(ON)^2}{2 \cdot c \cdot n_c} = 180 \text{ ns/km} \end{aligned}$$

1.9 Milieu d'indice continument variable : mirage

- ✘ On découpe le milieu en tranches mésoscopiques d'épaisseur dz et d'altitude z . On considère un rayon lumineux incident faisant un angle $i(z)$ avec le dioptre d'altitude z comme indiqué figure 19 :

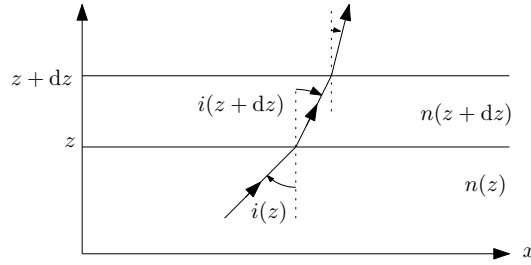


Figure 19 – Modélisation d'un milieu d'indice continument variable (1D)

- ✘ Les lois de Descartes permettent de mettre en évidence un invariant :

$$n(z) \sin [i(z)] = n(z + dz) \sin [i(z + dz)] = Cste$$

Soit, en considérant que pour $x=0$ et $z = z_0$, on a $i(z_0) = i_0$ et $n(z_0) = n_0$:

$$n(z) \sin [i(z)] = n_0 \sin [(i_0)] = Cste = \mathcal{A}$$

- ✘ D'après la figure 19, on a :

$$\tan i(z) = \frac{dx}{dz}$$

Soit :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sin i(z)}{\cos i(z)} = \frac{\sin i(z)}{\sqrt{1 - \sin^2 i(z)}}$$

Soit :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{\mathcal{A}}{n(z)}}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{A}^2}{n(z)^2}}}$$

Soit, en utilisant l'expression de $n(z)$:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{n_0(1 + az_0)}{n_0(1 + az)}}{\sqrt{1 - \frac{n_0^2(1 + az_0)^2}{n_0^2(1 + az)^2}}} = \frac{\frac{(1 + az_0)}{(1 + az)}}{\sqrt{1 - \frac{(1 + az_0)^2}{(1 + az)^2}}}$$

D'où :

$$dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 + az)^2}{(1 + az_0)^2} - 1}} dz \quad (9)$$

- ✘ On pose alors :

$$u = \frac{(1 + az)}{(1 + az_0)} \Rightarrow du = \frac{(a)}{(1 + az_0)} dz$$

On obtient l'équation différentielle vérifiée par u :

$$dx = \frac{1 + az_0}{a} \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du$$

✘ En reconnaissant la dérivée de arccosh et en intégrant, on obtient :

$$[x]_0^x = \frac{1 + az_0}{a} [\operatorname{arccosh}(u)]_{u_0}^{u(x)}$$

Sachant que $u_0 = 1$, on obtient :

$$u(x) = \cosh \left[\frac{a}{1 + az_0} x \right]$$

Soit :

$$z(x) = \frac{1}{a} \left((1 + az_0) \cosh \left[\frac{a}{1 + az_0} x \right] - 1 \right)$$

✘ On peut simplifier cette expression en considérant que $az_0 \ll 1$ et $ax \ll 1$:

$$z(x) \approx \frac{1}{a} \left((1 + az_0) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{1 + az_0} \right)^2 x^2 \right] - 1 \right) \approx z_0 + \frac{ax^2}{2}$$

✘ On retrouve cette expression en développant directement l'équation 9 à l'ordre 1 en az (ou az_0) :

$$dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 + az)^2}{(1 + az_0)^2} - 1}} dz \approx \frac{1}{\sqrt{2a(z - z_0)}} dz$$

D'où :

$$x = \sqrt{\frac{2(z - z_0)}{a}}$$

Soit :

$$z_0 + \frac{ax^2}{2}$$

2 Éclairement et vibration scalaire

SVF

Montrer que l'éclairement sur un écran (ou un capteur quelconque) est proportionnel à la valeur moyenne du carré de la vibration scalaire.

Éclairement et vibration scalaire

✘ La puissance reçue par l'écran (ou le capteur) est proportionnelle⁴ à la moyenne temporelle⁵ du vecteur de Poynting arrivant que la surface du capteur :

$$\mathcal{P} \propto \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$$

Soit, en considérant une incidence quasi-normale :

$$\mathcal{P} \propto \iint_S \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle dS$$

Soit, en considérant une OPPM dans le vide :

$$\mathcal{P} \propto \iint_S \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle dS$$

4. Ce coefficient de proportionnalité tient compte notamment des pertes par réflexion

5. Le temps de réponse des capteurs et de l'œil sont très supérieurs devant la période des signaux optiques

✕ L'éclairement énergétique reçu est donc :

$$\mathcal{E} = \frac{dP}{dS} \propto \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle$$

✕ Par définition et dans le cadre du modèle scalaire de la lumière, la vibration lumineuse sur l'écran est égale à la projection du champ électrique sur un axe de référence. On a donc :

$$\langle \|\vec{E}(M, t)\|^2 \rangle \propto \langle s(M, t)^2 \rangle$$

✕ On a donc :

$$\mathcal{E} = k \langle s(M, t)^2 \rangle$$

✕ Notons enfin que cette éclairement énergétique est souvent assimilé à l'éclairement lumineux et est appelé aussi intensité.

3 Largeur de raie et longueur de cohérence

SVF

Montrer que la longueur de cohérence et la largeur de raie d'une raie d'émission sont liées par :

$$l_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu}$$

Largeur de raie et longueur de cohérence

✕ On considère une raie spectrale de fréquence ν_0 et de largeur :

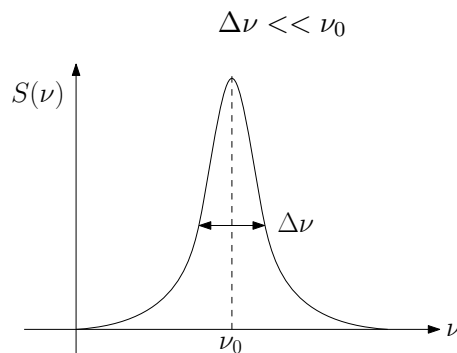


Figure 20 – Profil spectral d'une raie en fonction de ν

☛ Le temps cohérence de la source, assimilé au temps de survie du niveau excité, est relié à l'indétermination de l'énergie E du niveau excité par :

$$\tau_c \times \Delta E \approx h$$

Soit, sachant que $\Delta E = h\Delta\nu$:

$$\tau_c \times \Delta\nu \approx 1 \Rightarrow \tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$$

☛ La longueur de cohérence étant égale à la longueur d'un train d'onde, on a :

$$\ell_c = c\tau_c$$

D'où :

$$\ell_c = \frac{c}{\Delta\nu}$$

- ✘ Si l'on considère que la raie, centrée sur λ_0 , est caractérisée par une largeur $\Delta\lambda$, avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, alors :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \Rightarrow \Delta\nu = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$$

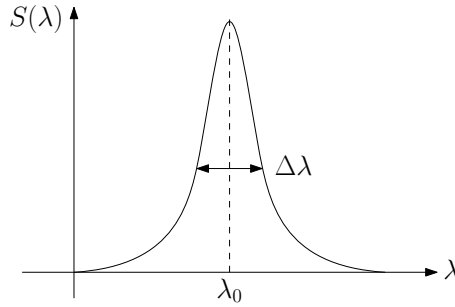


Figure 21 – Profil spectral d'une raie en fonction de λ

- ✘ On en déduit :

$$\tau_c = \frac{c\Delta\lambda_0^2}{\lambda}$$

$$\ell_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

4 Largeur de raie et effet Doppler

SVF

Montrer que la largeur de raie d'une lampe spectrale BP est proportionnelle à $\sqrt{T}$.

Largeur de raie et effet Doppler

- ✘ Soit un atome A émettant un radiation de fréquence ν_0 dans son référentiel barycentrique. Du fait de l'agitation thermique, cet atome se déplace. En notant $\vec{V}$ sa vitesse, on peut exprimer la fréquence perçue par un observateur O fixe dans le référentiel du laboratoire en utilisant les résultats sur l'effet Doppler :

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{\vec{V} \cdot \vec{u}_{AO}}{c}$$

$\vec{u}_{AO}$ étant le vecteur unitaire reliant A et O

- ✘ Sachant que les atomes ont des vitesses dont la direction varie aléatoirement⁶, ce décalage en fréquence peut être positif ou négatif et son ordre de grandeur est donné par l'ordre de grandeur de $\|\vec{V}\|$ c'est à dire la vitesse quadratique v^* :

$$v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

- ✘ On en déduit que le décalage observé en pratique est de la forme :

$$\Delta\nu = 2 \times \nu_0 \frac{v^*}{c}$$

Soit en remplaçant v^* par sa valeur :

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \propto \sqrt{T}$$

6. espace des vitesses isotrope

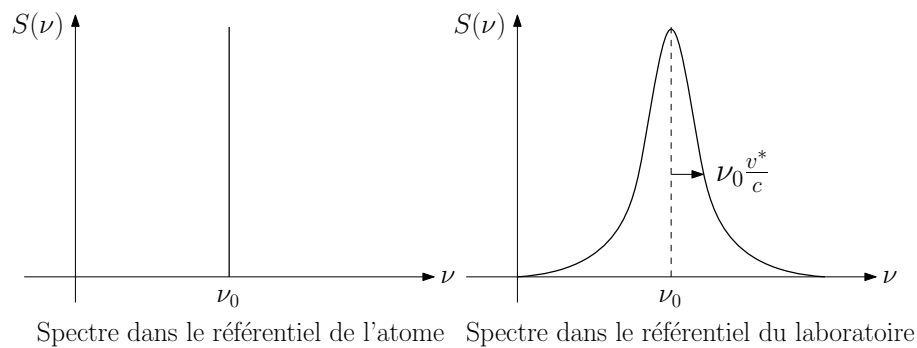


Figure 22 – Élargissement par effet Doppler d'une raie spectrale

5 Largeur de raie et collisions

SVF

Montrer que la largeur de raie d'une lampe spectrale HP est proportionnelle à :

$$\frac{P}{\sqrt{T}}$$

Élargissement collisionnel d'un raie

- ✗ La durée τ d'un train d'ondes dépend du temps moyen entre deux collisions τ_c , lui même lié à la vitesse moyenne de l'atome et à son libre parcours moyen $\langle l \rangle$, qui représente la distance moyenne parcourue par un atome entre deux collisions, avec :

$$\tau_c = \frac{\langle l \rangle}{\langle V \rangle}$$

- ✗ Typiquement, $\langle l \rangle$ varie comme $\frac{1}{n_v}$, où n_v est le nombre de molécules par unité de volume. Dans le cas d'un gaz parfait, on a :

$$n_v = \frac{P}{kT}$$

- ✗ La vitesse moyenne $\langle V \rangle$ varie elle en $\sqrt{T} \Rightarrow$ Ainsi, la durée τ_c entre deux collisions varie comme $\frac{\sqrt{T}}{P}$:

$$\tau_{\text{collisions}} \propto \frac{\sqrt{T}}{P} \text{ et } l_{\text{collisions}} \propto \frac{\sqrt{T}}{P}$$

- ✗ De même, l'écart en longueur d'onde dû à l'effet collisionnel varie comme $\frac{P}{\sqrt{T}}$:

$$\Delta\lambda_{\text{collisions}} \propto \frac{P}{\sqrt{T}}$$

6 Formule de Fresnel

SVF

- ✕ Montrer la formule de Fresnel :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}\cos\varphi$$

En précisant les hypothèses faites et la signification des grandeurs intervenant dans la formule.

- ✕ Établir l'expression du contraste C et montrer que ce contraste est maximal quand $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$.
- ✕ Tracer $\mathcal{E}$ en fonction de φ , on introduira l'ordre d'interférences p . En déduire l'intensité maximale, l'intensité minimale et l'intensité moyenne.
- ✕ Montrer que la formule de Fresnel s'écrit aussi :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_{\text{moy}}(1 + C\cos\varphi)$$

6.1 Formule de Fresnel

- ✕ On considère deux vibrations lumineuses arrivant en un point M de l'espace à un instant t :

$$s_1(M, t) = A_1(M) \cos(\omega_1 t + \varphi_1(M))$$

$$s_2(M, t) = A_2(M) \cos(\omega_2 t + \varphi_2(M))$$

Donnant séparément les éclairagements suivants en M :

$$\mathcal{E}_1(M) = \frac{A_1(M)^2}{2}$$

$$\mathcal{E}_2(M) = \frac{A_2(M)^2}{2}$$

Par additivité des champs, et donc des vibrations lumineuses, on obtient :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = A_1(M) \cos(\omega_1 t + \varphi_1(M)) + A_2(M) \cos(\omega_2 t + \varphi_2(M))$$

- ✕ L'éclairement en M est donc :

$$\mathcal{E}(M) = \langle s^2(M, t) \rangle$$

$$\mathcal{E} = \frac{A_1(M)^2}{2} + \frac{A_2(M)^2}{2} + A_1(M)A_2(M)[\langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle + \langle \cos((\omega_2 + \omega_1)t + \varphi_2(M) + \varphi_1(M)) \rangle]$$

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}[\langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle + \langle \cos((\omega_2 + \omega_1)t + \varphi_2(M) + \varphi_1(M)) \rangle]$$

Le troisième terme de cette équation est un terme supplémentaire appelé terme d'interférences : s'il est positif il y a interférences constructives, si il est négatif il y a interférences destructives et si il est nul il n'y a pas d'interférences.

- ✕ Sachant que le terme $\langle \cos((\omega_2 + \omega_1)t + \varphi_2(M) + \varphi_1(M)) \rangle$ est toujours nul⁷, on obtient :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}\langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle$$

7. Moyenne effectuée sur le temps de réponse des capteurs

- ✘ Une condition nécessaire pour que le terme $\langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle$ soit non nul est :

$$\omega_1 = \omega_2$$

On obtient alors :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}\langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle$$

- ✘ Ainsi, pour que le terme d'interférence soit non nul, il faut que le déphasage entre les deux vibrations soit constant et plus précisément qu'il soit stabilisé pendant la durée d'acquisition du capteur. En supposant cette condition remplie, on obtient :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}\cos(\varphi(M))$$

où :

$$\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$$

- ✘ Cas particulier fréquemment rencontré : $\mathcal{E}_1(M) = \mathcal{E}_2(M) = \mathcal{E}_0(M)$, on obtient donc :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos \varphi(M))$$

6.2 Contraste

- ✘ Le contraste est défini de la manière suivante :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}}$$

- ✘ D'après la formule de Fresnel, on a :

$$\mathcal{E}_{max} = \mathcal{E}(\varphi = 2m\pi) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}$$

$$\mathcal{E}_{min} = \mathcal{E}\left(\varphi = \left(\frac{1}{2} + m\right)2\pi\right) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) - 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}$$

où m est un entier relatif

- ✘ En remplaçant dans l'expression de C , on obtient :

$$C = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}}{\mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)}$$

- ✘ En posant :

$$x = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2(M)}{\mathcal{E}_1(M)}}$$

on obtient :

$$C = \frac{2x}{1+x^2}$$

Le graphe donnant C en fonction de x est le suivant :

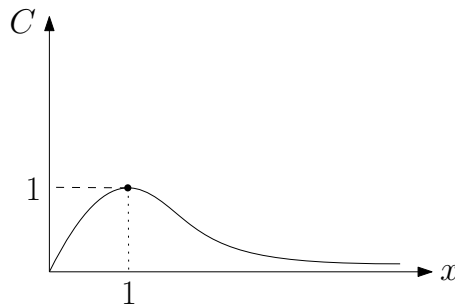


Figure 23 – Contraste en fonction de x

Ainsi, le contraste est maximale pour $x = 1$ c'est à dire pour $\mathcal{E}_1(M) = \mathcal{E}_2(M)$ et vaut alors 1.

6.3 Étude de $\mathcal{E}(M)$

✕ On suppose : $\mathcal{E}_1(M) = \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2(M) = \mathcal{E}_2$, l'éclairement en M s'écrit ainsi :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}\cos\varphi(M)$$

✕ On définit l'ordre d'interférences par :

$$p = \frac{\varphi}{2\pi}$$

✕ Une frange brillante est caractérisée par un ordre d'interférences entier :

$$p = m \in \mathbb{Z}$$

✕ Une frange sombre est caractérisée par un ordre d'interférences demi-entier :

$$p = \frac{1}{2} + m \text{ où } m \in \mathbb{Z}$$

✕ Dans le cas où $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$, on obtient le graphe :

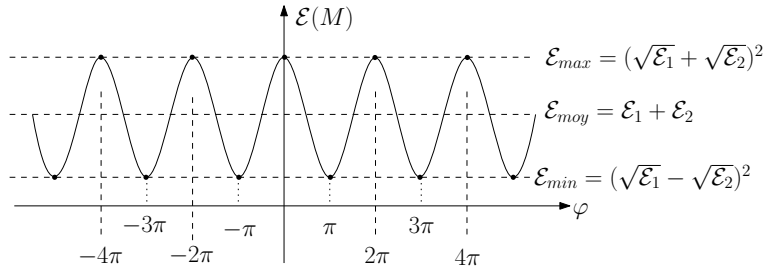


Figure 24

✕ Dans le cas où $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, on obtient le graphe :

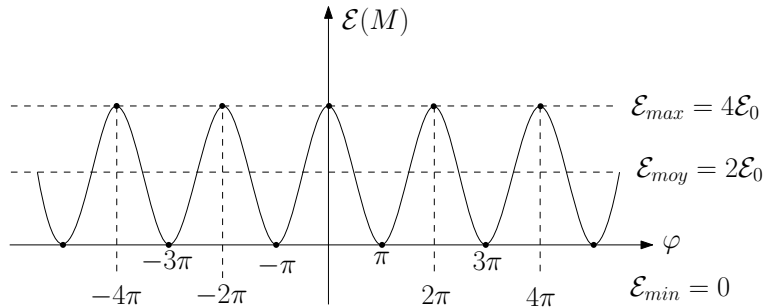


Figure 25

✕ Sachant que :

$$\mathcal{E}_{moy} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

$$C = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}$$

On obtient :

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{moy}$$

$$2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2} = C(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = C\mathcal{E}_{moy}$$

D'où :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}\cos\varphi(M) = \mathcal{E}_{moy}(1 + C\cos\varphi(M))$$

7 Interférences entre deux sources sphériques corrélées

SVF

Soit deux sources sphériques monochromatiques (S_1) et (S_2), corrélées.

- ✗ Montrer que la figure d'interférences est constituée d'hyperboloïdes de révolution.
- ✗ Montrer, que dans la cas où ($S_1 S_2$) est parallèle à l'écran, les franges sont rectilignes. Exprimer la différence de marche arrivant en un point M de l'écran, en déduire l'interfrange.
- ✗ Montrer, que dans la cas où ($S_1 S_2$) est perpendiculaire à l'écran, les franges sont circulaires. Exprimer la différence de marche arrivant en un point M de l'écran, en déduire le rayon du k_{ieme} anneau brillant correspondant à l'ordre d'interférence p :

$$\rho_p = \rho_k = \sqrt{\frac{2\lambda_0 D^2}{a}(p_0 - p)} = \sqrt{\frac{2\lambda_0 D^2}{a}(\varepsilon + (k - 1))}$$

On précisera la signification des différentes grandeurs introduites.

7.1 Hyperboloïdes de révolution

- ✗ Soit deux vibrations lumineuses issues de deux ondes sphériques S_1 et S_2 corrélées arrivant en un point M :

$$s_1(M, t) = \frac{A_{10}}{r_1} \cos(\omega t + \varphi_1(M))$$

$$s_2(M, t) = \frac{A_{20}}{r_2} \cos(\omega t + \varphi_2(M))$$

Avec : $r_1 = S_1 M$ et $r_2 = S_2 M$

- ✗ En considérant que dans le champ d'interférences, les distances varient suffisamment peu ($r_1 \approx Cste$ et $r_2 \approx Cste$) pour que les amplitudes puissent être considérées comme constantes, on obtient :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_2(M)) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(M))$$

Avec :

$$A_1 = \frac{A_{10}}{r_1} \approx Cste$$

$$A_2 = \frac{A_{20}}{r_2} \approx Cste$$

D'où :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi(M))$$

Où :

$$I_1 = \frac{A_1^2}{2}$$

$$I_2 = \frac{A_2^2}{2}$$

$$\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$$

- ✕ Sachant que pour les ondes sphériques, on a :

$$\varphi_1(M) = \varphi(S_1) + kr_1 = \varphi_1 + kr_1$$

$$\varphi_2(M) = \varphi(S_2) + kr_2 = \varphi_2 + kr_2$$

Avec $\omega = kc$, on obtient :

$$\varphi(M) = k(r_2 - r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

- ✕ Les surfaces brillantes vérifiant $\varphi(M) = 2\pi p$ où $p \in \mathbb{Z}$, on obtient alors pour l'équation d'une surface brillante :

$$r_2 - r_1 = Cste$$

Cette équation est l'équation d'une surface hyperboloïde de révolution, d'axe (S_1S_2) , dont les foyers sont les sources (S_1) et (S_2)

7.2 Cas où (S_1S_2) est parallèle à l'écran

- ✕ L'intersection des surfaces hyperboloïdes avec un écran parallèle à (S_1S_2) est constitué de branches d'hyperboles quasi-rectilignes comme représenté figure 26.

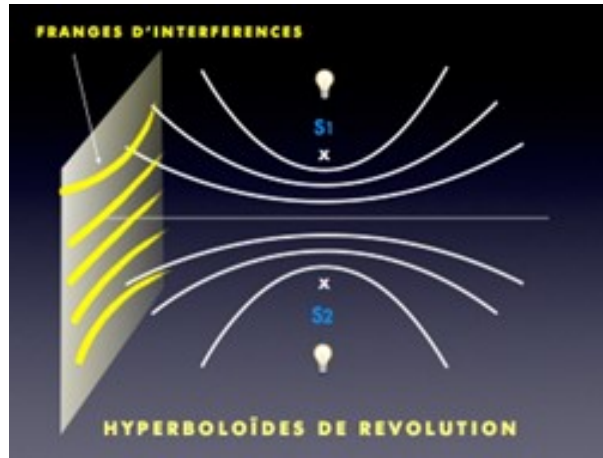


Figure 26 – Intersection des hyperboloïdes avec un écran parallèle à l'axe focal

- ✕ D'après la figure 27, on peut calculer r_1 et r_2 :

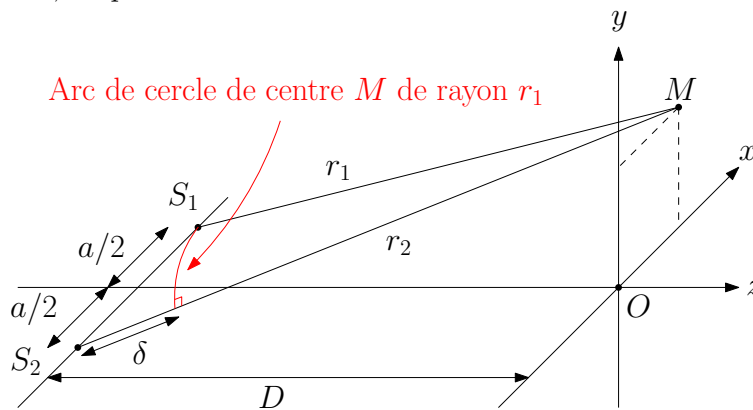


Figure 27 – Calcul de la différence de marche quand (S_1S_2) est parallèle à l'écran

$$r_1 = S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

$$r_2 = S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

✘ Soit, sachant que $D \gg x$, $D \gg y$, $D \gg a$ ⁸ :

$$r_1 = S_1M = D \sqrt{1 + \frac{(x^2 + y^2 + (a/2)^2 - ax)}{D^2}} \approx D \left(1 + \frac{(x^2 + y^2 + (a/2)^2 - ax)}{2D^2}\right)$$

$$r_2 = S_2M = D \sqrt{1 + \frac{(x^2 + y^2 + (a/2)^2 + ax)}{D^2}} \approx D \left(1 + \frac{(x^2 + y^2 + (a/2)^2 + ax)}{2D^2}\right)$$

✘ On en déduit δ :

$$\delta = r_2 - r_1 = \frac{ax}{D}$$

La différence de marche ne dépendant que de x , on obtient bien sur l'écran des franges rectilignes correspondant à $x = Cste$. Noter que dans cette formule, x a pour origine l'intersection de la médiatrice de (S_1S_2) avec l'écran.

✘ Soit une frange brillante repérée par un ordre d'interférence entier $p \in \mathbb{Z}$, la valeur de x correspondant à cette frange vérifie alors :

$$\delta = p\lambda_0 = \frac{ax_p}{D} \Rightarrow x_p = p \frac{\lambda_0 D}{a}$$

✘ L'interfrange étant la distance entre deux franges brillantes, on a alors :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

7.3 Cas où (S_1S_2) est perpendiculaire à l'écran

✘ L'intersection des surfaces hyperboloïdes avec un écran perpendiculaire à (S_1S_2) est constitué de branches d'hyperboles quasi-circulaires comme représenté figure 28.

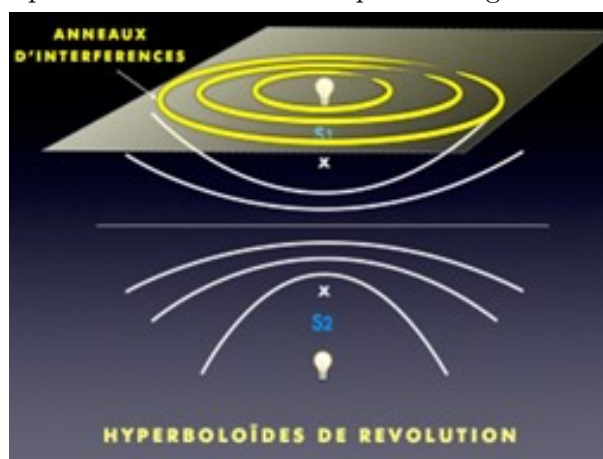


Figure 28 – Intersection des hyperboloïdes avec un écran perpendiculaire à l'axe focal

✘ D'après la figure 29, on peut calculer r_1 et r_2 :

8. Les infiniment petits d'ordre 1 étant : $\left(\frac{x}{D}\right)^2$; $\left(\frac{y}{D}\right)^2$; $\left(\frac{xa}{D^2}\right)$ et $\left(\frac{a}{D}\right)^2$

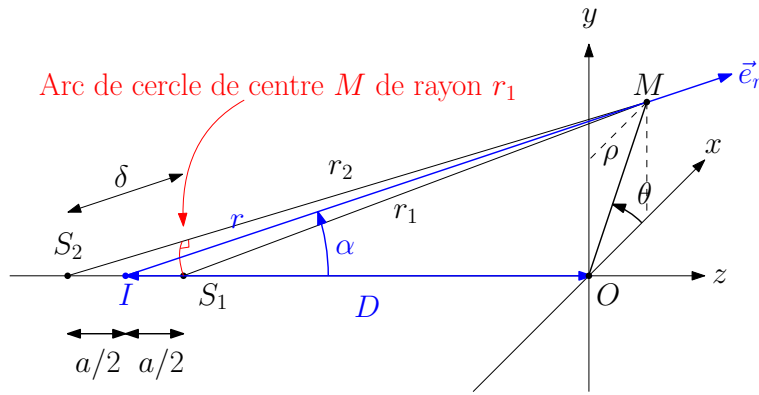


Figure 29 – Calcul de la différence de marche quand (S_1S_2) est perpendiculaire à l'écran

$$r_1^2 = S_1M^2 = (\overrightarrow{S_1I} + \overrightarrow{IM})^2 = \left(-\frac{a}{2}\vec{e}_z + r\vec{e}_r\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 - ar \cos \alpha$$

$$r_2^2 = S_2M^2 = (\overrightarrow{S_2I} + \overrightarrow{IM})^2 = \left(\frac{a}{2}\vec{e}_z + r\vec{e}_r\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 + ar \cos \alpha$$

$$r_1 = r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 - \frac{a}{r} \cos \alpha}$$

$$r_2 = r \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 + \frac{a}{r} \cos \alpha}$$

✘ Soit, sachant que $r \gg a$, en ne gardant que les termes d'ordre 1⁹ :

$$r_1 \approx r \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos \alpha} \approx r \sqrt{1 - \frac{a}{2r} \cos \alpha}$$

$$r_2 \approx r \sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos \alpha} \approx r \sqrt{1 + \frac{a}{2r} \cos \alpha}$$

✘ On en déduit δ :

$$\delta = r_2 - r_1 = a \cos \alpha$$

Soit, sachant que $\alpha \ll 1$:

$$\delta = a \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

✘ Un anneau brillant est caractérisé par l'ordre d'interférence entier $p \in \mathbb{N}$ et par son rayon ρ_p tels que :

$$\rho_p = D \tan \alpha_p \approx \alpha_p D$$

$$\delta = p\lambda_0 = a \left(1 - \frac{\alpha_p^2}{2}\right) \approx a \left(1 - \frac{\rho_p^2}{2D^2}\right)$$

D'où :

$$\rho_p = \sqrt{2D^2 \left(1 - \frac{p\lambda_0}{a}\right)}$$

9. L'infiniment petit d'ordre 1 étant : $\left(\frac{a}{r}\right)$

✘ On introduit alors l'ordre au centre p_0 :

$$p_0 = \frac{a}{\lambda_0}$$

et on obtient :

$$\rho_p = \sqrt{\frac{2\lambda_0 D^2}{a}(p_0 - p)}$$

Ainsi, plus le rayon d'un anneau brillant augmente son ordre diminue : l'ordre est maximal au centre.

✘ L'ordre au centre n'étant a priori pas un entier, on introduit l'excédent fractionnaire ε tel que :

$$p_0 = \lfloor p_0 \rfloor + \varepsilon$$

Ainsi, l'ordre du premier anneau brillant est :

$$p_1 = \lfloor p_0 \rfloor$$

L'ordre du deuxième anneau brillant est :

$$p_2 = p_1 - 1 = \lfloor p_0 \rfloor - 1$$

et l'ordre du k^{eme} anneau brillant vérifie :

$$p_k = \lfloor p_0 \rfloor - (k - 1) = p_0 - \varepsilon - (k - 1) \Rightarrow p_0 - p_k = \varepsilon + (k - 1)$$

D'où :

$$\rho_k = \sqrt{\frac{2\lambda_0 D^2}{a}(\varepsilon + (k - 1))}$$

8 Interférences entre deux ondes OPPM

SVF

Soit deux OPPM, faisant un angle α entre elles, provenant d'une même source primaire et donc corrélées. Montrer que la figure d'interférences est constituée de franges rectilignes et montrer que l'interfrange vaut :

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Interférences entre deux OPPM

✘ Soit deux OPPM provenant de deux sources secondaires corrélées et arrivant en un point M de l'espace :

$$s_1(M, t) = A_1 \exp^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_1(O))}$$

$$s_2(M, t) = A_2 \exp^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi_2(O))}$$

où, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

✘ La vibration résultante est donc :

$$s(M, t) = \exp^{j(\omega t)} \left[A_1 \exp^{-j(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1(O))} + A_2 \exp^{-j(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2(O))} \right]$$

✘ On en déduit l'éclairement en M :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}ss^* = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(M)$$

où :

$$\varphi(M) = \varphi(O) + (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}$$

et :

$$\varphi(O) = \varphi_1(O) - \varphi_2(O)$$

✘ Sachant que :

$$\vec{k}_1 = k \left(\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \vec{e}_z - \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \vec{e}_x \right)$$

$$\vec{k}_2 = k \left(\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \vec{e}_z + \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \vec{e}_x \right)$$

On obtient :

$$\varphi(M) = \varphi(O) + 2k \sin \left(\frac{\alpha}{2} x \right)$$

Soit, en considérant que $\alpha \ll 1$:

$$\varphi(M) = \varphi(O) + k\alpha x$$

✘ Le déphasage ne dépendant que de x , les franges d'interférences sont rectilignes. La position x_p de la frange brillante d'ordre $p \in \mathbb{Z}$ vérifie :

$$\varphi(M) = 2\pi p = \varphi(O) + \frac{2\pi}{\lambda_0} \alpha x_p \Rightarrow x_p = p \left(\frac{\lambda_0}{\alpha} \right) + \frac{\lambda_0}{2\pi} \varphi(O)$$

✘ On obtient alors facilement l'interfrange :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

9 Problème de cohérence spatiale avec des fentes de Young

SVF

On éclaire des fentes de Young avec une fente source de largeur b perpendiculaire aux fentes de Young. Montrer que l'éclairement observé sur un écran éloigné de D du plan des fentes est de la forme :

$$I(M) = 2I_0 (1 + V(b) \cos \varphi)$$

Prévoir qualitativement pour quelle valeur de b le contraste s'annule puis expliciter la fonction $V(b)$.

9.1 Cohérence spatiale sur l'exemple des fentes de Young : critère semi-quantitatif.

✘ On considère des trous de Young éclairés par une fente de largeur b comme représenté figure 30.

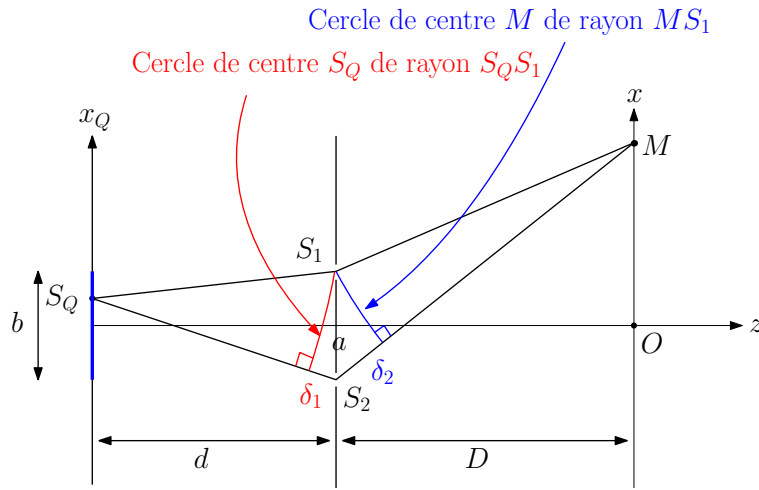


Figure 30

- ✕ Soit un point source S_Q d'ordonnée x_Q , le déphasage entre les deux rayons issus de S_Q arrivant en M est :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{ax_Q}{d} + \frac{ax}{D}$$

- ✕ L'ordre d'interférence en M vaut donc :

$$p = \frac{ax_Q}{d\lambda_0} + \frac{ax}{D\lambda_0}$$

- ✕ On considère qu'il y a brouillage lors que la frange brillante venant du point source en $x_Q = 0$ coïncide avec une frange sombre venant du point source en $x_Q = b/2$. Ceci se traduit par un décalage d'un demi-entier pour les ordres d'interférences :

$$\Delta p = p(x_Q = b/2) - p(x_Q = 0) = \frac{ab}{2d\lambda_0} = m + \frac{1}{2}$$

D'où :

$$b_m = \frac{2d\lambda_0}{a} \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

La première annulation du contraste se produit donc pour :

$$b = \frac{d\lambda_0}{a}$$

et la période des annulations est :

$$\Delta b = \frac{2d\lambda_0}{a}$$

9.2 Cohérence spatiale sur l'exemple des fentes de Young : calcul de l'éclairement.

- ✕ On considère des trous de Young éclairés par une fente de largeur b comme représenté figure 31. Soit une méso-fente en x_Q de largeur dx_Q assimilée à une fente infiniment fine.

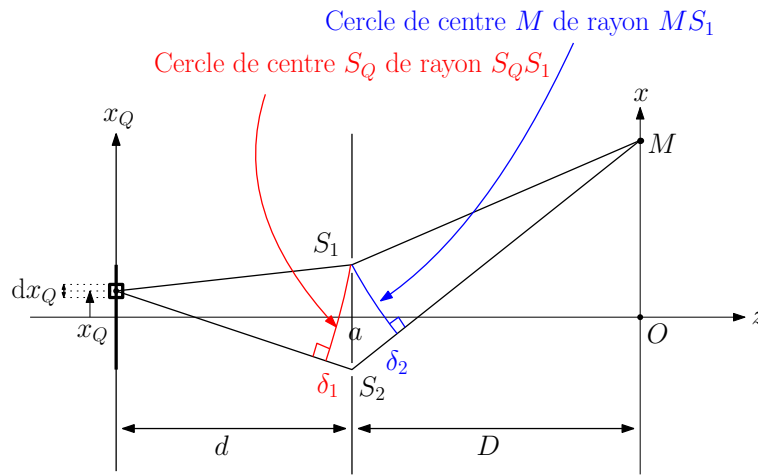


Figure 31 – Décomposition de la fente en méso-fentes

- ✕ Le déphasage entre les deux rayons issus de S_Q arrivant en M est :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{ax_Q}{d} + \frac{ax}{D}$$

- ✕ L'éclairement en M dû à la méso-source est élémentaire :

$$d\mathcal{E} = 2d\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right)$$

où $d\mathcal{E}_0$ est l'éclairement en M lorsqu'une seule des deux sources est ouverte, éclairement proportionnel à dx_Q :

$$d\mathcal{E}_0 = A dx_Q$$

- ✕ En notant $\mathcal{E}_0$ l'éclairement en M dû à toute la fente entière, on peut écrire :

$$\mathcal{E}_0 = \int_{-b/2}^{b/2} A dx_Q = A \times b \Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}_0}{b}$$

- ✕ L'éclairement en M vaut donc :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{2\mathcal{E}_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax_Q}{d} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right] dx_Q$$

D'où :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{2\mathcal{E}_0}{b} \left[x_Q + \frac{\lambda_0 d}{2\pi a} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax_Q}{d} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right]_{x=-b/2}^{d/2}$$

Soit :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{2\mathcal{E}_0}{b} \left[b + \frac{\lambda_0 d}{2\pi a} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ab}{2d} + \frac{ax}{D} \right) \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-\frac{ab}{2d} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right] \right]$$

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \frac{\lambda_0 d}{\pi ab} \sin \left(\frac{2\pi ab}{\lambda_0 2d} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \text{sinc} \left(\frac{2\pi ab}{\lambda_0 2d} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

On a donc une expression du type :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + V(b) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right]$$

où, $V(b)$ est la visibilité :

$$V(b) = \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \frac{ab}{d} \right)$$

Reliée au contraste par :

$$C(b) = |V(b)|$$

- ✘ Si l'on considère que les franges disparaissent lorsque la visibilité s'annule, on obtient les valeurs de b pour lesquelles les franges disparaissent :

$$\frac{\pi}{\lambda_0} \frac{ab_m}{d} = m\pi \Rightarrow b_m = m \frac{\lambda_0 d}{a}$$

La première annulation du contraste se produit donc pour :

$$b = \frac{d\lambda_0}{a}$$

et la période des annulations est :

$$\Delta b = \frac{d\lambda_0}{a}$$

10 Interférences avec un doublet

SVF

Une source primaire, dont le spectre est celui d'un doublet de raies (on note σ_0 le nombre d'onde moyenne du doublet et $\Delta\sigma$ l'écart entre les deux raies), éclaire deux sources secondaires S_1 et S_2 . Montrer que l'éclairement obtenu en un point M du champ d'interférences est de la forme :

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 (1 + V(\delta) \cos(2\pi\delta\sigma_0))$$

Prévoir qualitativement qu'en faisant varier δ on observe un brouillage périodique de la figure d'interférences, puis expliciter la fonction $V(\delta)$.

- ✘ La source, non monochromatique a un spectre composé de deux raies monochromatiques de longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$$

avec : $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ et :

$$\ell_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

- ✘ On peut alors introduire les nombres d'onde associés :

$$\sigma_1 = \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}$$

avec :

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \approx \frac{1}{\lambda_0}$$

$$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\ell_c}$$

10.1 Cohérence temporelle : critère semi-quantitatif dans le cas du doublet

- ✕ Les ordres d'interférences en M liés aux deux longueurs d'ondes sont :

$$p_1 = \delta\sigma_1 = \delta \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right)$$

$$p_2 = \delta\sigma_2 = \delta \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right)$$

- ✕ En considérant qu'il y a brouillage quand la différence entre ces ordres est un demi-entier, on obtient :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m + \frac{1}{2} = \delta\Delta\sigma$$

On obtient les valeurs de δ pour lesquelles il y a brouillage :

$$\delta_m = \frac{m + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \ell_c$$

- ✕ Ainsi, le premier brouillage apparaît pour :

$$\delta = \frac{\ell_c}{2}$$

et la période de brouillage est :

$$\Delta\delta = \ell_c$$

10.2 Cohérence temporelle : calcul de l'éclairement dans le cas du doublet

- ✕ On considère que l'éclairement en M est dû à l'éclairement de deux sources primaires S_{λ_1} et S_{λ_2} de longueurs d'ondes différentes et donc incohérentes entre elles : l'éclairement résultant est donc la somme des éclairements.

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$$

avec :

$$\mathcal{E}_1(M) = 2\mathcal{E}_0 (1 + \cos(2\pi\sigma_1\delta))$$

$$\mathcal{E}_2(M) = 2\mathcal{E}_0 (1 + \cos(2\pi\sigma_2\delta))$$

D'où :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 (2 + \cos(2\pi\sigma_1\delta) + \cos(2\pi\sigma_2\delta))$$

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 (1 + \cos(\pi\Delta\sigma\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta))$$

- ✕ On a donc une expression de l'éclairement de la forme :

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 (1 + V(\delta) \cos(\varphi(M)))$$

- ✕ Sachant que la visibilité tend vers 1 quand la source devient cohérente, et donc ici quand $\delta\sigma$ tend vers 0, on identifie facilement la visibilité et le phase $\varphi(M)$:

$$V(\delta) = \cos(\pi\Delta\sigma\delta) = \cos\left(\frac{\pi\delta}{\ell_c}\right)$$

$$\varphi(M) = 2\pi\sigma_0\delta = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

- ✕ La première annulation de la visibilité et donc du contraste est donc pour :

$$\delta = \frac{\ell_c}{2}$$

On a de plus, en fonction de δ une disparition périodique des franges avec comme période :

$$\Delta\delta = \ell_c$$

11 Interférences avec une source de profile spectral rectangulaire

SVF

Une source primaire, dont le spectre est rectangulaire (on note σ_0 le nombre d'onde moyenne et $\delta\sigma$ la largeur de la raie), éclaire deux sources secondaires S_1 et S_2 . Montrer que l'éclairement obtenu en un point M du champ d'interférences est de la forme :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 (1 + V(\delta) \cos(2\pi\delta\sigma_0))$$

Prévoir qualitativement pour quelle valeur de δ on observe un brouillage de la figure d'interférences, puis expliciter la fonction $V(\delta)$.

- ✘ La source, non monochromatique a un spectre rectangulaire compris entre les longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$$

avec : $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ et :

$$\ell_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

- ✘ On peut alors introduire les nombres d'onde associés :

$$\sigma_1 = \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}$$

avec :

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \approx \frac{1}{\lambda_0}$$

$$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\ell_c}$$

11.1 Cohérence temporelle : critère semi-quantitatif dans le cas d'un profil rectangulaire

- ✘ Les ordres d'interférences en M liés aux deux longueurs d'ondes extrêmes sont :

$$p_1 = \delta\sigma_1 = \delta \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right)$$

$$p_2 = \delta\sigma_2 = \delta \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right)$$

- ✘ En considérant qu'il y a brouillage quand la différence entre ces ordres est un demi-entier, on obtient :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m + \frac{1}{2} = \delta\Delta\sigma$$

On obtient les valeurs de δ pour lesquelles il y a brouillage :

$$\delta_m = \frac{m + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \ell_c$$

- ✘ Ainsi, le premier brouillage apparaît pour :

$$\delta = \frac{\ell_c}{2}$$

et la période de brouillage est :

$$\Delta\delta = \ell_c$$

11.2 Cohérence temporelle : calcul de l'éclairement dans le cas du doublet

- ✘ On décompose la source en sources élémentaires monochromatiques de nombre d'onde σ et de largeur $d\sigma$.
- ✘ L'éclairement en M dû à la méso-source de nombre σ lorsque une seule des deux sources secondaires est allumée est proportionnel à $d\sigma$:

$$dI_0 = A d\sigma$$

- ✘ En intégrant sur le spectre de la source, on doit retrouver l'éclairement en M lorsque une seule source secondaire est allumée :

$$I_0 = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} A d\sigma = A \Delta\sigma \Rightarrow A = \frac{I_0}{\Delta\sigma}$$

- ✘ On considère que l'éclairement en M est dû à l'éclairement de deux sources primaires S_{λ_1} et S_{λ_2} de longueurs d'ondes différentes et donc incohérentes entre elles : l'éclairement résultant est donc la somme des éclairements.

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$$

avec :

$$\mathcal{E}_1(M) = 2\mathcal{E}_0 (1 + \cos(2\pi\sigma_1\delta))$$

$$\mathcal{E}_2(M) = 2\mathcal{E}_0 (1 + \cos(2\pi\sigma_2\delta))$$

D'où :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 (2 + \cos(2\pi\sigma_1\delta) + \cos(2\pi\sigma_2\delta))$$

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 (1 + \cos(\pi\Delta\sigma\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta))$$

- ✘ On a donc une expression de l'éclairement de la forme :

$$\mathcal{E}(M) = 4\mathcal{E}_0 (1 + V(\delta) \cos(\varphi(M)))$$

- ✘ Sachant que la visibilité tend vers 1 quand la source devient cohérente, et donc ici quand $\delta\sigma$ tend vers 0, on identifie facilement la visibilité et le phase $\varphi(M)$:

$$V(\delta) = \cos(\pi\Delta\sigma\delta) = \cos\left(\frac{\pi\delta}{\ell_c}\right)$$

$$\varphi(M) = 2\pi\sigma_0\delta = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

- ✘ La première annulation de la visibilité et donc du contraste est donc pour :

$$\delta = \ell_c$$

On a de plus, en fonction de δ une disparition périodique des franges avec comme période :

$$\Delta\delta = \ell_c$$

12 Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

SVF

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air d'épaisseur e .

- ✗ Dans le cas où l'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle monochromatique, montrer que les interférences sont non localisées et que les franges observées en sortie sont des anneaux.
- ✗ Dans le cas où l'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique, montrer que les interférences sont localisées. Proposer un montage permettant d'observer les franges avec un contraste maximal et montrer que la différence de marche entre deux rayons arrivant en un point M de l'écran est de la forme : $\delta = 2e \cos i$. On précisera la signification de l'angle i .
- ✗ On dispose d'une diode LASER dont on souhaite étudier le spectre. A l'aide d'un capteur, placé au centre du dispositif de sortie, on obtient le spectre donné par la figure ci-dessous. Caractérisez ce spectre.

12.1 Interféromètre réglé en lame d'air éclairé par une source monochromatique ponctuelle

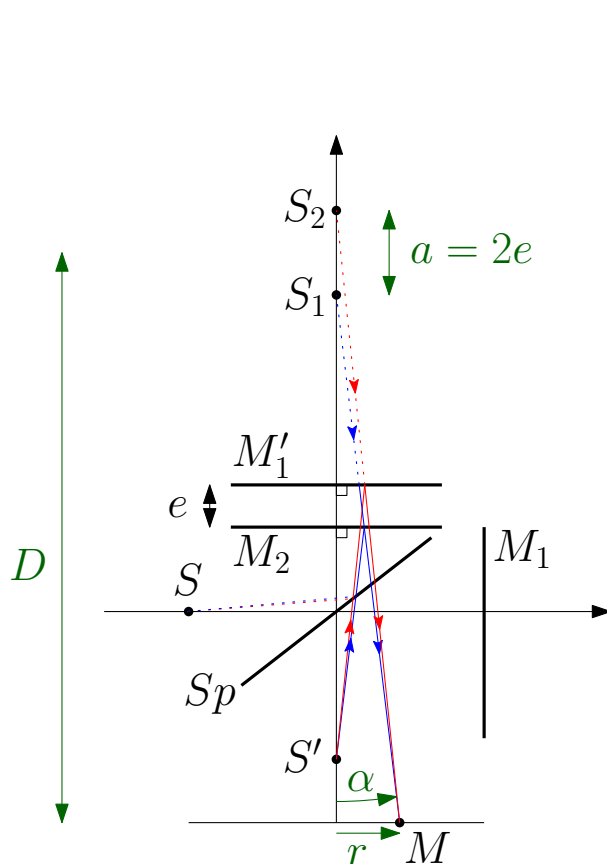


Figure 32 – Interférences par division du front d'onde pour un Michelson réglé en lame d'air

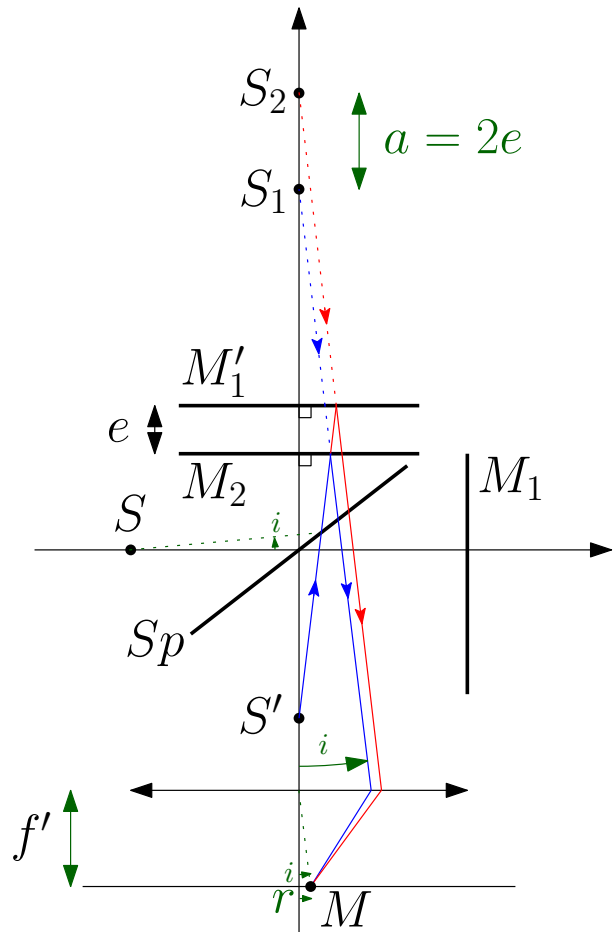


Figure 33 – Interférences par division d'amplitude pour un Michelson réglé en lame d'air : l'angle d'incidence i détermine la position du point M sur l'écran où interfèrent les 2 rayons lumineux émergents

- ✕ On se place dans le cas d'interférences par **division du front d'onde** comme indiqué figure 32. ($S_1 S_2$) étant perpendiculaire à l'écran, on observe des franges circulaires avec :

$$\delta = a \cos \alpha \approx a \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \approx a \left(1 - \frac{r^2}{2D^2} \right)$$

On peut en déduire du rayon brillant d'ordre $p \in \mathbb{N}$:

$$\rho_p = \sqrt{2D^2 \left(1 - \frac{p\lambda_0}{a} \right)}$$

et le rayon du k^{eme} anneau compté à partir du centre :

$$\rho_k = \sqrt{\frac{2\lambda_0 D^2}{a} (\varepsilon + (k - 1))}$$

où ε est l'excédent fractionnaire.

- ✕ On se place dans le cas d'interférences par **division d'amplitude** comme indiqué figure 33. ($S_1 S_2$) étant perpendiculaire à l'écran et les rayons émergents étant parallèles, on observe des franges circulaires à l'infini : pour les étudier on les observe dans le plan focal image d'une lentille convergente.

$$\delta = a \cos i \approx a \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \approx a \left(1 - \frac{r^2}{2f'^2} \right)$$

Ainsi, la différence de marche entre les rayons lumineux qui interfèrent en M ne dépend que de l'angle d'incidence i .

On peut en déduire du rayon brillant d'ordre $p \in \mathbb{N}$:

$$\rho_p = \sqrt{2f'^2 \left(1 - \frac{p\lambda_0}{a} \right)}$$

et le rayon du k^{eme} anneau compté à partir du centre :

$$\rho_k = \sqrt{\frac{2\lambda_0 f'^2}{a} (\varepsilon + (k - 1))}$$

où ε est l'excédent fractionnaire.

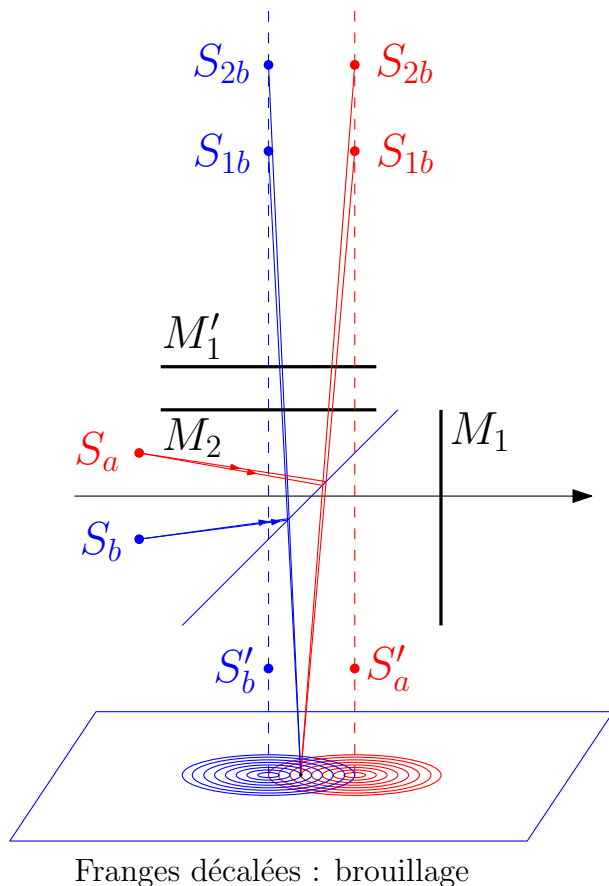
- ✕ Ainsi, dans les deux cas, on observe des interférences avec un contraste maximal et ce quelque soit la position de l'écran (pourvu qu'il soit placé dans le champ d'interférences) : les interférences sont non localisées.

12.2 Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source étendue

- ✕ Dans le cas d'un interféromètre de Michelson **réglé en lame d'air éclairé par une source étendue**, on montre qu'il y a **brouillage en observant la figure d'interférences à distance finie** en réalisant le schéma suivant¹⁰ :

10. C'est une preuve suffisante

- ✕ Dans le cas d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source étendue, les interférences par division d'amplitude permettent d'observer des interférences avec un contraste maximale, autrement dit : **les figures d'interférences des différents points sources de la source primaire étendue coïncident parfaitement à l'infini.**



Franges décalées : brouillage

Figure 34 – Lamme d'air : Brouillage dans le cas d'une source étendue et une observation à distance finie (division du front d'onde)

En effet :

- Si l'on considère deux sources ponctuelles de la source étendue envoyant chacune un seul rayon lumineux (division d'amplitude) alors pour que les paires de rayons lumineux émergents arrivent en un même point M sur l'écran, il faut qu'ils correspondent au même angle d'incidence i .
- La différence de marche entre les rayons lumineux issus d'un point source ne dépendant que de i , on en déduit que les ordres d'interférences des différentes paires de rayons lumineux arrivant en M seront toujours les mêmes : les figures d'interférences coïncident.

La différence de marche entre les différentes paires de rayons lumineux arrivant en M est alors :

$$\delta = a \cos i = 2e \cos i$$

Le rayon de l'anneau brillant d'ordre $p \in \mathbb{N}$ est alors :

$$\rho_p = \sqrt{2D^2 \left(1 - \frac{p\lambda_0}{a}\right)}$$

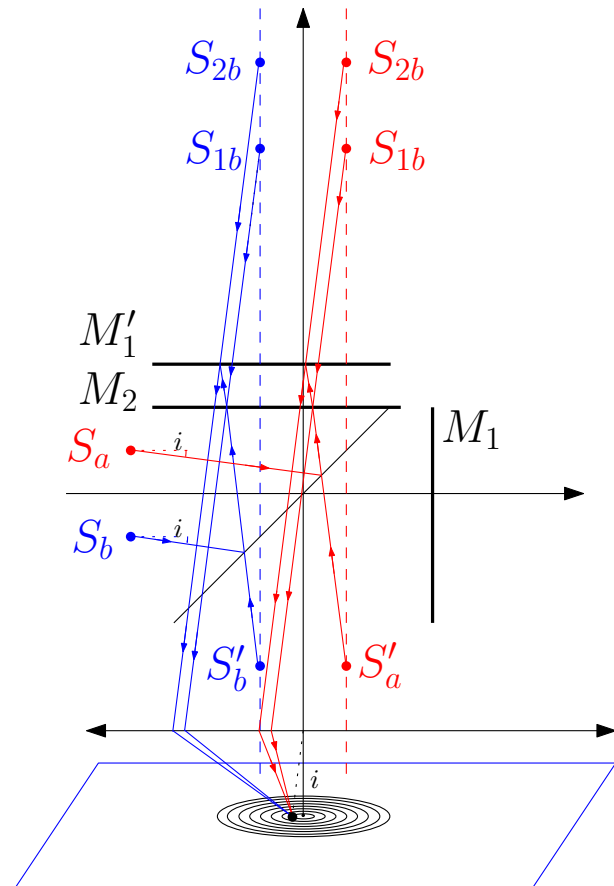


Figure 35 – Lamme d'air : Coïncidence des figures d'interférences à l'infini (division d'amplitude) dans le cas d'une source étendue

et le rayon du k^{eme} anneau compté à partir du centre :

$$\rho_k = \sqrt{\frac{2\lambda_0 D^2}{a} (\varepsilon + (k-1))}$$

où ε est l'excédent fractionnaire.

✖ **IMPORTANT : Calcul direct de la différence de marche (sans passer par les sources ponctuelles)**

- ☛ Sachant que, quelque soit le point source, seul l'angle d'incidence intervient pour le calcul de la différence de marche, on utilise la représentation donnée par la figure 36 :

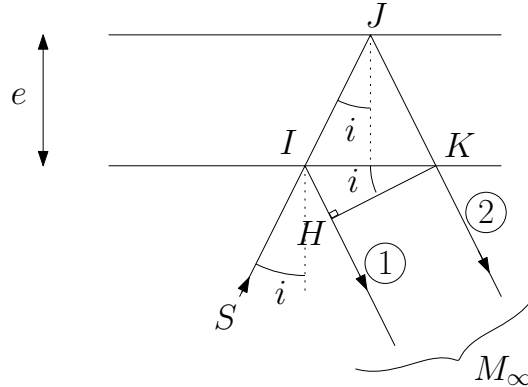


Figure 36 – Calcul direct de la différence de marche

- ☛ La différence de marche entre les deux rayons lumineux émergents est :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (IM)_2 - (IM)_1 = [(IJ) + (JK) + (KM)] - [(IH) + (HM)]$$

- ☛ D'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus (M est considéré comme un point source), on a : $(MH) = (MK)$ et d'après les lois sur la réflexion on a : $(IJ) = (JK)$. On obtient donc :

$$\delta = 2IJ - IH$$

- ☛ Les relations trigonométriques reliant i et les différentes distances sont :

$$\cos i = \frac{e}{IJ} \text{ et } \tan i = \frac{IK/2}{e} \text{ et } \sin i = \frac{IH}{IK}$$

D'où :

$$IJ = \frac{e}{\cos i}$$

$$IH = \sin i \times IK = \sin i \times 2e \tan i = \frac{2e \sin^2 i}{\cos i}$$

Soit :

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} - 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} = 2e \cos i$$

12.3 Spectre d'une diode LASER

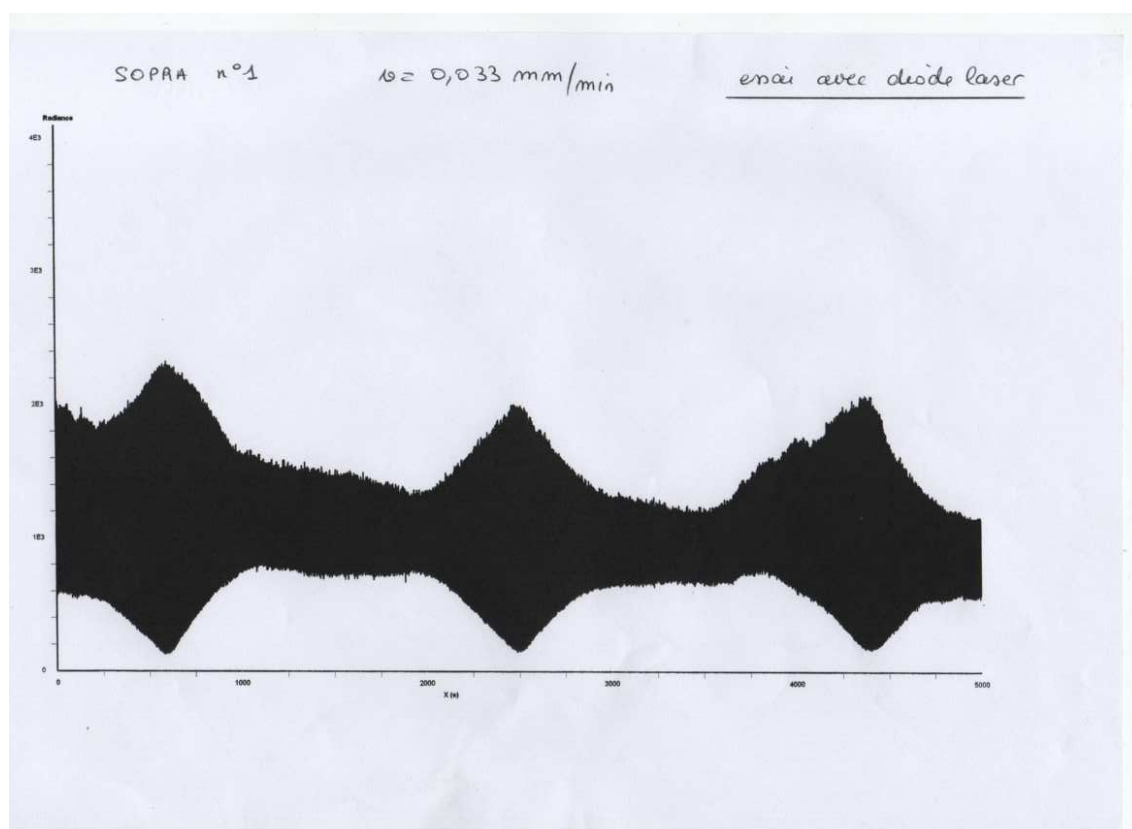


Figure 37 – Spectre de la diode LASER

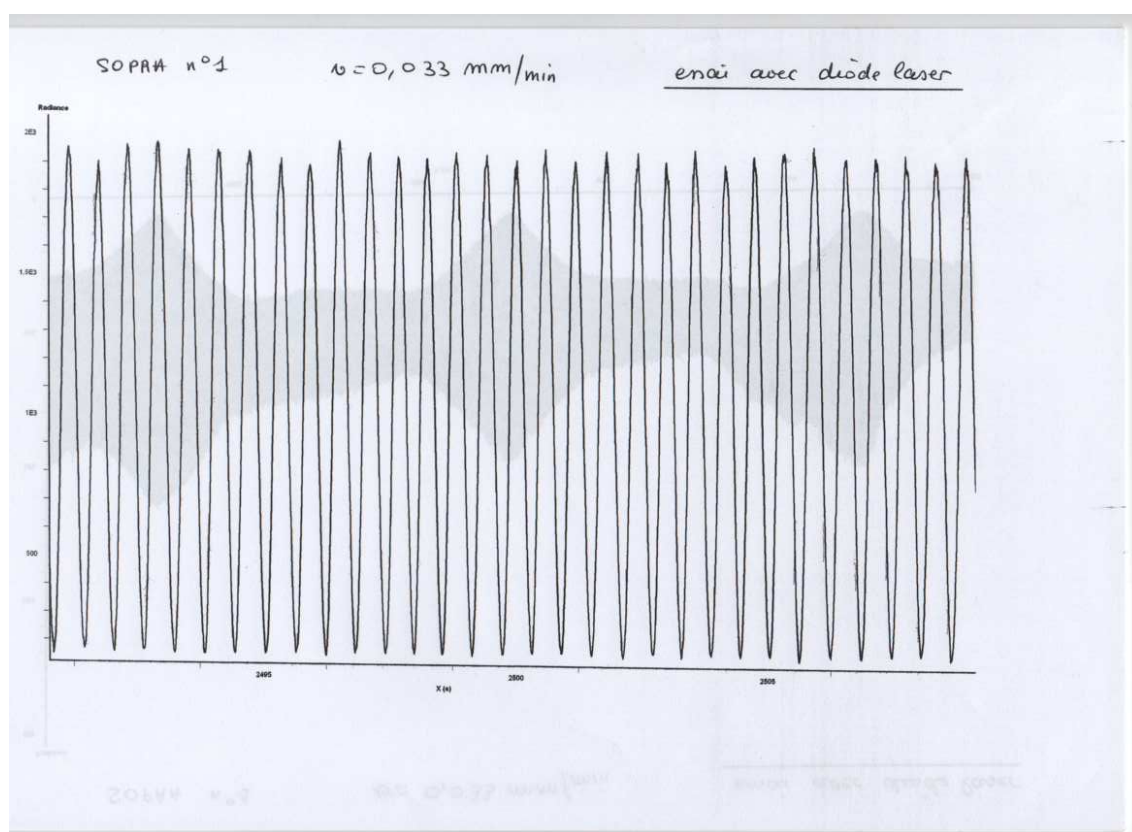


Figure 38 – Zoom sur le spectre de la diode LASER

Les modes longitudinaux d'une diode LASER correspondent aux fréquences présentes dans le spectre

d'une diode LASER présentant un profil Gaussien. Ces fréquences sont distantes les unes des autres d'une même quantité appelée intervalle spectrale libre et dépendant la longueur de la cavité (L) et de l'indice (n). On suppose que seule trois raies sont présentes sous le profil gaussien.

$$\Delta\nu = \frac{2c}{nL}$$

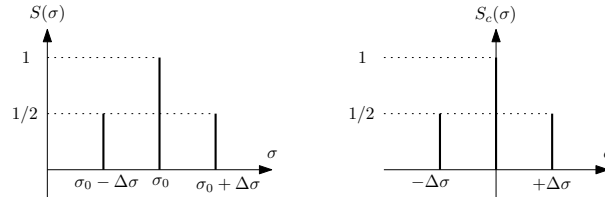


Figure 39

Calcul de l'éclairement

En supposant que seules trois raies apparaissent sous le profil gaussien, on modélise le spectre de la diode LASER de la façon suivante :

$$S(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0) + \frac{1}{2}\delta(\sigma - (\sigma_0 + \Delta\sigma)) + \frac{1}{2}\delta(\sigma - (\sigma_0 - \Delta\sigma))$$

Ces trois fréquences étant indépendantes, et en tenant compte du rapport des éclairements, on obtient l'éclairement suivant :

$$I(\delta) = 2I_0(1 + \cos(2\pi\delta\sigma_0)) + I_0(1 + \cos(2\pi\delta(\sigma_0 + \Delta\sigma))) + I_0(1 + \cos(2\pi\delta(\sigma_0 - \Delta\sigma)))$$

Soit :

$$I(\delta) = 4I_0 + I_0 [2 \cos(2\pi\delta\sigma_0) + \cos(2\pi\delta(\sigma_0 + \Delta\sigma)) + \cos(2\pi\delta(\sigma_0 - \Delta\sigma))]$$

D'où :

$$I(\delta) = 4I_0 [1 + V(\delta) \cos(2\pi\delta\sigma_0)]$$

Avec :

$$V(\delta) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2\pi\delta\Delta\sigma]$$

Obtention du relevé

On effectue les interférences à deux ondes à l'aide d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air :

- ✗ Pour le réglage du Michelson voir COURS.
- ✗ On mesure l'éclairement au centre : la différence de marche entre les deux rayons lumineux qui interfèrent au centre est $\delta = 2e$, où e est l'épaisseur de la lame d'air équivalente.
- ✗ On branche l'un des miroirs sur un dispositif de chariotage à vitesse constante de façon à ce que l'épaisseur de la lame d'air équivalente varie en fonction du temps selon la relation :

$$e(t) = V \times t$$

Où V est la vitesse de chariotage.

- ✗ L'éclairement mesuré, fonction au départ de δ est maintenant fonction du temps grâce à la relation :

$$\delta(t) = 2Vt$$

En tenant compte du profil spectral de la diode, et d'après le calcul de la visibilité, on obtient un éclaircissement donné par la figure 40.

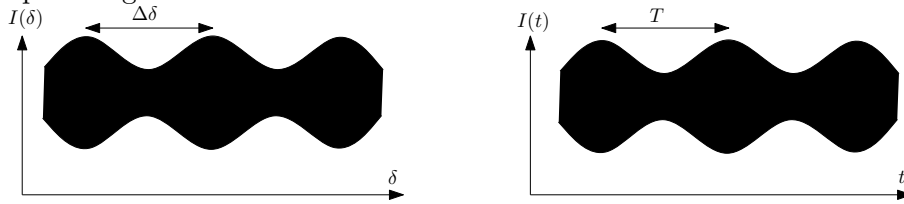


Figure 40

La période des battements observés est :

✕ Période de la différence de marche, d'après l'expression de la visibilité) : $\Delta\delta = \frac{1}{\Delta\sigma}$.

✕ Période temporelle : $T = \frac{1}{2\Delta\sigma V}$.

Le principe de la mesure est donc le suivant : grâce au chronogramme obtenu ($I(t)$), on détermine T et on en déduit $\Delta\sigma$.

Mesure de la vitesse du Michelson

✕ Principe :

Lorsque l'on zoom sur le chronogramme obtenu, on obtient les oscillations caractéristiques des interférences à deux ondes (sur ce laps de temps très court, la visibilité est considérée comme constante), comme représenté figure 41.

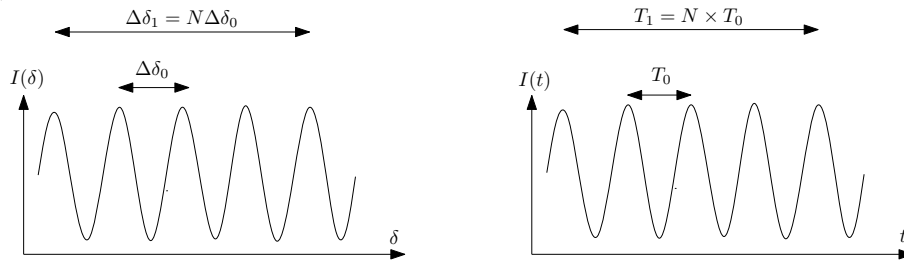


Figure 41

Au cours d'une oscillation, le chemin optique varie de : $\Delta\delta_0 = \lambda_0 = \frac{1}{\sigma_0}$, avec $\Delta\delta_0 = 2VT_0$. On en déduit, l'expression de V :

$$V = \frac{\lambda_0}{2T_0} = \frac{1}{2\sigma_0 T_0}$$

Pour plus de précisions, on mesure le temps T_1 correspondant à N oscillations, on a alors :

$$\Delta\delta_1 = 2VT_1 = N\lambda_0 = \frac{N}{\sigma_0}$$

D'où :

$$V = \frac{\lambda_0 N}{2T_1}$$

✕ Exemple de mesure (d'après relevé) :

Calcul d'incertitude :

$$V = \frac{\lambda_0 N}{2T_1} \Rightarrow dV = \frac{\lambda_0 N}{2} \left(-\frac{1}{T_1^2} dT_1 \right)$$

$$u_V = \frac{\lambda_0 N}{2T_1^2} u_{T_1}$$

Estimation de l'incertitude sur T_1 dans le cas de la lecture sur papier :

On mesure sur le papier la longueur Δx correspondant au temps T_1 et on utilise le facteur d'échelle α pour en déduire T_1 :

$$T_1 = \alpha \Delta x \text{ et } u_{T_1} = \alpha u_{\Delta x}$$

Exemple de calculs (d'après relevé)

$$N = 38; \lambda_0 = 648 \text{ nm}; \Delta x = 23.5 \text{ cm}; u_{\Delta x} = 0.1 \text{ cm}; \alpha = 0.97 \text{ s} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$T_1 = 22.7 \text{ s} \Rightarrow V = 0.54 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 32.5 \mu\text{m} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$u_{T_1} = 0.1 \text{ s} \Rightarrow u_V = 0.01 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.7 \mu\text{m} \cdot \text{mn}^{-1}$$

D'où :

$$V = 0.54 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 32.5 \mu\text{m} \cdot \text{mn}^{-1} \text{ et } u_V = 0.01 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.7 \mu\text{m} \cdot \text{mn}^{-1}$$

Détermination de l'intervalle spectrale libre

✖ **Principe** On mesure T et, connaissant V , on en déduit $\Delta\sigma$:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2VT}$$

✖ **Incertitudes sur la mesure de $\Delta\sigma$**

$$\frac{d\Delta\sigma}{\Delta\sigma} = \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T}$$

$$\frac{u_{\Delta\sigma}}{\Delta\sigma} = \sqrt{\left(\frac{u_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{u_T}{T}\right)^2}$$

✖ **Exemple de mesure (d'après relevé)**

On mesure sur le papier la longueur Δx correspondant au temps T et on utilise le facteur d'échelle α pour en déduire T :

$$T = \alpha \Delta x \text{ et } u_T = \alpha u_{\Delta x}$$

✖ **Exemple de calculs (d'après relevé)**

$$\Delta x = 9.0 \text{ cm}; u_{\Delta x} = 0.1 \text{ cm}; \alpha = 207 \text{ s} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$T = 1860 \text{ s} \Rightarrow \Delta\sigma = 498 \text{ m}^{-1}$$

$$u_T = 21 \text{ s} \Rightarrow u_{\Delta\sigma} = 11 \text{ m}^{-1}$$

On peut alors en déduire :

$$\Delta\lambda = \lambda_0^2 \Delta\sigma = 0.21 \text{ nm}$$

$$\Delta\nu = c \Delta\sigma = 0.15 \text{ THz}$$

$$nL = \frac{c}{2\Delta\nu} = \frac{1}{2\Delta\sigma} = 1.00 \text{ mm}$$

Soit, sachant que $n \approx 3.5$, $L = 288 \mu\text{m}$.

13 Michelson réglé en coin d'air

SVF

Le Michelson est réglé en coin d'air d'angle α .

- ✗ Dans le cas où l'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle monochromatique, montrer que les interférences sont non localisées et que les franges observées en sortie sont rectilignes.
- ✗ Dans le cas où l'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique, montrer que les interférences sont localisées. Proposer un montage permettant d'observer les franges avec un contraste maximal et montrer que la différence de marche entre deux rayons arrivant en un point M de l'écran est de la forme :

$$\delta = 2\alpha x$$

On précisera la signification de x .

- ✗ La source est une lumière blanche. On remplace l'écran de sortie par une fente que l'on place à l'ordre zéro de la figure d'interférence et on place sur un des bras du Michelson une lame d'épaisseur e et d'indice n connu. On place un spectromètre derrière la fente, le spectre obtenu est donné ci dessous :

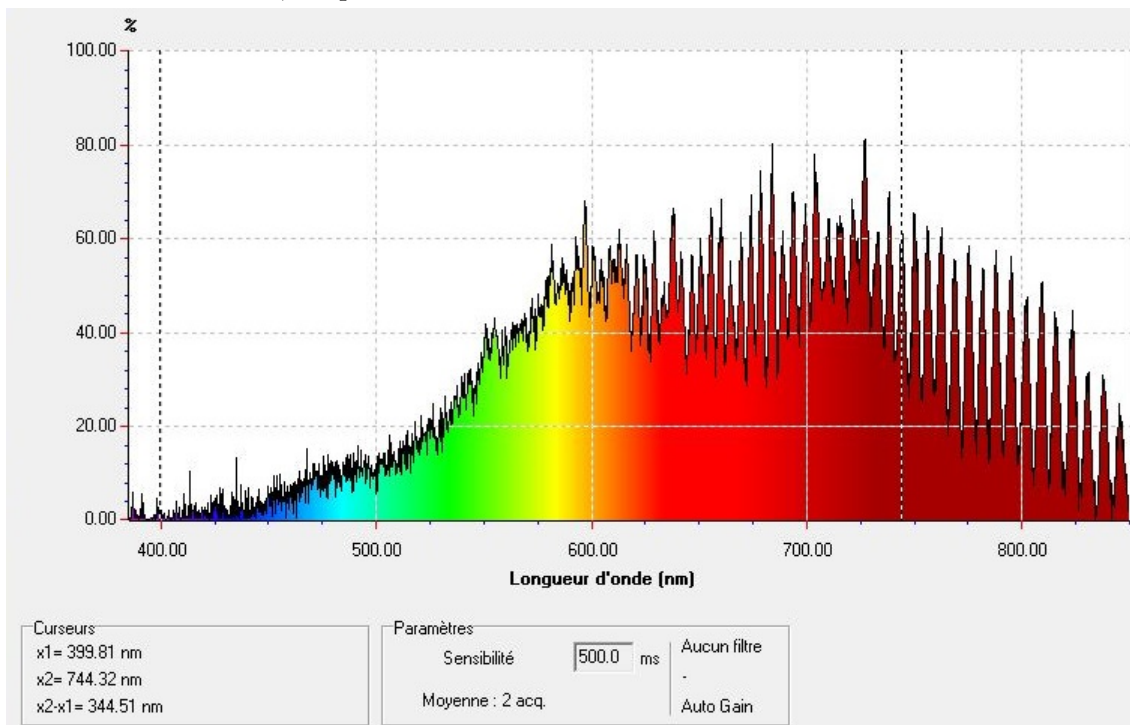


Figure 42 – Spectre de la lumière passant par la fente

Déterminer l'épaisseur de la lame de deux manières.

13.1 Interféromètre réglé en lame d'air éclairé par une source monochromatique ponctuelle

- ✗ On se place dans le cas d'interférences par division du front d'onde comme indiqué figure 43. Les deux sources secondaires étant parallèles à l'écran, on observe des franges rectilignes et par analogie

avec les fentes de Young, on peut écrire :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

L'interfrange étant :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

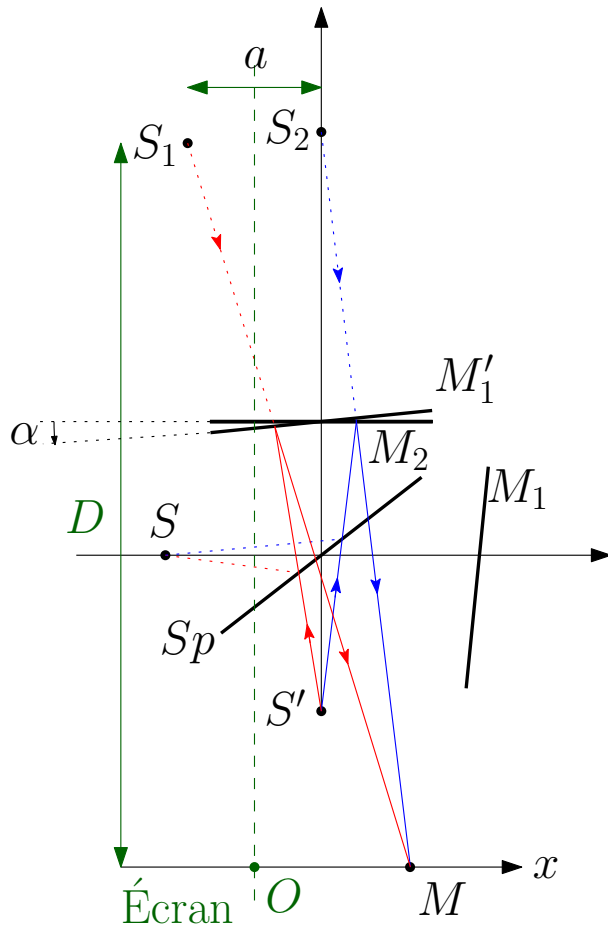


Figure 43 – Interférences par division du front d'onde pour un Michelson réglé en coin d'air

- ✗ On se place dans le cas d'interférences par division d'amplitude (sous incidence quasi-normale) comme indiqué figure 44. Par analogie avec les interférences entre deux OPDM et sachant que l'angle entre les rayons lumineux émergents est de 2α , on peut écrire la différence de marche :

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2\alpha x$$

Les franges d'interférences sont donc rectilignes et l'interfrange vaut :

$$\delta = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

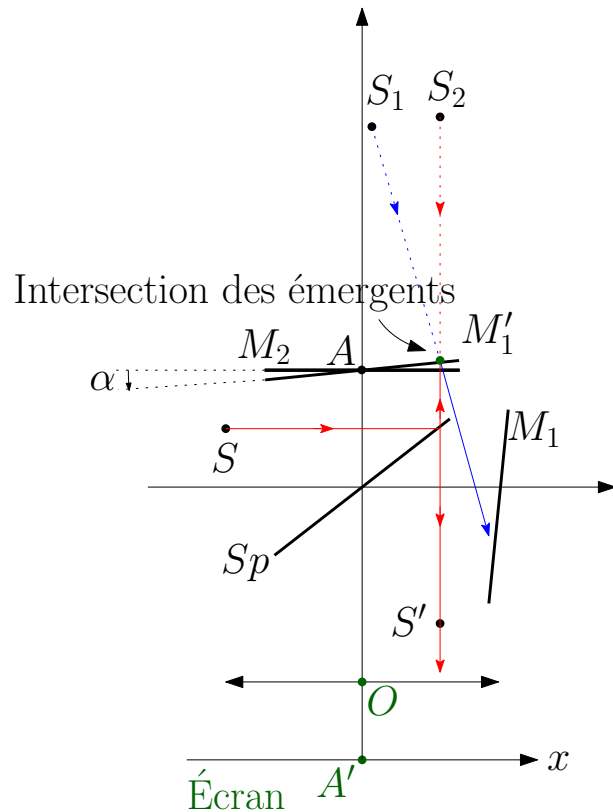


Figure 44 – Interférences par division d'amplitude pour un Michelson réglé en coin d'air

13.2 Interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source étendue

- ✗ Dans le cas d'un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air éclairé par une source étendue, on montre qu'il y a brouillage en observant la figure d'interférences à la sortie de l'interféromètre, sans dispositif géométrique approprié, en réalisant le schéma suivant :

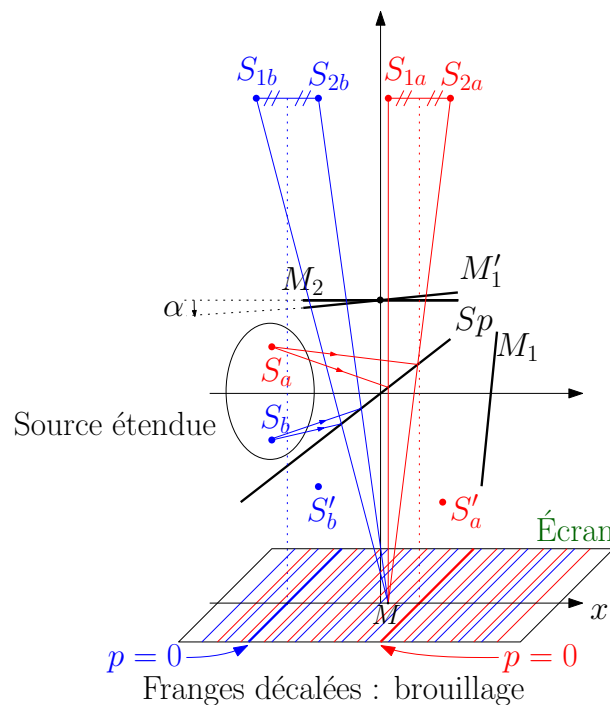


Figure 45 – Coin d'air : Brouillage dans le cas d'une source étendue et une observation en sortie du Michelson sans lentille (division du front d'onde)

- ✗ Dans le cas d'un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source étendue, sous incidence quasi normale, les interférences sont localisées à proximité des miroirs.

En effet :

- Dans ce cas là l'intersection des émergents se situe au voisinage de M_1 et M_2 comme représenté figure 46.

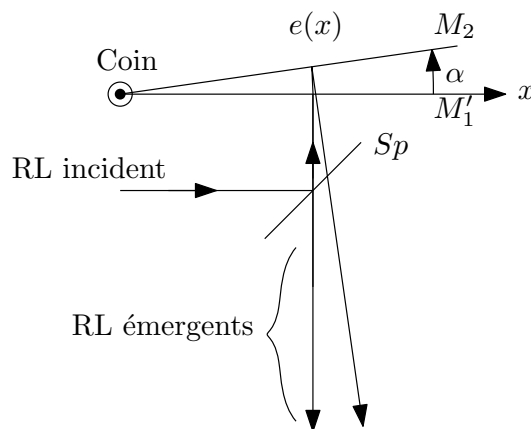


Figure 46 – Intersection des émergents au niveau des miroirs

- Pour un rayon lumineux incident frappant les miroirs à une distance x du coin la différence de marche entre les deux émergents est :

$$\delta = 2e(x) = 2\alpha x$$

Cette différence de marche est la même quelque soit le point source de la source primaire étendue : seul compte l'endroit où le rayon lumineux frappe les miroirs (sous incidence quasi normale).

13.3 Mesure de l'épaisseur d'une lame de Mica

longueurs d'onde max	numéro
738.74	1
744.32	2
750.60	3
756.17	4
762.45	5
769.43	6
775.70	7
782.68	8
788.25	9
795.93	10
802.20	11
809.87	12
815.45	13
824.52	14
831.49	15
838.47	16
845.44	17

Figure 47 – Pointage de certaines longueurs d'onde

Première méthode

- ✕ On compte de nombre de maxima présents entre les deux longueurs d'onde extrêmes λ_1 et λ_2 , on note N le nombre de cannelures trouvées.

$$\lambda_1 = 738.74 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 845.44 \text{ nm}$$

$$N = 17$$

- ✕ Sachant que ces maxima correspondent à des longueurs d'onde présentes, on a :

$$\text{allumée} \Rightarrow \delta = 2e(n-1) = m\lambda$$

- ✕ On en déduit un encadrement de m :

$$\frac{2e(n-1)}{\lambda_2} < m < \frac{2e(n-1)}{\lambda_1}$$

D'où l'expression de N :

$$N = \lfloor 2e(n-1) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \rfloor$$

En assimilant la partie entière à sa valeur, on obtient :

$$e = \frac{N}{2(n-1) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)}$$

L'application numérique donne :

$$e = 100 \mu\text{m}$$

L'incertitude type est déterminée en faisant varier N de ± 2 :

$$e_{\min} = 94 \mu\text{m}$$

$$e_{\max} = 105 \mu\text{m}$$

D'où¹¹ :

$$u_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{e_{\max} - e_{\min}}{2} \right) = 3 \mu\text{m}$$

11. En respectant les chiffres significatifs

Deuxième méthode : étude précise du spectre cannelé

✕ On pointe les longueurs d'onde éteintes (ou maximales) :

$$\text{éteinte} \Rightarrow \delta = 2e(n-1) = \left(\frac{1}{2} + m\right) \lambda \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\left(\frac{1}{2} + m\right)}{2e(n-1)}$$

$$\text{allumée} \Rightarrow \delta = 2e(n-1) = m\lambda \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{m}{2e(n-1)}$$

✕ On choisit de pointer les longueurs d'onde correspondant à un max et on introduit p tel que $m = p_0 - p$ le numéro du max¹² :

$$\text{allumée} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{-p}{2e(n-1)} + \frac{p_0}{2e(n-1)}$$

✕ On trace alors $\frac{1}{\lambda}$ en fonction de $-p$.

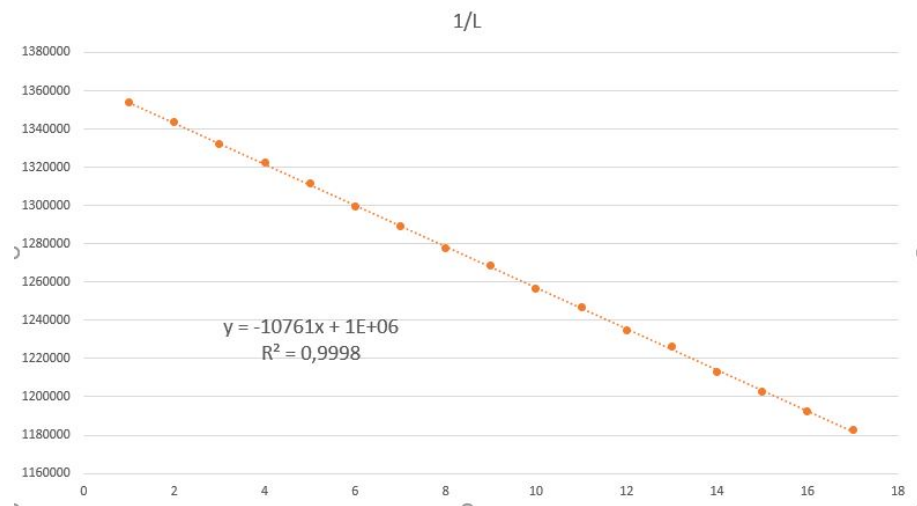


Figure 48

✕ Une régression linéaire, de la forme : $y = ax + b$ nous donne accès à la pente et à son incertitude :

$$a = -10761 \pm 335 \text{m}^{-1} = \frac{1}{-2e(n-1)} \Rightarrow e = \frac{1}{-2a(n-1)} = 80.1 \mu\text{m}$$

$$\frac{u_e}{e} = \sqrt{\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_n}{n}\right)^2} = 0.4 \mu\text{m}$$

12. Le signe moins vient du fait que p est une fonction croissante de λ

14 Réseaux

SVF

- ✕ Établir la formule fondamentale des réseaux :

$$\sin i' - \sin i = \frac{p\lambda}{a}$$

On définira toutes les grandeurs intervenant dans la formule.

- ✕ Montrer, par 2 méthodes, la formule d'éclairement des réseaux :

$$I = \frac{I_{max}}{N} \left(\frac{\sin \left(\frac{N\varphi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)^2$$

Puis déterminer ses minimas et maximas principaux.

- ✕ Montrer que le pouvoir de résolution d'un réseau vaut :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = pN$$

Où p est l'ordre d'interférences.

- ✕ Justifier que pour un réseau éclairé en lumière blanche, les ordres 2 et 3 se recoupent.
- ✕ Justifier qu'au minimum de déviation, on a la relation :

$$\lambda = \frac{2a}{k} \sin \left(\frac{D_m}{2} \right)$$

14.1 Formule des réseaux

- ✕ Pour établir la formule des réseaux, on se place dans les conditions de Fraunhofer : on considère une OPKM incidente et on ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux à l'infini après le réseau (OPKM en sortie) comme représenté figure 49.

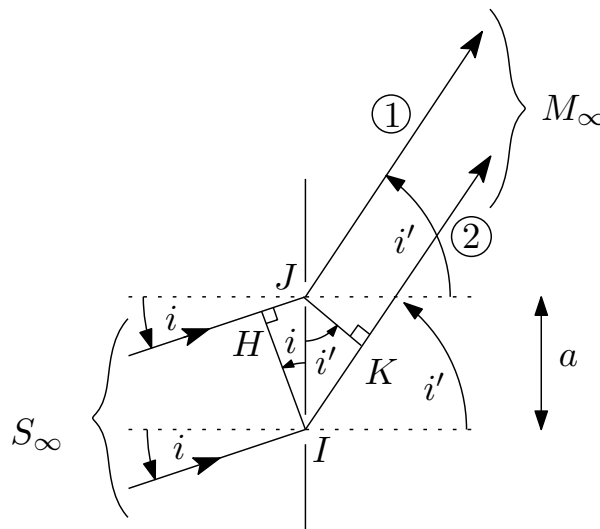


Figure 49 – Calcul de la différence de marche pour les réseaux dans les conditions de Fraunhofer

- ✕ La différence de marche entre les rayons lumineux arrivant en un point M à l'infini, sous un angle i est :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = [(SJ) + (JK) + (KM)] - [(SH) + (HI) + (IM)]$$

Soit, sachant que :

- ☛ D'après le théorème de Malus (JH) est une surface d'onde (S est la source) et donc :

$$(SJ) = (SH)$$

- ☛ D'après le principe de retour inverse de la lumière puis d'après le théorème de Malus, (IK) est une surface d'onde (M est la source) et donc :

$$(MI) = (MK)$$

D'où :

$$\delta = (JK) - (HI)$$

- ☛ Enfin, on a les relations trigonométriques :

$$\sin i = \frac{HI}{a}$$

$$\sin i' = \frac{JK}{a}$$

- ✕ On en déduit :

$$\delta = a (\sin i' - \sin i)$$

- ✕ La différence de marche entre deux rayons lumineux successifs étant toujours la même, la déphasage entre deux rayons lumineux successifs est toujours le même et vaut :

$$\varphi(M) = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin i' - \sin i)$$

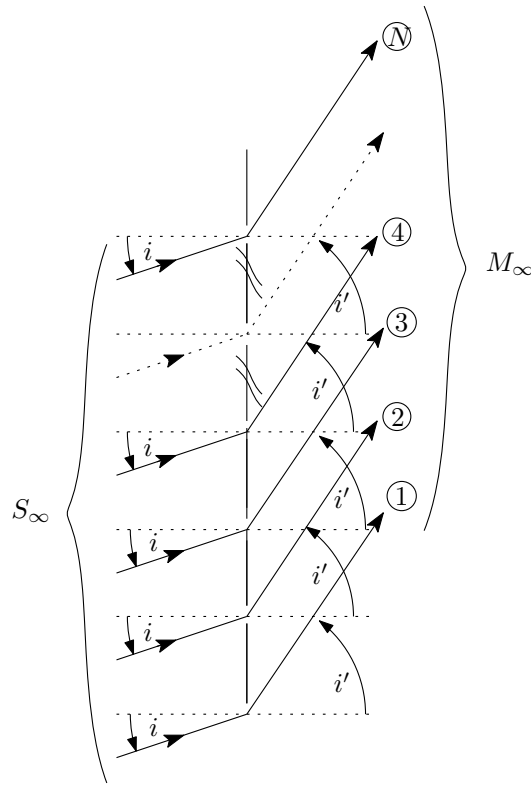
- ✕ On observe un maximum d'intensité lorsque les rayons lumineux qui interfèrent en M sont en phase : le déphasage $\varphi(M)$ est alors un multiple de 2π :

$$\varphi(M) = 2\pi p = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin i - \sin i') \Rightarrow \sin i' - \sin i = p \frac{\lambda}{a}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$

14.2 Fonction réseau : méthode complexe

- ✕ On se place à nouveau dans les conditions de Fraunhofer et on écrit en représentation complexe les vibrations lumineuses de N rayons lumineux arrivant en M en prenant comme origine des phases le rayon inférieur (1) comme représenté figure 50 :

Figure 50 – Calcul de l'intensité en M

✘ On peut alors écrire :

$$\underline{s}_2(M) = \underline{s}_1(M) \exp^{-j\varphi}$$

$$\underline{s}_3(M) = \underline{s}_2(M) \exp^{-j\varphi} = \underline{s}_1(M) \exp^{-j2\varphi}$$

et donc :

$$\underline{s}_k(M) = \underline{s}_1(M) \exp^{-j(N-1)\varphi}$$

✘ On peut alors écrire la vibration lumineuse en M ¹³ :

$$\underline{s}(M) = \sum_{k=1}^N \underline{s}_k(M) = \underline{s}_1(M) \sum_{k=1}^N \exp^{-j(k-1)\varphi} = \underline{s}_1(M) \frac{1 - \exp^{-jN\varphi}}{1 - \exp^{-j\varphi}}$$

✘ On en déduit alors l'éclairement, en mettant au préalable en facteur les angles moitiés :

$$\underline{s}(M) = \underline{s}_1(M) \exp^{-jN\frac{\varphi}{2}} \exp^{j\frac{\varphi}{2}} \frac{\exp^{jN\frac{\varphi}{2}} - \exp^{-jN\frac{\varphi}{2}}}{\exp^{j\frac{\varphi}{2}} - \exp^{-j\frac{\varphi}{2}}} = \underline{s}_1(M) \exp^{-j(N-1)\frac{\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

D'où :

$$I(M) = \frac{\underline{s}(M)\underline{s}^*(M)}{2} = I_1(M) \left(\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2$$

où :

$$I_1(M) = \frac{\underline{s}_1(M)\underline{s}_1^*(M)}{2} = \frac{S_0^2}{2}$$

13. Par additivité des champs et donc des vibrations

14.3 Fonction réseau : méthode de Fresnel

- ✘ A chaque vibration $s_k(M)$ on associe un vecteur de Fresnel $\vec{S}_k$, de norme égale à l'amplitude de la vibration, ici donc S_0 quelque soit k , et faisant un angle $k\varphi$ avec l'axe de référence dont la direction coïncide avec la direction de $\vec{S}_1$ (origine des phases).
- ✘ On obtient le vecteur de Fresnel équivalent à somme des vibrations en ajoutant les N vecteurs comme représenté figure 51 :

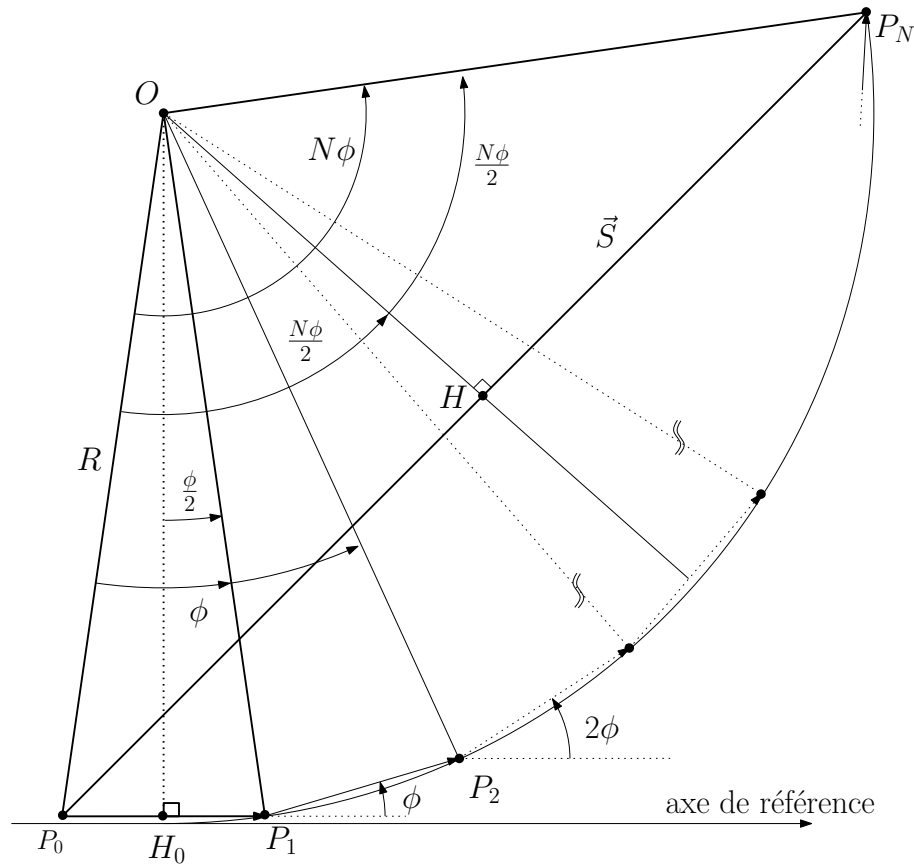


Figure 51 – Détermination de A

- ✘ L'amplitude est maximale si les normes des vecteurs s'ajoutent, comme indiqué figure (52) c'est à dire si φ est nul à 2π prêt :

$$\varphi = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$$

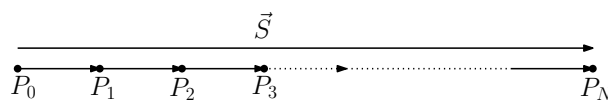


Figure 52 – Cas où $\varphi = 2p\pi$

- ✘ L'amplitude résultante s'annule une première fois après un maximum principal si $N\varphi = 2\pi$ comme indiqué figure (53).

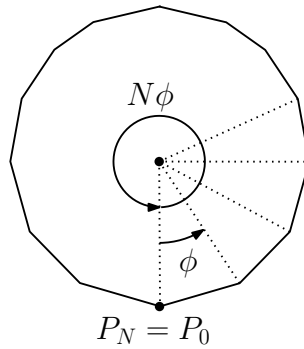


Figure 53 – Cas où $N\varphi = 2\pi$

- ✕ La détermination de l'amplitude résultante se fait en considérant les triangles (OH_0P_1) et (HP_N) comme indiqué figure (??). On a alors :

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{H_0P_1}{R} = \frac{A_0}{2R}$$

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = \frac{HP_N}{R} = \frac{A}{2R}$$

Soit :

$$A = A_0 \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

et donc :

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2$$

14.4 Pouvoir de résolution d'un réseau

- ✕ Le pouvoir de résolution d'un réseau est l'aptitude du réseau à séparer deux longueurs d'onde. Il est défini par le critère de Rayleigh qui considère que deux longueurs d'onde sont séparables si le maximum de l'une (λ) est à la position du premier minimum nul de l'autre ($\lambda + \delta\lambda$). On le définit donc ainsi :

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

Plus $\delta\lambda$ diminue, plus le pouvoir de résolution augmente.

- ✕ On considère un réseau de pas a éclairé par une OPPM, de longueur d'onde λ , sous incidence i . Le maximum d'ordre p est diffracté dans la direction i' telle que :

$$\varphi_{max} = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i' - \sin i) = 2\pi p$$

- ✕ Á parti de ce maximum, à λ fixée, une petite variation $\delta i'$ de i' implique une petite variation $\delta\varphi$ de φ telle que :

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos i' \delta i'$$

- ✕ Sachant que la position du premier minimum nul de ce pic d'ordre p est donnée par :

$$\varphi_{min} = 2\pi p + \frac{2\pi}{N}$$

on en déduit la largeur du pic d'ordre p ¹⁴ :

$$(\delta)_{FWHM} = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos i' \delta i' \Rightarrow (\delta i')_{FWHM} = \frac{\lambda}{Na \cos i'}$$

- ✕ D'autre part, si la longueur d'onde λ varie de $\delta\lambda$, alors l'angle i' (de l'ordre p) varie de $\delta i'$ tel que :

$$\cos i' \delta i' = \frac{p}{a} \delta \lambda \Rightarrow (\delta i')_{\delta \lambda} = \frac{p}{a \cos i'} \delta \lambda$$

- ✕ Enfin, considérons les deux pics principaux, d'ordre p , correspondant aux deux longueurs d'ondes λ et $\lambda + \delta\lambda$, alors, à la limite de résolution, ces deux pics sont séparés si le maximum de l'un coïncide avec le premier minimum nul de l'autre, c'est à dire si les deux expressions de $\delta i'$ établies précédemment sont égales :

$$(\delta i')_{FWHM} = (\delta i')_{\delta\lambda} \Rightarrow \frac{p}{a \cos i'} \delta\lambda = \frac{\lambda}{Na \cos i'} \Rightarrow p \delta\lambda = \frac{\lambda}{N}$$

On en déduit le pouvoir de résolution du réseau :

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = pN$$

Ainsi, pour augmenter le pouvoir de résolution d'un réseau, il faut augmenter le nombre de traits éclairés et/ou augmenter l'ordre p .

14.5 Ordres

- ✕ Existence des ordres

Sachant que :

$$\sin i' = \sin i + \frac{p\lambda}{a}$$

, pour prévoir l'existence d'un ordre p , pour une incidence i donnée, il suffit de considérer le cercle de rayon 1 suivant :

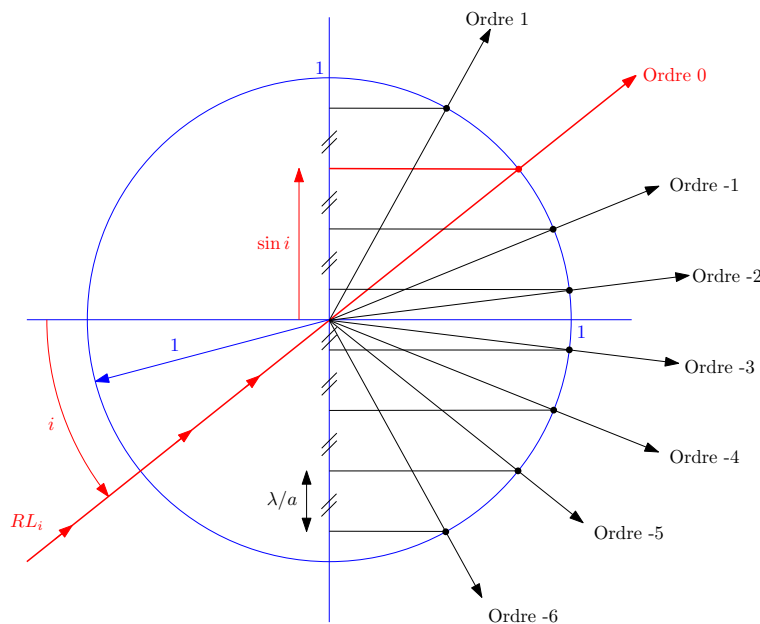


Figure 54

14. FWHM = full width at half maximum

Ainsi, sur l'exemple précédent, seuls les ordres de -6 à 1 existent.

✕ Recouvrement des ordres

- ☛ L'expérience montre qu'à partir d'une certaine valeur de p , il y a empiètement des spectres, les uns sur les autres. Ce phénomène est facile à comprendre : il y a empiètement lorsqu'une même direction correspond à deux longueurs d'onde différentes et deux valeurs de p successives.

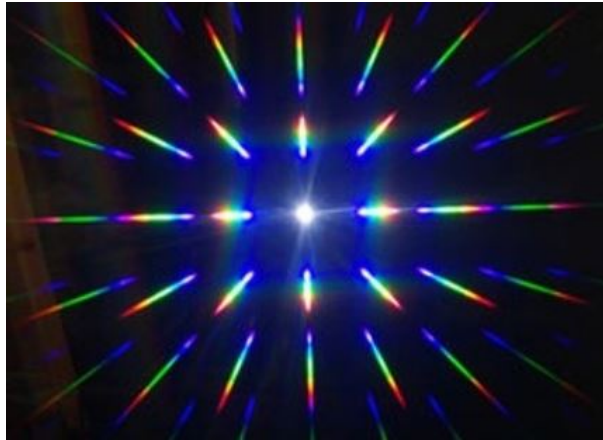


Figure 55 – Empiètement des ordres sur un réseau par réflexion 2D

- ☛ On cherche donc à partir de quel ordre commence l'empiètement des spectres. Soit λ_1 et λ_2 les longueurs d'ondes qui se superposent, alors :

$$\text{ordre } p \Rightarrow \sin i' - \sin i = p \frac{\lambda_1}{a}$$

$$\text{ordre } p + 1 \Rightarrow \sin i' - \sin i = (p + 1) \frac{\lambda_2}{a}$$

(Pour le spectre visible $\lambda_1 = 0.8 \mu\text{m}$ et $\lambda_2 = 0.4 \mu\text{m}$)

- ☛ Par simple soustraction, on obtient :

$$p = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

- ☛ On obtient la valeur minimale de p en prenant la partie entière plus 1 du nombre trouvé. Soit ici $p=2$: l'empiètement commence donc entre les deuxième et le troisième ordres.

15 Fabry-Pérot

SVF

Montrer que l'intensité à la sortie d'un interféromètre de Fabry Pérot est de la forme :

$$I = \frac{I_0}{1 + M \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

On précisera les hypothèses faites et la signification des différentes grandeurs intervenant dans la formule.

15.1 Discussion qualitative

- ✗ Un interféromètre de Fabry-Pérot est constitué de deux lames de verre, parallèles, traitées de façon à ce que le coefficient de réflexion sur chaque lame soit proche de 1.
- ✗ On considère une interféromètre de Fabry-Pérot éclairé par une source ponctuelle, comme représenté figure 56. Par analogie avec l'interféromètre de Michelson et sachant qu'on ne s'intéresse qu'aux rayons lumineux qui interfèrent à l'infini, on étudie ici uniquement les interférences par division d'amplitude : on obtient des franges circulaires d'axe (Oz) . Ainsi peu importe que la source soit étendue : les figures d'interférences des différents points sources de la source étendue coïncident à l'infini.
- ✗ Du fait des différentes réflexion et transmission (avec $R \approx 1$) les amplitudes des différentes vibrations arrivant en M ne seront pas les mêmes. Ainsi l'utilisation des vecteurs de Fresnel n'est pas adaptée ici.
- ✗ Le coefficient de réflexion étant proche de 1, un très grand nombre de rayons lumineux vont interférer en M : la finesse d'un Fabry-Pérot est donc très élevée (plusieurs dizaines typiquement) par rapport à la finesse d'un interféromètre de Michelson qui vaut 2.

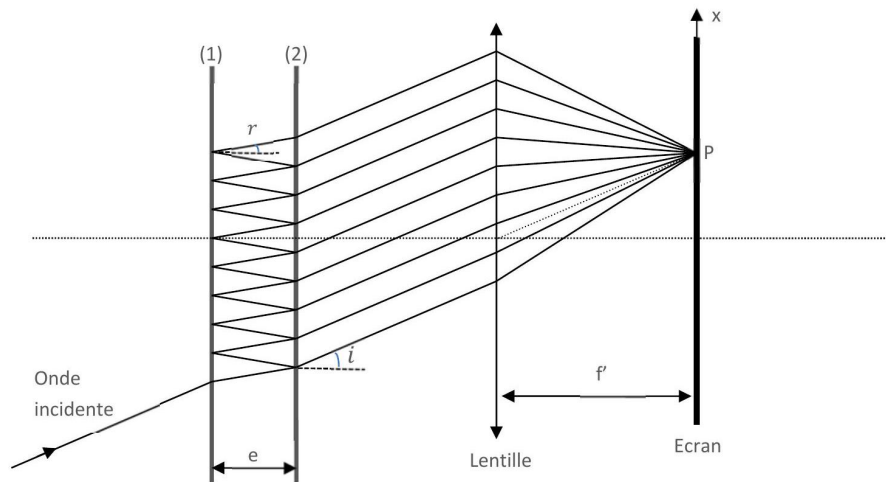


Figure 56

15.2 Calcul du déphasage

- ✗ La différence de marche entre les deux rayons étant $\delta = 2e \cos i$, le déphasage vaut :

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos i$$

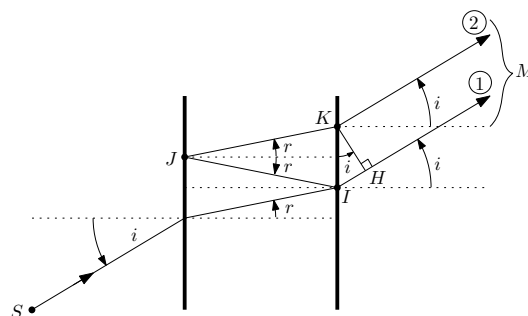


Figure 57 – Schéma pour le calcul du déphasage

En effet, d'après la figure, on a :

- ☛ La différence de marche entre les deux rayons arrivants, issus de S , en M se calcul à partir du point I , les chemins optiques étant identiques en amont. On a donc :

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (IM)_2 - (IM)_1 = [(IJ) + (JK) + (KM)] - [(IH) + (HM)]$$

- ☛ D'après le principe de retour inverse de la lumière (M est considéré comme le point source) et d'après le théorème de Malus ((KH) est une surface d'onde), on a :

$$(KM) = (HM)$$

D'où :

$$\delta(M) = 2(IJ) - (IH)$$

- ☛ Les relations trigonométriques sont :

$$\tan i = \frac{KI}{2e} \Rightarrow KI = 2e \tan i$$

$$\cos i = \frac{e}{IJ} \Rightarrow IJ = \frac{e}{\cos i}$$

$$\sin i = \frac{IH}{KI} \Rightarrow IH = \sin i \times KI = \sin i \times 2e \tan i = 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i}$$

- ☛ On en déduit :

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} - 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} = 2e \cos i$$

- ✗ Les franges d'interférences sont des franges circulaires de centre F' le foyer image de la lentille.

15.3 Calcul de l'intensité

- ✗ Coefficient de réflexion interface air $\rightarrow$ verre :

$$r = r_{av} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n}{1 + n}$$

$$\Rightarrow R_{av} = r_{av}^2 = r^2 = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2} = R$$

(On ne considère que les réflexions air $\rightarrow$ verre)

- ✗ Coefficient de transmission interface air $\rightarrow$ verre :

$$t_{av} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n}$$

$$\Rightarrow T_{av} = \frac{n_2}{n_1} t_{av}^2 = \frac{4n}{(n + 1)^2}$$

- ✗ Coefficient de transmission interface verre $\rightarrow$ air :

$$t_{va} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = \frac{2n}{n + 1}$$

$$\Rightarrow T_{va} = \frac{4n}{(n + 1)^2} = T_{av}$$

✘ Coefficient de transmission total à travers une lame :

$$t^2 = t_{av}t_{va} = \frac{4n}{(n+1)^2} = T_{av} = T_{va}$$

Notons que l'on a bien :

$$t^2 + r^2 = 1$$

✘ Vibrations lumineuses arrivant en M (les s_i sont comptés de bas en haut, convention : retard de phase)

$$\underline{s}_1 = s_0 t^2 e^{j\varphi_1}$$

$$\underline{s}_2 = s_0 t^2 r^2 e^{j(\varphi_1 + \varphi)}$$

$$\underline{s}_3 = s_0 t^2 r^{2 \times 2} e^{j(\varphi_1 + 2 \times \varphi)}$$

$$\underline{s}_4 = s_0 t^2 r^{2 \times 3} e^{j(\varphi_1 + 3 \times \varphi)}$$

$$\underline{s}_i = s_0 t^2 r^{2 \times (i-1)} e^{j(\varphi_1 + (i-1) \times \varphi)} = s_0 t^2 R^{(i-1)} e^{j(\varphi_1 + (i-1) \times \varphi)}$$

✘ Vibration totale :

$$\underline{s}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{s}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{s}_i = s_0 t^2 e^{j\varphi_1} \sum_{i=1}^{\infty} (R e^{j\varphi})^{i-1} = \frac{s_0 t^2 e^{j\varphi_1}}{1 - R e^{j\varphi}}$$

✘ Intensité :

$$I(M) = \frac{1}{2} \underline{S} \underline{S}^* = \frac{s_0^2 t^4}{(1 - R \cos \varphi)^2 + (R \sin \varphi)^2}$$

$$I(M) = \frac{s_0^2 (1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$

$$I(M) = \frac{s_0^2 (1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)}$$

$$I(M) = \frac{s_0^2 (1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 2R \times 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$$

D'où :

$$I(M) = \frac{s_0^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$$

$$I(M) = \frac{I_{\max}}{1 + M \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$$

✘ Notons que si l'on tient compte de la double réflexion possible au niveau de chaque lame, et en négligeant l'épaisseur de ces lames (pour chaque réflexion, on aurait deux rayons lumineux qui se superposent), il faut remplacer r_{av} par $r_{av} (1 + t^2 r_{va}) \Rightarrow$ le terme $(1 + t^2 r_{va})$ étant présent dans toutes les vibrations, il se met en facteur et est «caché» dans $I_{\max}$.

✘ Si l'on tient compte de l'épaisseur des lames, cela ne change rien non plus à l'expression de $I(M)$.

✘ AN :

$$R = 0.9 \rightarrow M = 360 \gg 1$$

$$R = 0.99 \rightarrow M = 39600 \gg 1$$

15.4 Largeur des pics d'un FP (franges circulaires brillantes)

✕ Les franges brillantes vérifient :

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \varphi = 2k\pi$$

$\Rightarrow$ A mi-hauteur :

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + M \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{I_{\max}}{2} \Rightarrow M \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 1 \Rightarrow \varphi = \pm 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{M}} \approx \pm \frac{2}{\sqrt{M}}$$

Soit :

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

$\Rightarrow$ La largeur à mi-hauteur tend bien vers zéro quand R tend vers 1

15.5 Résolution d'un FP

✕ On sépare les deux modes si la distance entre deux pics principaux, correspondant aux deux longueurs d'ondes, est supérieure à la demi-largeur d'un pic (critère de Rayleigh).

✕ Odg :

$$\lambda = \lambda_m = 632.8 \text{ nm et } \Delta v = 150 \text{ MHz}$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta v = 2 \times 10^{-4} \text{ nm} \ll \lambda_m$$

✕ Longueurs d'ondes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_m - \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \lambda_2 &= \lambda_m + \frac{\Delta\lambda}{2} \end{aligned}$$

✕ Rayon d'un anneau brillant sur l'écran (pour une longueur d'onde λ donnée) :

$$\varphi = 2k\pi = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos i_k = \frac{4\pi e}{\lambda} \left(1 - \frac{r_k^2}{2f'^2} \right) \Rightarrow r_k^2 = 2f'^2 \left(1 - \frac{\lambda k}{2e} \right)$$

✕ Distance entre deux pics d'ordre k correspondant aux deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 :

$$\begin{aligned} r_{1k}^2 &= 2f'^2 \left(1 - \frac{\lambda_1 k}{2e} \right) \\ r_{2k}^2 &= 2f'^2 \left(1 - \frac{\lambda_2 k}{2e} \right) \end{aligned}$$

$$r_{2k}^2 - r_{1k}^2 = (r_{2k} - r_{1k})(r_{2k} + r_{1k}) = 2r_{mk}(r_{2k} - r_{1k}) = \frac{f'^2 k}{e} \Delta\lambda$$

Avec :

$$r_{mk} = \frac{r_{2k} + r_{1k}}{2} = f' \sqrt{1 - \frac{\lambda_m k}{2e}}$$

D'où :

$$r_{2k} - r_{1k} = \frac{f' k}{2e \sqrt{1 - \frac{\lambda_m k}{2e}}} \Delta\lambda$$

- ✕ Distance entre un maximum principal et la demi-largeur à mi-hauteur (pour λ_m), pour simplifier on se place au centre :

$$r_m = 0 \Rightarrow k = \frac{2e}{\lambda_m} \text{ (ordre au centre)}$$

- ✕ Largeur à mi-hauteur :

$$\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda_m} \left(1 - \frac{r_{m0}^2}{2f'^2} \right) = \frac{4\pi e}{\lambda_m} - \frac{2}{\sqrt{M}} \Rightarrow r_{m0} = f' \sqrt{\frac{\lambda_m}{\pi e \sqrt{M}}}$$

$\Rightarrow$ En utilisant le critère de Rayleigh, Il y a résolution du doublet si :

$$\begin{aligned} r_{2k} - r_{1k} &> r_{m0} \\ \frac{f'k}{2e \sqrt{1 - \frac{\lambda_m k}{2e}}} \Delta\lambda &> f' \sqrt{\frac{\lambda_m}{\pi e \sqrt{M}}} \\ \frac{f'^2 k^2}{4e^2 \left(1 - \frac{\lambda_m k}{2e} \right)} (\Delta\lambda)^2 &> f'^2 \frac{\lambda_m}{\pi e \sqrt{M}} \\ \frac{k^2}{4e \left(1 - \frac{\lambda_m k}{2e} \right)} (\Delta\lambda)^2 &> \frac{\lambda_m}{\pi \sqrt{M}} \\ \pi \sqrt{M} \frac{k^2}{4\lambda_m} (\Delta\lambda)^2 &> \left(e - \frac{\lambda_m k}{2} \right) \end{aligned}$$

Sachant que le m^{eme} anneau brillant d'ordre k vérifie :

$$k = k_0 - m = \frac{2e}{\lambda_m} - \varepsilon - m$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \pi \sqrt{M} \frac{\left(\frac{2e}{\lambda_m} - \varepsilon - m \right)^2}{4\lambda_m} (\Delta\lambda)^2 &> \left(\frac{\lambda_m (\varepsilon + m)}{2} \right) \\ e > e_{\min} &= \frac{\lambda_m}{2} \left((\varepsilon + m) + \sqrt{\frac{2(m + \varepsilon)}{\pi \sqrt{M}} \frac{\lambda_m^2}{(\Delta\lambda)^2}} \right) \end{aligned}$$

Pour l'application numérique, on prendra $\varepsilon = 0$

R	M	$e_{\min}$ pour $m = 1$	$e_{\min}$ pour $m = 2$	$e_{\min}$ pour $m = 3$
90%	360	18.3 cm	25.9 cm	31.8 cm
99%	39600	5.66 cm	8,01 cm	9.81 cm

15.6 Utilisation de l'interféromètre comme filtre interférentiel - Finesse

- ✕ On place une source de lumière blanche au foyer objet d'une lentille convergente de même axe optique que la lentille de projection et on choisit l'épaisseur e de façon à ce qu'une seule raie spectrale du spectre visible soit transmise par la cavité (en prenant par exemple $e = 290$ nm on obtient une couleur orangée). Notons enfin que la valeur de R (et donc celle de M) joue sur la largeur spectrale de la raie sélectionnée : Pour les ordres de grandeur on pourra prendre $R = 90\%$ et $R = 99\%$.

- ✕ La source est placée au foyer objet de la lentille : l'éclairement sur l'écran sera nul en tout point de l'écran sauf en F'.
 $\Rightarrow$ En F', seules les longueurs d'onde vérifiant $\lambda = \frac{2e}{m}$ où m est un entier auront un éclairement significatif.
- ✕ Le choix $e = 290$ nm est intéressant car la cavité ne sélectionne alors qu'une raie spectrale dans le visible : $\lambda_0 = 2e = 580$ nm (couleur orangée) correspondant à $m = 1$ et $\varphi = 2\pi$.
- ✕ Pour déterminer la largeur de la raie sélectionnée, on utilise l'expression de $\Delta\varphi$:

$$\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$$

et donc :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0 \Delta\varphi}{\varphi} = \frac{2\lambda_0}{\pi \sqrt{R}} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

- ✕ La longueur de cohérence vaut alors :

$$L_c = c \cdot \tau_c \approx \frac{c}{\Delta\nu}$$

avec :

$$\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda}$$

d'où :

$$L_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

D'où le tableau suivant :

R	$\frac{1-R}{\sqrt{R}}$	$\Delta\lambda$	L_c	F
90%	0,11	9,7 nm	35 μ m	28.5
99%	0,01	0,93 nm	0,36 mm	314

Notons que la finesse d'un interféromètre est définie par :

$$F = \frac{\lambda_0}{\delta\lambda}$$

Où $\delta\lambda$ est la largeur d'un pic ($2\Delta\lambda$). Elle vaut donc ici :

$$F = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$$

(Elle est égale à 2 pour un interféromètre de Michelson)

16 Polarisation

SVF

- ✕ Retrouver la loi de Malus.
- ✕ Écrire les expressions des ondes suivantes :
 1. OPPM se propageant dans le sens des z croissants, polarisée rectilignement suivant (Ox)
 2. OPPM se propageant dans le sens des y croissants, polarisée rectilignement suivant une direction faisant un angle de $\pi/3$ avec l'axe (Ox)
 3. OPPM se propageant dans le sens des z croissants, polarisée circulaire gauche
 4. OPPM se propageant dans le sens des x décroissants, polarisée circulaire droite
 5. OPPM se propageant dans le plan (Oxy) en faisant un angle de $\pi/4$ avec l'axe (Ox) et polarisée circulaire gauche
 6. OPPM se propageant dans le sens des z croissants, polarisée elliptique droite
 7. OPPM se propageant dans le sens des y croissants, polarisée elliptique gauche
- ✕ Préciser la direction de propagation et la polarisation des champs suivants :
 1. $\vec{E} = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$ Avec $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$
 2. $\vec{E} = E_0 \exp^{j\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}x - \frac{k}{\sqrt{2}}y\right)} \vec{e}_z$
 3. $\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y - E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_z$
 4. $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp^{j(\omega t - kz)}$ Avec : $\vec{E}_0 = E_0 (\vec{e}_x - j\vec{e}_y)$
 5. $\vec{E} = E_{0y} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y + E_{0z} \sin(\omega t + kx) \vec{e}_z$
 6. $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp^{j(\omega t - ky)}$ Avec : $\vec{E}_0 = E_0 \cos \alpha \vec{e}_x - jE_0 \sin \alpha \vec{e}_z$ et $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$
- ✕ Comment obtenir et détecter une polarisation rectiligne ?
- ✕ Comment obtenir et détecter une polarisation circulaire ?
- ✕ Comment obtenir et détecter une polarisation elliptique ?
- ✕ Montrer qu'une lame $\lambda/2$ transforme une OPPM polarisée rectilignement en une nouvelle OPPM dont la polarisation rectiligne est symétrique de la première par rapport aux axes neutres de la lame.
- ✕ Montrer qu'une lame $\lambda/2$ transforme une OPPM polarisée elliptiquement en une nouvelle OPPM dont la polarisation elliptique est identique à la première mais d'hélicité opposée.
- ✕ Montrer qu'une lame $\lambda/4$ transforme, de manière générale, une OPPM polarisée rectilignement en une nouvelle OPPM polarisée elliptiquement. Quels sont les cas particuliers ?
- ✕ Montrer qu'une lame $\lambda/4$ transforme une OPPM polarisée circulairement en une nouvelle OPPM dont la polarisation est rectiligne.
- ✕ On envoie une OPPM polarisée rectilignement sur un miroir, qu'elle est la polarisation de l'onde réfléchie ? même question pour une polarisation circulaire.
- ✕ Proposer un protocole pour déterminer la biréfringence d'une lame connaissant son épaisseur.

16.1 Loi de Malus

- ✕ Considérons un faisceau lumineux, modélisé par une OPPM, passant par un premier polariseur P_1 caractérisé par le vecteur unitaire $\vec{u}_1$. A la sortie du polariseur, le champ électrique est donc de la forme :

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_1$$

et l'éclairement est :

$$\mathcal{E}_0 = \alpha \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle = \frac{\alpha}{2} E_0^2$$

- ✕ On considère maintenant un autre polariseur P_2 , faisant un angle ϑ avec le polariseur P_1 , caractérisé par le vecteur unitaire $\vec{u}_2$, situé juste après P_1 . A la sortie du second polariseur, le champ électrique est donc de la forme :

$$\vec{E}_2 = (\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2$$

Soit :

$$\vec{E}_2 = E_0 \cos \vartheta \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_2$$

- ✕ L'éclairement à la sortie de P_2 est donc :

$$\mathcal{E}_2 = \alpha \langle \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 \rangle = E_0^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \vartheta$$

On obtient donc bien la loi de Malus :

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \cos^2 \vartheta$$

16.2 Écriture des champs correspondant à une polarisation donnée

1. OPPM se propageant dans le sens des z croissants, polarisée rectilignement suivant (Ox)

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \exp^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

2. OPPM se propageant dans le sens des y croissants, polarisée rectilignement suivant une direction faisant un angle de $\pi/3$ avec l'axe (Ox)

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - ky) \left(\cos \frac{\pi}{3} \vec{e}_x - \sin \frac{\pi}{3} \vec{e}_z \right) = E_0 \cos(\omega t - ky) \left(\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{2}{\sqrt{3}} \vec{e}_z \right)$$

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \exp^{j(\omega t - ky)} \left(\cos \frac{\pi}{3} \vec{e}_x - \sin \frac{\pi}{3} \vec{e}_z \right) = E_0 \exp^{j(\omega t - ky)} \left(\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{2}{\sqrt{3}} \vec{e}_z \right)$$

3. OPPM se propageant dans le sens des z croissants, polarisée circulaire gauche

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = (E_0 \vec{e}_x - j E_0 \vec{e}_y) \exp^{j(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}(0, 0) = E_0 \vec{e}_x$$

$$\left. \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right|_{(0,0)} = E_0 \omega \vec{e}_y$$

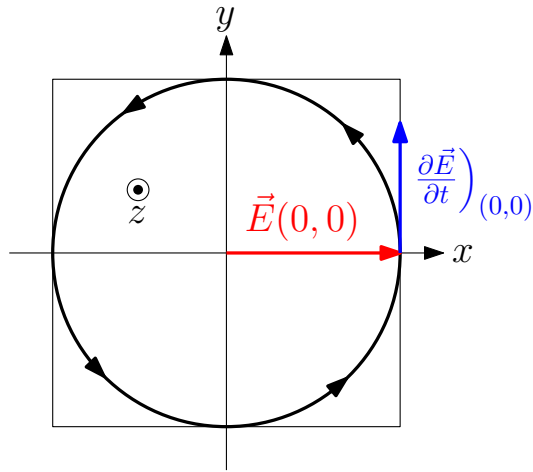


Figure 58 – Propagation suivant les z croissants
- Polarisation circulaire gauche

4. OPPM se propageant dans le sens des x décroissants, polarisée circulaire droite

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y + E_0 \sin(\omega t + kx) \vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = (E_0 \vec{e}_y - j E_0 \vec{e}_z) \exp^{j(\omega t + kx)}$$

$$\vec{E}(0, 0) = E_0 \vec{e}_y$$

$$\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_{(0,0)} = E_0 \omega \vec{e}_z$$

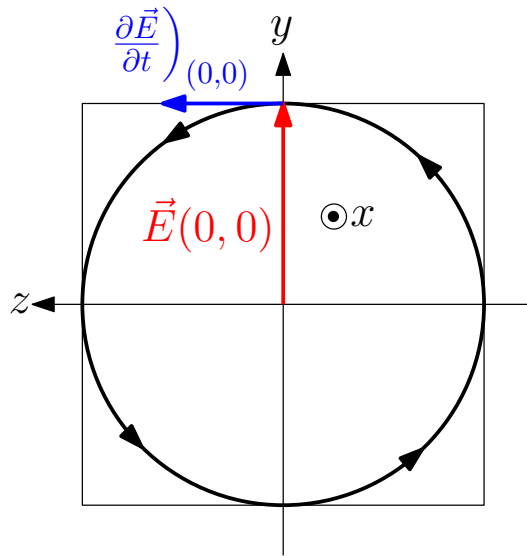


Figure 59 – Propagation suivant les x décroissants
- Polarisation circulaire droite

5. OPPM se propageant dans le plan (Oxy) en faisant un angle de $\pi/4$ avec l'axe (Ox) et polarisée circulaire gauche

$$\vec{k} = k \vec{u} = k \left(\cos \frac{\pi}{4} \vec{e}_x + \sin \frac{\pi}{4} \vec{e}_y \right) = k \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \right)$$

Le plan d'onde est le plan caractérisé par les deux vecteurs :

$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \right)$$

$$\vec{w} = \vec{e}_z$$

(la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormée directe)

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}}\right) \vec{v} + E_0 \sin\left(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}}\right) \vec{w}$$

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = (E_0 \vec{v} - j E_0 \vec{w}) \exp^{j\left(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\vec{E}(0, 0, 0) = E_0 \vec{v}$$

$$\left.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|_{(0,0,0)} = E_0 \omega \vec{w}$$

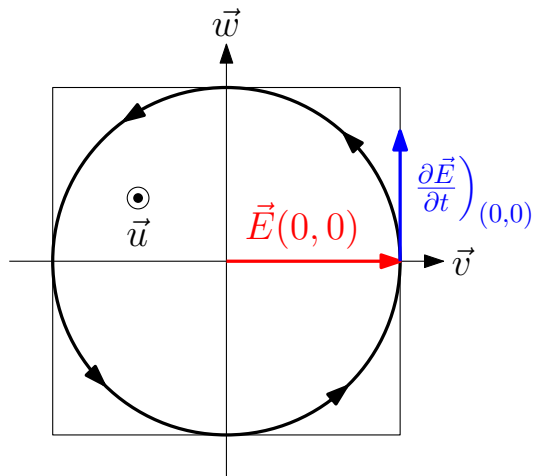


Figure 60 – Propagation suivant le $\vec{u}$ - Polarisation circulaire gauche

6. OPPM se propageant dans le sens des z croissants, polarisée elliptique droite

$$\vec{E}(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Phi) \vec{e}_y$$

où $\Phi \in]0, \pi[$

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \left(E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \exp^{j\Phi} \vec{e}_y\right) \exp^{j(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}(0, 0) = E_{0x} \vec{e}_x$$

$$\left.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|_{(0,0)} = -E_{0y} \sin(\Phi) \omega \vec{e}_y$$

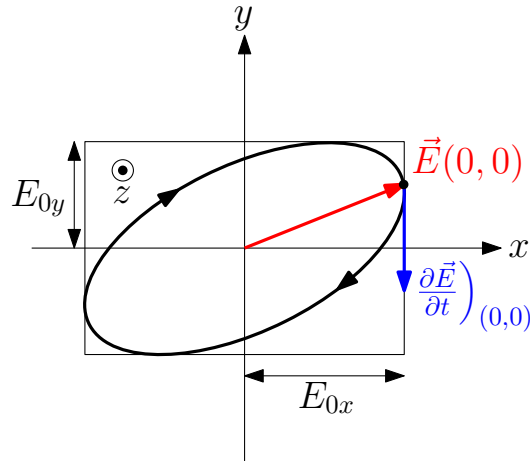


Figure 61 – Propagation suivant les z croissants
- Polarisation elliptique droite (ici $\Phi \in]0, \pi/2[$)

7. OPPM se propageant dans le sens des y croissants, polarisée elliptique gauche

$$\vec{E}(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x + E_{0z} \cos(\omega t - ky + \Phi) \vec{e}_z$$

où $\Phi \in]0, \pi[$

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0z} \exp^{j\Phi} \vec{e}_z) \exp^{j(\omega t - ky)}$$

$$\vec{E}(0, 0) = E_{0x} \vec{e}_x$$

$$\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_{(0,0)} = -E_{0z} \sin(\Phi) \omega \vec{e}_z$$

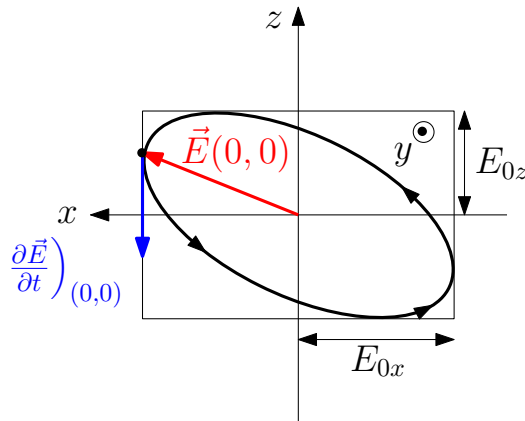


Figure 62 – Propagation suivant les y croissants
- Polarisation elliptique gauche (ici $\Phi \in]0, \pi/2[$)

16.3 Détermination de l'onde associée à un champ donné (direction de propagation, polarisation)

$$1. \vec{E} = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \text{ Avec } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

- ✗ L'onde se propage suivant (Oz) dans le sens des z croissants
- ✗ L'onde est polarisée rectilignement en faisant un angle de $\pi/4$ avec l'axe (Ox)

$$2. \vec{E} = E_0 \exp \left(j \left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}} x - \frac{k}{\sqrt{2}} y \right) \right) \vec{e}_z$$

✕ L'onde se propage dans le plan (Oxy) et plus précisément :

$$\vec{k} = k \left(\frac{\vec{e}_x}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right)$$

✕ La polarisation est rectiligne suivant (Oz)

$$3. \vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y - E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_z$$

✕ L'onde se propage suivant (Ox) dans le sens des x croissants

✕ La polarisation est circulaire

✕ Hélicité :

$$\begin{aligned} \vec{E}(0,0) &= E_0 \vec{e}_y \\ \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_{(0,0)} &= E_0 \omega \vec{e}_z \end{aligned}$$

La polarisation est donc circulaire droite

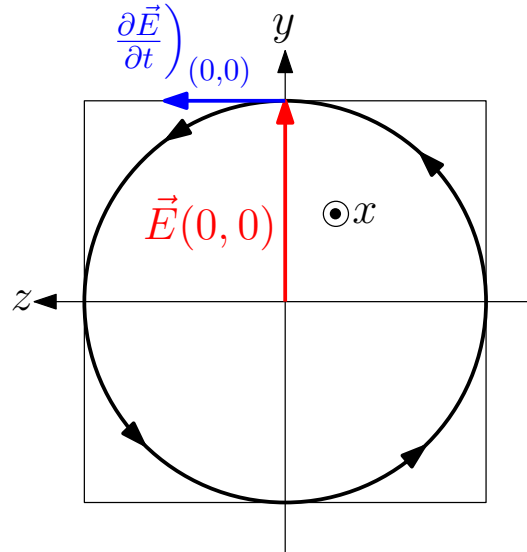


Figure 63 – Propagation suivant les x croissants
- Polarisation circulaire gauche

$$4. \vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - kz)) \text{ Avec : } \vec{E}_0 = E_0 (\vec{e}_x - j \vec{e}_y)$$

✕ L'onde se propage suivant (Oz) dans le sens des z croissants

✕ La polarisation est circulaire

✕ Pour l'hélicité, on commence par écrire le champ avec les valeurs réelles instantanées :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 (\vec{e}_x - j \vec{e}_y) \exp(j(\omega t - kz)) \\ \vec{E} &= E_0 (\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{E}(0,0) &= E_0 \vec{e}_x \\ \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_{(0,0)} &= E_0 \omega \vec{e}_y \end{aligned}$$

La polarisation est donc circulaire gauche

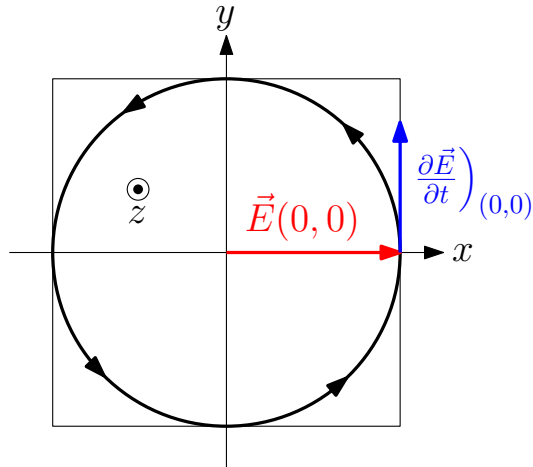


Figure 64 – Propagation suivant les z croissants
- Polarisation circulaire gauche

5. $\vec{E} = E_{0y} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y + E_{0z} \sin(\omega t + kx) \vec{e}_z$

- ✗ L'onde se propage suivant (Ox) dans le sens des x décroissants
- ✗ La polarisation est elliptique
- ✗ Hélicité :

$$\vec{E}(0,0) = E_{0y} \vec{e}_y$$

$$\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_{(0,0)} = E_{0z} \omega \vec{e}_z$$

La polarisation est donc elliptique droite

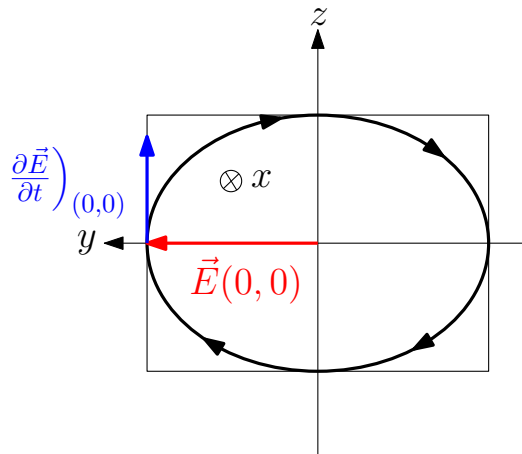


Figure 65 – Propagation suivant les x décroissants
- Polarisation elliptique droite

6. $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp^{j(\omega t - ky)}$ Avec : $\vec{E}_0 = E_0 \cos \alpha \vec{e}_x - j E_0 \sin \alpha \vec{e}_z$ et $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

- ✗ L'onde se propage suivant (Oy) dans le sens des y croissants
- ✗ La polarisation est elliptique
- ✗ Pour l'hélicité, on commence par écrire le champ avec les valeurs réelles instantanées :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp^{j(\omega t - ky)}$$

$$\vec{E} = (E_0 \cos \alpha \vec{e}_x - j E_0 \sin \alpha \vec{e}_z) \exp^{j(\omega t - ky)}$$

$$\vec{E} = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \sin(\omega t - ky) \vec{e}_z$$

$$\vec{E}(0,0) = E_0 \cos \alpha \vec{e}_x$$

$$\left. \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_{(0,0)} = E_0 \sin \alpha \omega \vec{e}_z$$

La polarisation est donc elliptique droite

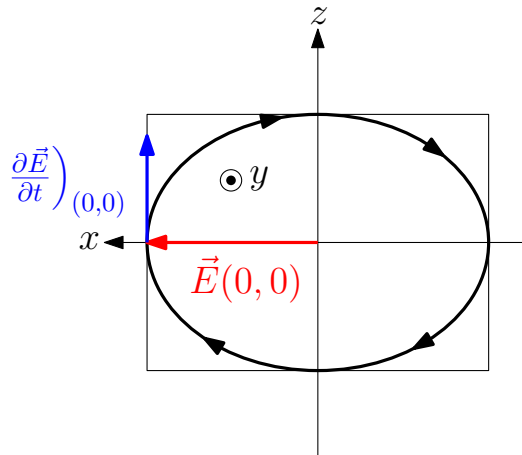


Figure 66 – Propagation suivant les y croissants
- Polarisation elliptique droite

16.4 Obtention et détection d'une polarisation rectiligne

✕ Pour obtenir une polarisation rectiligne, on peut :

- Utiliser un polariseur (de direction $\vec{u}_P$) : le champ $\vec{E}$ à la sortie polariseur a la direction donnée par $\vec{u}_P$.
- Utiliser la polarisation par réflexion sous incidence de Brewster : lors d'une réflexion sur un dioptré ($1 \rightarrow 2$), l'onde réfléchie est polarisée rectilignement (perpendiculairement au plan d'incidence) lorsque l'angle d'incidence vérifie :

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

✕ Pour détecter une polarisation rectiligne, on utilise un polariseur : on place celui-ci sur le trajet du faisceau lumineux à analyser et on fait tourner la direction $\vec{u}_P$ du polariseur. Si on arrive à annuler l'éclairement à la sortie du polariseur alors la polarisation est rectiligne perpendiculaire à $\vec{u}_P$.

16.5 Obtention et détection d'une polarisation circulaire

Obtention d'une polarisation circulaire

✕ Pour produire une onde polarisée circulairement, on utilise un polariseur de direction $\vec{u}_P$ à la suite duquel on place une lame $\lambda/4$ dont les axes neutres font un angle de $\pm\pi/4$ avec $\vec{u}_P$: à la sortie de ces deux éléments la polarisation est circulaire.

✕ En effet :

- A la sortie du polariseur, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}_P(M, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_P$$

Avec : $\varphi = -kz$

- En notant $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$, l'angle que fait $\vec{u}_P$ avec l'axe lent (Ox) de la lame, on peut écrire :

$$\vec{E}_P(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

- Sachant que la lame utilisée est une lame $\lambda/4$, la différence de marche entre les deux composantes du champ électrique sur (Ox) et (Oy) est :

$$\delta = (n_x - n_y)e = \frac{\lambda}{2}$$

Avec e est l'épaisseur de la lame et $n_x > n_y$

et donc le déphasage entre les deux composantes du champ vaut :

$$\varphi_x - \varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

- On en déduit le champ à la sortie de la lame :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi + \varphi_x) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cos\left(\omega t + \varphi + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

Avec : $\varphi_x = -n_x k e$

- On effectue alors un changement dans la base de temps en posant :

$$t' = t - \frac{n_x e}{c}$$

Et on obtient :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \sin(\omega t' + \varphi) \vec{e}_y$$

Sachant que $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$, on obtient bien une polarisation circulaire :

$$\vec{E}_L(M, t) = \pm E_0 \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x \pm E_0 \sin(\omega t' + \varphi) \vec{e}_y$$

- ✗ Pour étudier l'hélicité, on étudie $\vec{E}_L$, ainsi que sa dérivée temporelle, à $t = 0$ en $z = 0$:

$$\vec{E}_L(0, 0) = E_0 \cos \alpha \vec{e}_x$$

$$\left. \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t'} \right|_{(0,0)} = E_0 \omega \sin \alpha \vec{e}_y$$

On distingue alors plusieurs cas :

- Pour $\alpha = \pi/4$ ($\cos \alpha = \sin \alpha > 0$) et pour $\alpha = 5\pi/4$ ($\cos \alpha = \sin \alpha < 0$), la polarisation est circulaire gauche
- Pour $\alpha = 3\pi/4$ ($\cos \alpha = -\sin \alpha < 0$) et pour $\alpha = -\pi/4$ ($\cos \alpha = -\sin \alpha > 0$), la polarisation est circulaire droite

Détection d'une onde polarisée circulairement

- ✕ Pour analyser une onde polarisée circulairement, on peut commencer de manière qualitative en plaçant un polariseur sur le faisceau et en tournant le polariseur ; si l'éclairement à la sortie du polariseur n'est pas modifié par la rotation du polariseur alors soit la polarisation est circulaire soit l'onde n'est pas polarisée (lumière naturelle).
- ✕ Pour une approche plus précise, on place sur le trajet de l'onde une lame $\lambda/4$, de lignes neutres (Ox) (axe lent) et (Oy), puis un polariseur : si on arrive à annuler l'éclairement à la sortie du polariseur alors la polarisation est circulaire. En effet :

- ☛ Le champ électrique d'une onde polarisée circulairement est de la forme :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + \varepsilon E_0 \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

où $\varphi = -kz$ et avec $\varepsilon = 1$ si la polarisation est circulaire gauche et $\varepsilon = -1$ si la polarisation est circulaire droite.

- ☛ A la sortie de la lame, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi + \varphi_x) \vec{e}_x + \varepsilon E_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

Soit, en faisant le changement de variable classique : $t' = t - \frac{n_x e}{c}$

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x + \varepsilon E_0 \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_y$$

On obtient bien une polarisation rectiligne faisant un angle de $\pm\pi/4$ avec les axes neutres de la lame.

- ✕ Lien entre l'hélicité de la polarisation circulaire et l'angle de la polarisation :
 - ☛ Pour une polarisation circulaire gauche, on a $\varepsilon = 1$ et donc la polarisation rectiligne de sortie fait un angle de $+\pi/4$ avec l'axe (Ox)
 - ☛ Pour une polarisation circulaire droite, on a $\varepsilon = -1$ et donc la polarisation rectiligne de sortie fait un angle de $-\pi/4$ avec l'axe (Ox)

16.6 Obtention et détection d'une polarisation elliptique

Obtention d'une polarisation elliptique

- ✕ Pour produire une onde polarisée elliptiquement, on utilise un polariseur de direction $\vec{u}_P$ à la suite duquel on place une lame $\lambda/4$ dont les axes neutres font un angle quelconque avec $\vec{u}_P$ (cet angle doit être différent de 0, π et $\pm\pi/4$) : à la sortie de ces deux éléments la polarisation est elliptique.
- ✕ En effet :
 - ☛ A la sortie du polariseur, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}_P(M, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_P$$

Avec : $\varphi = -kz$

- ☛ En notant α , l'angle que fait $\vec{u}_P$ avec l'axe lent (Ox) de la lame, on peut écrire :

$$\vec{E}_P(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

- ☛ Sachant que la lame utilisée est une lame $\lambda/4$, la différence de marche entre les deux composantes du champ électrique sur (Ox) et (Oy) est :

$$\delta = (n_x - n_y)e = \frac{\lambda}{2}$$

Avec e est l'épaisseur de la lame et $n_x > n_y$
et donc le déphasage entre les deux composantes du champ vaut :

$$\varphi_x - \varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

☛ On en déduit le champ à la sortie de la lame :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi + \varphi_x) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cos\left(\omega t + \varphi + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

Avec : $\varphi_x = -n_x k e$

☛ On effectue alors un changement dans la base de temps en posant :

$$t' = t - \frac{n_x e}{c}$$

Et on obtient :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \sin(\omega t' + \varphi) \vec{e}_y$$

On obtient donc bien une polarisation elliptique dont les axes sont les axes neutres de la lame. :

✕ Pour étudier l'hélicité, on étudie $\vec{E}_L$, ainsi que sa dérivée temporelle, à $t' = 0$ en $z = 0$:

$$\vec{E}_L(0, 0) = E_0 \cos \alpha \vec{e}_x$$

$$\left. \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t'} \right|_{(0,0)} = E_0 \omega \sin \alpha \vec{e}_y$$

On distingue alors plusieurs cas :

- ☛ Pour $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ ($\cos \alpha > 0$ et $\sin \alpha > 0$) et pour $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ ($\cos \alpha < 0$ et $\sin \alpha < 0$) , la polarisation est elliptique gauche.
- ☛ Pour $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ ($\cos \alpha < 0$ et $\sin \alpha > 0$) et pour $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$ ($\cos \alpha > 0$ et $\sin \alpha < 0$), la polarisation est elliptique droite.

Détection d'une polarisation elliptique

✕ Pour analyser une onde polarisée elliptiquement, on peut commencer de manière qualitative en plaçant un polariseur sur le faisceau et en tournant le polariseur ; si l'éclairement à la sortie du polariseur varie, sans s'annuler, au cours de la rotation du polariseur alors soit la polarisation est elliptique soit la polarisation est partielle.

✕ Protocole détaillé :

- ☛ On place un polariseur sur le trajet de l'onde à étudier : on note les directions où l'éclairement à la sortie du polariseur est maximale et minimale.
- ☛ On enlève le polariseur et on place sur le trajet de l'onde une lame $\lambda/4$, dont les axes neutres (Ox) (axe lent) et (Oy) coïncident avec les deux directions notées précédemment : l'axe lent sera placée dans la direction du maximum d'éclairement et l'axe rapide suivant la direction de l'axe rapide. L'onde à la sortie de la lame $\lambda/4$ est alors polarisée rectilignement.
- ☛ On place à la suite de la lame $\lambda/4$ un polariseur : en tournant le polariseur, on annule l'éclairement lorsque la direction du polariseur est perpendiculaire à la direction de la polarisation rectiligne en sortie de lame.

✕ Champ électrique en sortie :

- Le champ électrique d'une onde polarisée elliptiquement, dans une base quelconque (OXY) appartenant à un plan d'onde, est de la forme :

$$\vec{E}_0(M, t) = E_{0X} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_X + E_{0Y} \cos(\omega t + \varphi + \Phi) \vec{e}_Y$$

Avec $\varphi = -kz$ et Φ , la phase caractéristique de la polarisation elliptique.

- Sachant que les axes neutres de la lame coïncident avec les axes focaux de l'ellipse ((Ox) coïncide avec le grand axe), ce champ (avant le passage par la lame) dans le repère $(Oxyz)$ s'écrit :

$$\vec{E}_0(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + \varepsilon E_{0y} \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

Avec : $\varepsilon = 1$ pour une elliptique gauche et $\varepsilon = -1$ pour une elliptique droite.

- A la sortie de la lame, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t + \varphi + \varphi_x) \vec{e}_x + \varepsilon E_{0y} \sin\left(\omega t + \varphi + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

Soit, en faisant le changement de variable classique : $t' = t - \frac{n_x e}{c}$

$$\vec{E}_L(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x + \varepsilon E_{0y} \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_y$$

On obtient bien une polarisation rectiligne (le rapport E_x/E_y est constant) et l'angle α de la polarisation rectiligne et l'axe (Ox) vérifie :

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon E_{0y}}{E_{0x}}$$

- Un polariseur faisant un angle droit avec la direction de polarisation permettra effectivement d'éteindre le faisceau à la sortie du dispositif :

$$(\vec{u}_p, (Ox)) = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

✕ Lien entre l'hélicité de la polarisation elliptique et l'angle α de la polarisation :

- Pour une polarisation elliptique gauche, on a $\varepsilon = 1$ et donc la polarisation rectiligne de sortie fait un angle $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ou $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ avec l'axe (Ox)
- Pour une polarisation elliptique droite, on a $\varepsilon = -1$ et donc la polarisation rectiligne de sortie fait un angle $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ ou $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ avec l'axe (Ox)

16.7 Effet d'une lame $\lambda/2$ sur une polarisation rectiligne

- On considère une lame $\lambda/2$ dont les axes neutres sont (Ox) (axe lent) et (Oy) . Dans le repère lié à la lame, l'onde polarisée rectilignement a un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}_0(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

où α est l'angle entre la polarisation rectiligne incidente et l'axe (Ox) et où $\varphi = -kz$.

- Après passage par la lame $\lambda/2$ on observe un déphasage $\Delta\varphi$ tel que :

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - n_y)e = \pi$$

On a donc :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi + \varphi_x) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \sin(\omega t + \varphi + \varphi_x - \pi) \vec{e}_y$$

Soit, en faisant le changement de variable classique : $t' = t - \frac{n_x e}{c}$

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x - E_0 \sin \alpha \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_y$$

On obtient donc une polarisation rectiligne symétrique de la polarisation rectiligne initiale par rapport aux axes neutres de la lame.

16.8 Effet d'une $\lambda/2$ sur une polarisation elliptique

- ✘ On considère une lame $\lambda/2$ dont les axes neutres sont (Ox) (axe lent) et (Oy) . Dans le repère lié à la lame, l'onde polarisée elliptiquement a un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}_0(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t + \varphi + \Phi) \vec{e}_y$$

où $\varphi = -kz$ et Φ est caractéristique de l'ellipse.

- ✘ Après passage par la lame $\lambda/2$ on observe un déphasage $\Delta\varphi$ tel que :

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - n_y)e = \pi$$

On a donc :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t + \varphi + \varphi_x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t + \varphi + \Phi + \varphi_x - \pi) \vec{e}_y$$

Soit, en faisant le changement de variable classique : $t' = t - \frac{n_x e}{c}$

$$\vec{E}_L(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x - E_{0y} \cos(\omega t' + \varphi + \Phi) \vec{e}_y$$

On obtient donc une polarisation elliptique symétrique de la polarisation rectiligne initiale par rapport aux axes neutres de la lame.

16.9 Effet d'une $\lambda/4$ sur une polarisation rectiligne - Cas particulier

- ✘ On considère une lame $\lambda/4$ dont les axes neutres sont (Ox) (axe lent) et (Oy) . Dans le repère lié à la lame, l'onde polarisée rectilignement a un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}_0(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

où α est l'angle entre la polarisation rectiligne incidente et l'axe (Ox) et où $\varphi = -kz$.

- ✘ Après passage par la lame $\lambda/4$ on observe un déphasage $\Delta\varphi$ tel que :

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - n_y)e = \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t + \varphi + \varphi_x) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \sin\left(\omega t + \varphi + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

Soit, en faisant le changement de variable classique : $t' = t - \frac{n_x e}{c}$

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \sin(\omega t' + \varphi) \vec{e}_y$$

On obtient donc une polarisation elliptique dont les axes sont les axes neutres de la lame.

✕ Pour étudier l'hélicité, on étudie $\vec{E}_L$, ainsi que sa dérivée temporelle, à $t' = 0$ en $z = 0$:

$$\vec{E}_L(0,0) = E_0 \cos \alpha \vec{e}_x$$

$$\left. \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t'} \right|_{(0,0)} = E_0 \omega \sin \alpha \vec{e}_y$$

On distingue alors plusieurs cas :

- ☛ Pour $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ ($\cos \alpha > 0$ et $\sin \alpha > 0$) et pour $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$ ($\cos \alpha < 0$ et $\sin \alpha < 0$), la polarisation est elliptique gauche.
- ☛ Pour $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ ($\cos \alpha < 0$ et $\sin \alpha > 0$) et pour $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$ ($\cos \alpha > 0$ et $\sin \alpha < 0$), la polarisation est elliptique droite.

✕ Cas particulier pour $\alpha = \pm\pi/4$:

- ☛ Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et pour $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ la polarisation est circulaire gauche.
- ☛ Pour $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ et pour $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ la polarisation est circulaire droite.

16.10 Effet d'une $\lambda/4$ sur une polarisation circulaire

✕ On considère une lame $\lambda/4$ dont les axes neutres sont (Ox) (axe lent) et (Oy) . Dans le repère lié à la lame, l'onde polarisée circulairement a un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}_0(M, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x + \varepsilon E_0 \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$$

où $\varphi = -kz$ et $\varepsilon = 1$ pour une polarisation circulaire gauche et $\varepsilon = -1$ pour une circulaire droite.

✕ Après passage par la lame $\lambda/4$ on observe un déphasage $\Delta\varphi$ tel que :

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - n_y)e = \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi + \varphi_x) \vec{e}_x + \varepsilon E_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

Soit, en faisant le changement de variable classique : $t' = t - \frac{n_x e}{c}$

$$\vec{E}_L(M, t) = E_0 \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_x + \varepsilon E_0 \cos(\omega t' + \varphi) \vec{e}_y$$

On obtient donc une polarisation rectiligne faisant un angle $\alpha = \pm\pi/4$ avec les axes neutres de la lame :

- ☛ Pour une polarisation circulaire gauche $\varepsilon = 1$ et donc $\alpha = +\pi/4$ (ou $\alpha = \frac{5\pi}{4}$)
- ☛ Pour une polarisation circulaire droite $\varepsilon = -1$ et donc $\alpha = -\pi/4$ (ou $\alpha = \frac{3\pi}{4}$)

16.11 Évolution de la polarisation par réflexion métallique parfaite

Polarisation rectiligne

✕ L'onde polarisée rectilignement peut s'écrire :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

✕ Dans le plan du conducteur parfait (en $z = 0$), on a :

$$\vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) = \vec{0}$$

D'où le champ réfléchi :

$$\vec{E}_r(M, t) = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x$$

Polarisation circulaire

✕ L'onde polarisée circulairement peut s'écrire :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \varepsilon E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

Avec $\varepsilon = 1$ pour une circulaire gauche et $\varepsilon = -1$ pour une circulaire droite.

✕ Dans le plan du conducteur parfait (en $z = 0$), on a :

$$\vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) = \vec{0}$$

D'où le champ réfléchi :

$$\vec{E}_r(M, t) = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x - \varepsilon E_0 \sin(\omega t + kz) \vec{e}_y$$

✕ On a donc :

$$\begin{aligned} \vec{E}(0, 0) &= -E_0 \vec{e}_x \\ \left. \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|_{(0,0)} &= -\varepsilon E_0 \omega \vec{e}_y \end{aligned}$$

La polarisation reste donc circulaire mais l'hélicité est inversée.

16.12 Mesure de biréfringence

Approche qualitative

✕ On considère une lame biréfringente d'épaisseur e et de biréfringence $\Delta n = n_x - n_y > 0$ (l'axe (Ox) étant l'axe lent).

✕ Pour déterminer la biréfringence de la lame, on procède comme suit :

☛ On détermine les axes neutres de la lame :

- ✓ On envoie de la lumière entre deux polariseurs croisés : l'éclairement à la sortie doit être nul.
- ✓ On insère la lame entre les deux polariseurs : l'éclairement en sortie est à nouveau non nul.
- ✓ On tourne la lame (autour de l'axe optique) : les axes neutres de la lame sont alignés avec les directions des deux polariseurs quand l'éclairement en sortie est nul.

☛ On place les deux polariseurs à 45° des axes neutres de la lame et on analyse la lumière en sortie :

- ✓ Soit en comparant la teinte avec une échelle des teintes fournie (pour une différence de marche modérée)
- ✓ Soit en étudiant le spectre de la lumière en sortie.

Détermination de la biréfringence

- ✗ On étudie le montage représenté figure 67.

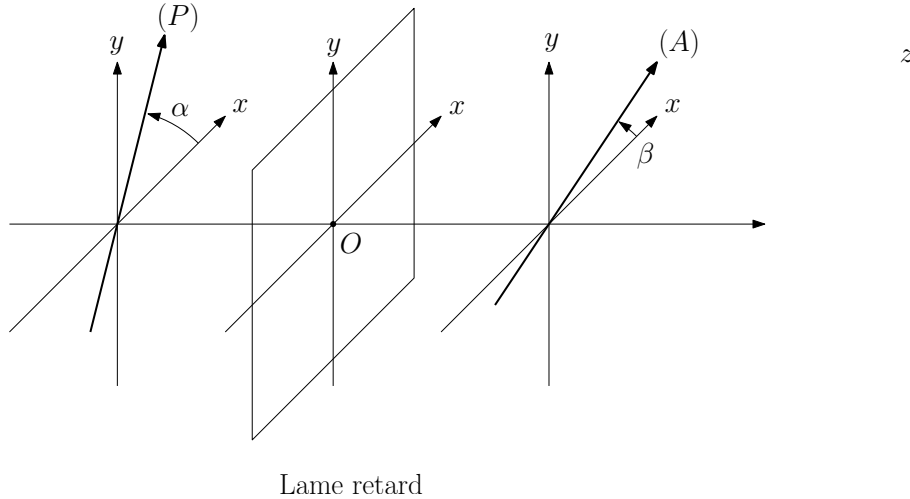


Figure 67

- ✗ On travaille dans le repère de la lame : (Ox, Oy) sont les directions des lignes neutres.
- ✗ Le retard de phase introduit par la lame entre les projections du champ suivant (Oy) et (Ox) est $\Delta\theta = k\Delta n = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n$.
- ✗ Le champ issu du polariseur et arrivant au niveau de la lame est polarisé rectilignement :

$$\vec{E}(z=0, t) = E_0 \exp(j\omega t) \vec{u}_P$$

- ✗ La projection de ce champ sur repère de la lame donne :

$$\vec{E}(z=0, t) = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \exp(j\omega t)$$

- ✗ À la sortie de la lame, le champ est de la forme :

$$\vec{E}(e, t) = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \exp(-j\Delta\theta) \vec{u}_y) \exp\left(j\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}n_x - kz\right)$$

En effectuant un changement dans la base de temps, on peut écrire le champ sous la forme :

$$\vec{E}(e, t) = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \exp(-j\Delta\theta) \vec{u}_y) \exp(j\omega t - kz)$$

- ✗ Le champ à la sortie de l'analyseur est polarisé rectilignement : on trouve sa valeur en projetant le champ issu de la lame sur l'axe de l'analyseur :

$$E_A = \vec{E}(z, t) \cdot \vec{u}_A = \vec{E}(z, t) \cdot (\cos \beta \vec{u}_x + \sin \beta \vec{u}_y)$$

$$E_A = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \exp(-j\Delta\theta) \vec{u}_y) \cdot (\cos \beta \vec{u}_x + \sin \beta \vec{u}_y) \exp(j\omega t - kz)$$

$$E_A = E_0 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \exp(-j\Delta\theta)) \exp(j\omega t - kz)$$

✕ D'où, l'expression de l'éclairement à la sortie de l'analyseur :

$$I_A = kE_0^2 \left(\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \Delta\theta \right)$$

$$I_A = kE_0^2 \left(\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos \Delta\theta \right)$$

$$I_A = I_0 \left(\cos^2 (\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) \right)$$

Ainsi, l'intensité résultante n'est pas la somme des intensités des deux vibrations transmises par la lame : on peut dire que les deux vibrations déphasées de $\Delta\theta$ interfèrent grâce à l'analyseur qui rend leur directions parallèles.

✕ **Cas où le polariseur et l'analyseur sont croisés et font un angle de 45° avec les axes de la lame**

On se place dans le cas où (P) et (A) sont croisés et font un angle de 45° avec les axes de la lame. On peut par exemple prendre :

$$\alpha = 45^\circ \text{ et } \beta = -45^\circ$$

On obtient alors :

$$I = I_0 \sin^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)$$

✕ **Cas où le polariseur et l'analyseur sont parallèles et font un angle de 45° avec les axes de la lame**

On se place dans le cas où (P) et (A) sont parallèles et font un angle de 45° avec les axes de la lame. On peut par exemple prendre :

$$\alpha = 45^\circ \text{ et } \beta = 45^\circ$$

On obtient alors :

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)$$

✕ **Interprétation**

Les interférences sont constructives ($I = I_0$) ou destructives ($I = 0$) suivant la valeur de $\Delta\theta$. Comme $\Delta\theta$ dépend de λ , pour une lame donnée, certaines longueurs d'onde donnent des interférences constructives et d'autres destructives. Si la lumière incidente est blanche et la lame est suffisamment fine, la lumière transmise sera colorée, d'une teinte caractéristique de l'épaisseur et de la biréfringence de la lame (échelle des teintes de Newton).

✕ **Mesure de la biréfringence à l'aide d'un spectromètre**

- ☛ on se placera dans le cas où le polariseur et l'analyseur font un angle de 45° avec les axes de la lame. Pour cela, on déterminera les axes neutres de la lame et croisant le polariseur et l'analyseur et en tournant l'ensemble jusqu'à ce que l'éclairement sur l'écran soit nul.
- ☛ On utilise un spectrophotomètre et on détermine les longueurs d'onde éteintes : en partant du violet, on note λ_k la valeur de la k^{eme} longueur d'onde éteinte.
- ☛ Une longueur d'onde éteinte est caractérisée par un entier p (différent de k !) tel que :

$$\mathcal{E} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{2\pi}{2\lambda} e \Delta n = \frac{\pi}{2} + p\pi$$

Soit :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{e \Delta n} \left(\frac{1}{2} + p \right)$$

- ☛ Sachant que p et k sont deux entiers, il existe un entier p_0 relatif tel que :

$$p = p_0 + k$$

D'où :

$$\frac{1}{\lambda_k} = \frac{1}{e\Delta n} \left(\frac{1}{2} + p_0 + k \right)$$

- ☛ Ainsi, en traçant $\frac{1}{\lambda_k}$ en fonction de k , on obtient une droite de pente $\frac{1}{e\Delta n}$ ce qui nous permet de déterminer Δn connaissant e .

17 LASER

SVF

- ✕ Soit un atome à deux niveaux d'énergie (E_1 et $E_2 > E_1$). Montrer que les populations électroniques dans ces deux niveaux vérifient à l'équilibre thermique :

$$N_{1e} = N \frac{A_{21} + B_{21}u_{\nu_e}}{A_{21} + (B_{12} + B_{21})u_{\nu_e}}$$

$$N_{2e} = N \frac{B_{12}u_{\nu_e}}{A_{21} + (B_{12} + B_{21})u_{\nu_e}}$$

Donner la signification des différents termes intervenants dans ces expressions

- ✕ Montrer que les coefficients d'Einstein vérifient :

$$A_{21} = A = \frac{1}{\tau_{rad}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{12}$$

$$B_{12} = B_{21} = B$$

- ✕ Justifier que :

$$A = \frac{1}{\tau}$$

où τ est le temps de vie du niveau excité (niveau d'énergie E_2)

- ✕ Montrer qu'un pompage optique radiatif entre les deux niveaux d'énergie, permet au mieux d'égaliser les deux populations.
- ✕ Montrer que l'intervalle spectral entre deux modes longitudinaux d'une cavité LASER vaut :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d}$$

- ✕ On donne le champ $\vec{E}$ d'un faisceau gaussien :

$$\vec{E}(r, z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \exp j\left(-\frac{2\pi}{\lambda}z - \frac{\pi r^2}{\lambda R(z)}\right) \vec{e}_x$$

Avec :

$$\left| \begin{array}{l} \checkmark \quad W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \\ \checkmark \quad z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \\ \checkmark \quad R(z) = z + \frac{z_0^2}{z} \end{array} \right.$$

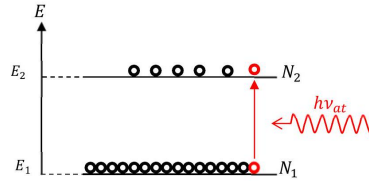
- Déterminer l'intensité du faisceau $I(r, z)$ et donner son profil en fonction de z
- On appelle longueur de Rayleigh, notée L_R , la distance mesurée à partir du point de cote $z = 0$ où le rayon W_0 est minimal à laquelle on bascule du modèle faisceau cylindrique au modèle du faisceau conique. Exprimer L_R .
- Proposer un protocole permettant d'obtenir une onde quasiment sphérique à partir d'un faisceau LASER
- Proposer un protocole permettant d'obtenir un faisceau quasiment cylindrique à partir d'un faisceau LASER

17.1 Évolution des populations - populations à l'équilibre

✕ Processus d'absorption

Pour passer du niveau fondamental E_1 au niveau excité E_2 , un atome absorbe du rayonnement. Le nombre d'atomes qui passent de E_1 à E_2 pendant un temps dt est proportionnel à dt ; à N_1 et à la densité d'énergie électromagnétique u_ν ¹⁵ et à la fréquence ν_{at} :

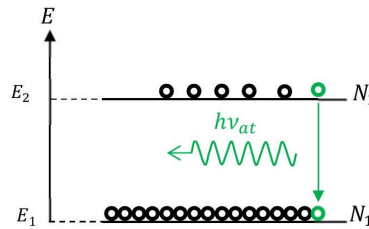
$$(dN_2)_{abs} = -(dN_1)_{abs} = B_{12} \times u_\nu \times N_1 \times dt$$



✕ Processus d'émission spontanée

Pour permettre à un atome de se désexciter, on imagine un processus exponentiel, selon lequel le nombre d'atomes qui pendant dt , retombent de E_2 à E_1 , est proportionnel à la population du niveau E_2 ; à dt mais est indépendant de u_ν :

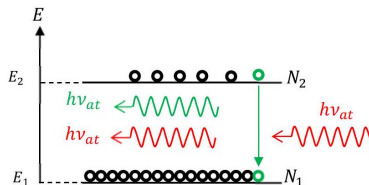
$$-(dN_2)_{sp} = (dN_1)_{sp} = A_{21} \times N_2 \times dt$$



✕ Processus d'émission stimulée

Les atomes peuvent se désexciter sous l'influence du rayonnement : le nombre d'atomes qui, pendant dt , par émission stimulée passent de E_2 à E_1 est proportionnel à dt ; à N_2 et à la densité d'énergie électromagnétique u_ν à la fréquence ν_{at} :

$$-(dN_2)_{st} = (dN_1)_{st} = B_{21} \times u_\nu \times N_2 \times dt$$



✕ Populations à l'équilibre

- En prenant en compte les trois mécanismes d'émission spontanée, d'émission stimulée et d'absorption, on obtient :

$$\frac{dN_1}{dt} = \left(\frac{dN_1}{dt} \right)_{abs} + \left(\frac{dN_1}{dt} \right)_{sp} + \left(\frac{dN_1}{dt} \right)_{st} = -B_{12} \times u_\nu \times N_1 + A_{21} \times N_2 + B_{21} \times u_\nu \times N_2 = -\frac{dN_2}{dt}$$

15. $u_\nu = \frac{d\langle u_{em} \rangle}{d\nu}$ s'exprime donc en $J \cdot s \cdot m^{-3}$, ici il s'agit donc de $u_\nu(\nu_{at})$

☛ À l'équilibre, on obtient donc :

$$B_{12} \times u_{\nu_e} \times N_{1e} = (A_{21} + B_{21} \times u_{\nu_e}) \times N_{2e}$$

☛ En introduisant le nombre total d'atomes :

$$N = N_1 + N_2 = N_{1e} + N_{2e}$$

, on obtient :

$$N_{1e} = N \frac{A_{21} + B_{21} u_{\nu_e}}{A_{21} + (B_{21} + B_{21}) u_{\nu_e}}$$

$$N_{2e} = N \frac{B_{12} u_{\nu_e}}{A_{21} + (B_{21} + B_{21}) u_{\nu_e}}$$

17.2 Expressions des coefficients d'Einstein

✕ Quand l'échantillon est à l'équilibre thermique à la température T , ses populations prennent des valeurs obéissant à la statistique de Maxwell-Boltzmann :

$$\begin{cases} N_{1e} = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) \\ N_{2e} = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \frac{N}{\exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right)}$$

Notons que si $E_2 - E_1 \gg k_B T$ alors $N_{2e} \ll N_{1e}$: A l'équilibre thermique, seul le fondamental est pratiquement peuplé.

✕ On a donc :

$$\frac{N_{1e}}{N_{2e}} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

✕ Or :

$$B_{12} \times u_{\nu_e} \times N_{1e} = (A_{21} + B_{21} \times u_{\nu_e}) \times N_{2e}$$

entraîne :

$$u_{\nu_e} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \frac{B_{12}}{B_{21}} - 1}$$

✕ Cette expression est à rapprocher de la densité spectrale d'énergie électromagnétique d'un corps noir à la température T :

$$u_{\nu_e} = \frac{\left(\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\right)}{\exp\frac{h\nu}{k_B T} - 1}$$

⇒ En identifiant les deux formules, on trouve :

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad \text{et} \quad \frac{B_{12}}{B_{21}} = 1$$

17.3 Temps de vie du niveau excité

- ✗ La distribution d'atomes étant à l'équilibre à la température T , on s'écarte de l'équilibre, par un processus quelconque : N_2, N_1 et u_ν gardent des valeurs proches de l'équilibre. Comme il s'agit de transitions optiques, la différence d'énergie $E_2 - E_1 = h\nu$ est très grande devant $k_B T$.
- ✗ Dans ces conditions :

$$u_\nu \approx u_{\nu e} = \frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\exp \frac{h\nu}{k_B T} - \left(\frac{B}{B'}\right)} \approx \left(\frac{A}{B}\right) \times \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \Rightarrow u_\nu B \approx A \times \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \ll A$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} + A \times N_1 &= A \times N \\ \frac{dN_2}{dt} + A \times N_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Les populations reviennent donc à leurs valeurs à l'équilibre avec la même constante de temps :

$$\tau_{\text{rad}} = \frac{1}{A} \text{ Durée de vie radiative de l'état excité}$$

17.4 Effet d'un pompage optique direct

- ✗ La distribution d'atomes étant à l'équilibre, on l'éclaire subitement avec un faisceau lumineux intense de même fréquence que la transition atomique (faisceau de pompage) : N_2, N_1 et u_ν ne gardent plus des valeurs proches de l'équilibre. Pour simplifier, on supposera que l'épaisseur de l'échantillon est suffisamment faible pour que le faisceau de pompage ne soit pas sensiblement atténué en traversant la distribution : u_ν est alors constante dans tout l'échantillon.
- ✗ On obtient, en régime permanent :

$$\begin{aligned} N_{1p} &= N \frac{A + B \times u_\nu}{A + 2 \times B \times u_\nu} \\ N_{2p} &= N \frac{B \times u_\nu}{A + 2 \times B \times u_\nu} \end{aligned}$$

Si le faisceau est suffisamment intense alors on peut considérer que $A \ll Bu_\nu$, on obtient alors :

$$N_{1p} = N_{2p} = \frac{N}{2}$$

Ainsi, par un pompage optique intense, sur un système à deux niveaux, on peut au mieux égaliser les populations des deux niveaux.

17.5 Modes longitudinaux d'une cavité LASER

- ✗ En considérant que les coefficients de réflexion sur les bords de la cavité sont égaux à 1 et en assimilant la cavité à une cavité 1D, les modes propres de la cavité sont classiquement donnés par :

$$\sin(kL) = 0$$

Où L est la longueur de la cavité

✕ On en déduit :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\nu_n = \frac{k_n c}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$$

✕ L'intervalle spectrale libre vaut donc :

$$\nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2L}$$

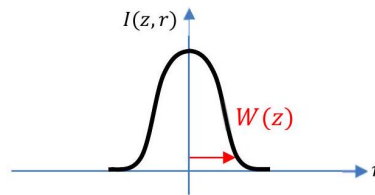
17.6 Étude du faisceau gaussien

Intensité, profil

✕ On calcule l'intensité facilement :

$$I(z, r) = \frac{1}{2} |\vec{E}(r, z)|^2 = \underbrace{\frac{E_0^2}{2}}_{I_0} \frac{W_0^2}{W^2(z)} \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2(z)}\right)$$

✕ Le graphe de $I(z, r)$ en fonction de r , à z fixé, a la forme d'une gaussienne de telle sorte que $W(z)$ apparaît comme le rayon :



✕ Plus précisément, $W(z)$ correspond à la valeur de r , à z fixé, pour laquelle l'intensité maximale est divisée par e^2 . En effet :

☛ Pour z fixé, $I_{max}(z)$ est donnée par :

$$I_{max}(z) = I(r = 0, z) = I_0 \frac{W_0^2}{W^2(z)}$$

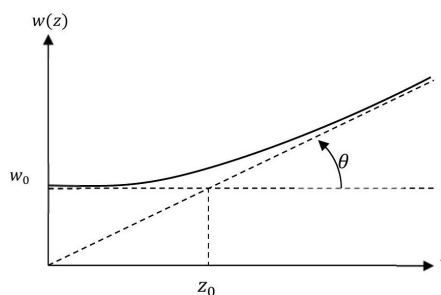
Et donc :

$$I(z, r) = I_{max}(z) \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2(z)}\right)$$

☛ En remplaçant r par $W(z)$, on obtient :

$$I(z, W(z)) = I_{max}(z) \exp(-2) = \frac{I_{max}(z)}{e^2}$$

✕ Le graphe de $W(z)$ fait apparaître deux zones :



- ☛ Pour $|z| \ll z_0$, $W(z)$ varie peu et on peut considérer le faisceau comme cylindrique de rayon W_0 .
- ☛ Pour $|z| \gg z_0$, on a $W(z) \approx \frac{W_0}{z_0} z$ de telle sorte que le bord du faisceau est conique de centre O et de demi-angle au sommet : $\theta = \frac{W_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi W_0}$
- ✕ On peut ainsi faire l'analogie avec la diffraction que ferait un trou de rayon W_0 éclairé par une OPPM de longueur d'onde λ :

$$\theta_{\text{trou}} = \frac{1,22\lambda}{2W_0}$$

$\Rightarrow$ La diffraction est une propriété attachée à la propagation d'un faisceau confiné.

Dans le cas du laser, tout se passe comme si le faisceau diffractait sur son propre bord dans la zone cylindrique.

- ✕ L'angle de la tangente au faisceau se détermine comme suit :
- ☛ On considère que la taille du faisceau est déterminée par $W(z)$:

$$r = W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$$

, relation que l'on met au carré et que l'on différentie :

$$2rdr = W_0^2 \times \frac{2zdz}{z_0^2}$$

- ☛ La tangente au faisceau fait donc un angle $\alpha(z)$ avec (Ox) tel que :

$$\tan \alpha(z) = \frac{dr}{dz} = \frac{W_0^2}{z_0^2} \frac{z}{r} = \frac{W_0}{z_0^2} \frac{z}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}} = \frac{\lambda}{\pi W_0} \frac{\frac{z}{z_0}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}}$$

- ✓ Pour $|z| \ll z_0$, on a :

$$\tan \alpha \approx \theta \approx \underbrace{\frac{\lambda}{\pi W_0}}_{\theta} \frac{z}{z_0} \ll \theta$$

$\Rightarrow$ on peut considérer le faisceau comme cylindrique de rayon W_0 .

- ✓ Pour $|z| \gg z_0$, on a ;

$$\tan \alpha(z) \approx \alpha(z) \approx \frac{\lambda}{\pi W_0} = \theta = \mathcal{C}$$

de telle sorte que le bord du faisceau est conique de centre O et de demi-angle au sommet :

$$\alpha(z) = \theta = \frac{W_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi W_0}$$

Longueur de Rayleigh

- ✕ En $z = L_R$, le rayon $\theta \times L_R$ du faisceau est égal au rayon W_0 du faisceau cylindrique :

$$W_0 = \theta \times L_R = \frac{\lambda L_R}{\pi W_0} \Rightarrow L_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} = z_0$$

- ✕ Pour un laser hélium-néon, tel que $W_0 = 1$ mm et $\lambda = 632$ nm, on trouve $L_R \approx 5$ m.

- ✗ La longueur de Rayleigh peut être interprétée comme l'ordre de grandeur de la distance à partir de laquelle la diffraction du laser sur les bords modifie de manière significative la forme du faisceau, le faisant progressivement passer d'une forme cylindrique à une forme conique.

Obtention d'un faisceau divergent (onde sphérique)

- ✗ On place une lentille mince convergente de focale f' de telle sorte que son axe optique soit confondu avec l'axe du laser, dans la zone nettement en deçà de la distance de Rayleigh où le faisceau est quasi cylindrique de rayon W_0 .
- ✗ Approche géométrique : les rayons incidents sont tous parallèles à l'axe optique donc ils doivent converger au foyer F_0 de la lentille et le faisceau qui émerge de la lentille doit donc être conique de demi-angle au sommet :

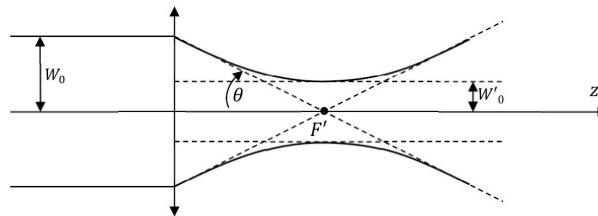
$$\theta = \frac{W_0}{f'}$$

- ✗ En réalité, le faisceau est gaussien et les lois de l'optique géométrique ne s'appliquent pas. En pratique, on observe **une tache focale dans le plan focal image de la lentille** et non un point¹⁶ Le faisceau conique ne peut pas vraiment converger en F' mais y atteint son rayon minimal W_0' tel que :

$$\theta = \frac{W_0}{f'} = \frac{\lambda}{\pi W_0'}$$

Soit :

$$W_0' = \frac{\lambda f'}{\pi W_0}$$



Ainsi, pour augmenter la divergence du faisceau et pouvoir le considérer comme sphérique, on a intérêt à choisir f' la plus courte possible.

- ✗ En pratique le rayon de bord a de la lentille doit être supérieur à W_0 si on veut conserver tout le faisceau laser initial. Il faut donc prendre une lentille d'ouverture numérique $\frac{a}{f'}$ la plus grande possible mais on est gêné par les aberrations. Par exemple avec $a \approx f' \approx W_0$, il vient :

$$W_0' \approx \lambda$$

- ✗ Partant d'un laser He - Ne de puissance 0,1 mW, on obtient une intensité lumineuse $I_0 = 3 \times 10^1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ en sortie et une intensité lumineuse $I_0' = 9 \times 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ sur la tache de focalisation.

Obtention d'un faisceau cylindrique (OPPM)

- ✗ On place une deuxième lentille mince convergente de focale f'' de telle sorte que son foyer objet F'' coïncide avec le point de focalisation F' du laser par la première lentille.

16. ce fait peut s'interpréter en utilisant le renversement du temps dans la construction qui a permis de définir la longueur de Rayleigh.

- ✕ Avec une tache de rayon $W'_0 \approx \lambda$, on a :

$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi W'_0} \approx \frac{1}{\pi}$$

et

$$L'_R = \frac{\pi W_0'^2}{\lambda} \approx \pi \lambda$$

, de telle sorte que la deuxième lentille soit naturellement située au-delà de la longueur de Rayleigh dans la zone où le faisceau est conique.

- ✕ Dans le cadre de l'optique géométrique, ce faisceau émerge de la deuxième lentille parallèlement à l'axe optique avec un rayon $W''_0 \approx f''\theta' \approx \frac{f''}{\pi}$ qui représente naturellement le rayon minimal du faisceau émergent.
- ✕ D'après l'étude générale d'un faisceau laser, au-delà de sa longueur de Rayleigh L''_R , le faisceau émergent aura une divergente angulaire :

$$\theta'' \approx \frac{\lambda}{\pi W''_0} = \frac{\lambda}{f''} \approx 10^{-6} \text{ rad pour } f'' \approx 1 \text{ m}$$

