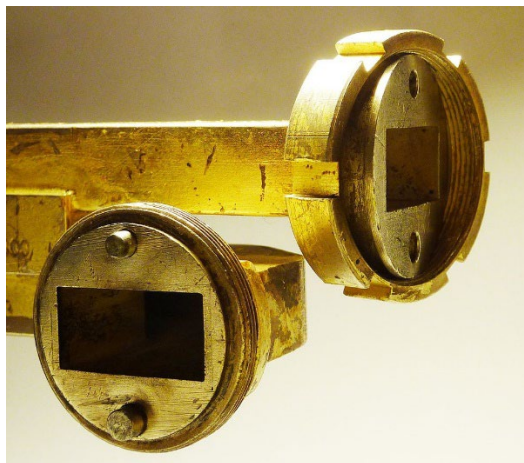


LE GUIDE D'ONDE.

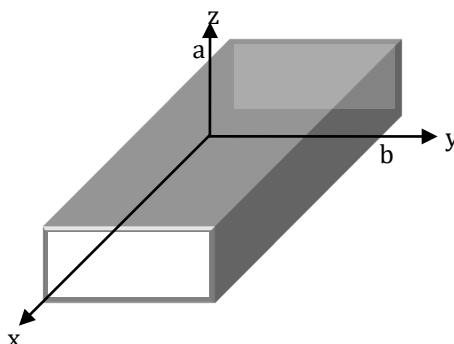
UN EXEMPLE DE SYSTEME DISPERSIF.



Détail d'un guide d'onde hyperfréquences

1. MODELISATION.

- Un guide d'onde est une canalisation cylindrique, ou à section rectangulaire, **soit vide soit remplie d'un diélectrique** où se propagent les ondes électromagnétiques. **Le guide d'onde sert à transporter des ondes électromagnétiques dans le domaine des radiofréquences** en les canalisant.
- En supposant les conducteurs parfaits et en utilisant les conditions de passage, on obtient les relations suivantes au niveau de l'interface conducteur/vide : $\vec{B}_\perp = \vec{0}$ et $\vec{E}_\parallel = \vec{0}$
- On considère un guide d'onde rectangulaire d'axe (Ox) de section de cotés a et b.



- On cherche les solutions sous la forme : $\vec{E}(M, t) = \underbrace{E(y, z)}_E \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$

⇒ Le champ électrique étant perpendiculaire à la direction de propagation, on dit que le mode cherché est transverse électrique (TE)

$$\Rightarrow \text{Le champ } \vec{E} \text{ cherché doit vérifier : } \begin{cases} \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \vec{E}(z=0) = \vec{E}(z=a) = \vec{0} \end{cases}$$

2. DETERMINATION DES CHAMPS ELECTRIQUE ET MAGNETIQUE.

- Dans l'espace inter-conducteur, les équations de Maxwell vérifiées sont celles correspondant au vide sans charge :

$$\begin{cases} MG & \text{div}(\vec{E}) = 0 \\ M\Phi & \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ MF & \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA & \text{rot}(\vec{B}) = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

- En utilisant l'expression $\vec{E}(M, t) = E(y, z) \cdot \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$, l'équation de MG devient : $\underbrace{\frac{\partial E}{\partial x}}_0 + \frac{\partial E}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial E}{\partial z}}_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M, t) = E(z) \cdot \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

- En injectant cette expression dans l'équation de d'Alembert, on obtient : $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow -k^2 E(z) \cos(\omega t - kx) + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \cos(\omega t - kx) = -\frac{\omega^2}{c^2} \cos(\omega t - kx) E(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(z) = 0$$

- Si $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) < 0$ les solutions de cette équation différentielle ne sont pas périodiques $\Rightarrow$ cas exclu.
- Si $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) > 0$ les solutions de cette équation différentielle sont périodiques $\Rightarrow$ **cas étudié.**

$$\Rightarrow \text{Posons : } K^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \text{ alors : } E(z) = A \cos(Kz) + B \sin(Kz)$$

- Les conditions limites donnent : $\begin{cases} E(z=0) = 0 = A \\ E(z=a) = 0 = B \sin(Ka) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ K_n = \frac{n\pi}{a} \end{cases}$ n étant un entier

$\Rightarrow$ La pulsation ω et k sont donc liés : $k_n^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)$: relation de dispersion.

$$\Rightarrow \vec{E}_n(z, x, t) = \underbrace{E_{on} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right)}_{E_n} \cos(\omega t - k_n x) \vec{u}_y \quad (\text{mode TE}_n)$$

Attention ! Les solutions réelles trouvées ne sont valables que si k_n est réel (et donc si $\omega > \frac{n\pi}{a} c$)

- Détermination de $\vec{B}$:

Attention !! L'onde n'étant pas plane, on ne peut pas utiliser la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. Notons

qu'utiliser l'équation de MA est trop compliqué (détermination de $\vec{B}$ à partir de son rotationnel).

$\Rightarrow$ On utilise l'équation de MF : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial E_n}{\partial z} \\ \frac{\partial E_n}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -E_{on} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_n x) \\ -E_{on} k_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin(\omega t - k_n x) \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_n(x, z, t) = \begin{vmatrix} E_{on} \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin(\omega t - k_n x) \\ 0 \\ E_{on} \frac{k_n}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_n x) \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Le champ $\vec{B}_n$ n'est pas transverse (composante suivant la direction de propagation).

- Notons qu'étudier les conditions de passage en $z=0$ et $z=a$ pour le champ $\vec{B}$ nous permettraient de déterminer les courants surfaciques.

3. ETUDE DE LA RELATION DE DISPERSION.

$$\text{Partons de : } k_n^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)$$

Cas où $\omega > \frac{n\pi}{a}c$:

- Nous avons déjà étudié le cas où $\omega > \frac{n\pi}{a}c$: L'onde se propage dans la direction des x croissants et a pour

$$\text{vecteur d'onde } \vec{k} = k_n \vec{e}_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \vec{e}_x.$$

- Ainsi pour que l'onde TE_n se propage, il faut que $\omega \geq \omega_{cn}$ où $\omega_{cn} = \frac{n\pi}{a}c$ est la pulsation de coupure. Notons que pour $\omega < \frac{n\pi}{a}c$ aucun mode ne se propage.

- Soit λ_o la longueur d'onde de l'onde électromagnétique en dehors du guide d'onde : $\lambda_o = \frac{2\pi}{k_o} = \frac{2\pi c}{\omega}$ et soit

$$\lambda_n \text{ la longueur d'onde de l'onde électromagnétique TE}_n \text{ dans le guide d'onde : } \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$$

$$\Rightarrow \text{D'après } k_n^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right), \text{ on a : } \lambda_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)}} = \frac{\lambda_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_o n}{2a}\right)^2}} > \lambda_o$$

$\Rightarrow$ Les longueurs d'onde dans le guide sont supérieures à celle de l'onde dans le vide.

- Pour $\omega \gg \omega_{cn}$ (et donc $\lambda_o \ll \lambda_{cn}$), la relation de dispersion donne : $k_n = \left(\frac{\omega}{c}\right)$

$\Rightarrow$ On retrouve la relation de dispersion d'une onde électromagnétique (sans obstacles)

$\Rightarrow$ La longueur d'onde est tellement petite que l'onde ne voit pas les limites imposées par le guide d'onde.

Cas où $\omega < \frac{n\pi}{a}c$:

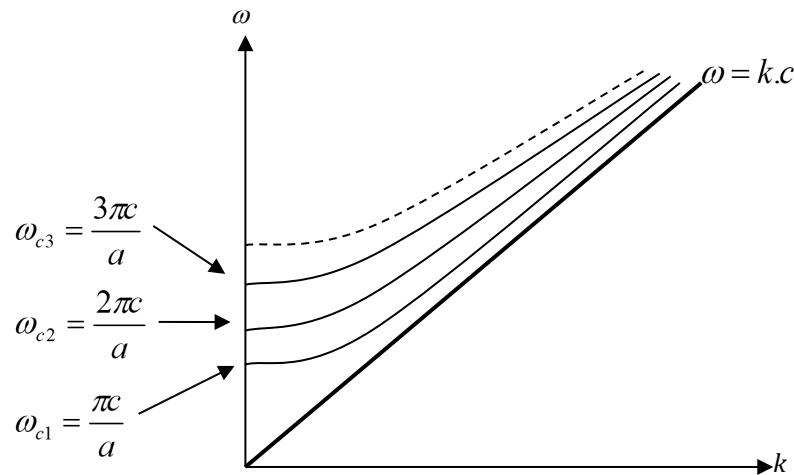
- Si $\omega \leq \frac{n\pi}{a}c$ alors $k_n^2 < 0 \Rightarrow k_n$ est donc imaginaire pur : $k_n = \pm i k''_n$ où $k''_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$

$\Rightarrow$ En reprenant l'étude précédente en notation complexe, on arrive à :

$$\vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) e^{j(\omega t - k_n x)} \vec{u}_y \Rightarrow \vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} e^{-k''_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) e^{j(\omega t)} \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} e^{-k''_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

⇒ L'onde ne se propage pas : On est en présence d'une onde stationnaire évanescente.



4. VITESSE DE PHASE/VITESSE DE GROUPE.

- Vitesse de phase : $V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cn}}{\omega}\right)^2}} > c$

- Vitesse de groupe : $V_g = \frac{d\omega}{dk}$

Or, $k^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) \Rightarrow 2k.dk = 2\frac{\omega.d\omega}{c^2} \Rightarrow V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega}c^2 = \frac{c^2}{V_\phi} \Rightarrow V_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cn}}{\omega}\right)^2} < c$

- Notons que la relation $V_g.V_\phi = c^2$ n'est valable que pour les relations de dispersion de la forme :

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \text{Cste} : \text{Cette relation de dispersion est appelée relation de Klein-Gordon.}$$

5. APPROCHE ENERGETIQUE.

- Partons de $\vec{E}_n(z, x, t) = E_{on} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \cos(\omega t - k_n x) \vec{u}_y$ et $\vec{B}_n(x, z, t) = \begin{cases} E_{on} \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \sin(\omega t - k_n x) \\ 0 \\ E_{on} \frac{k_n}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \cos(\omega t - k_n x) \end{cases}$

a. DENSITE D'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE.

- $u_{em} = \frac{\epsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o}$

D'où :

$$u_{em} = \frac{\epsilon_o \cdot E_{on}^2}{2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos^2(\omega t - k_n x) + \frac{E_{on}^2}{2\mu_o} \left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin^2(\omega t - k_n x) + \frac{E_{on}^2}{2\mu_o} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos^2(\omega t - k_n x)$$

- D'où la valeur moyenne de u_{em} :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_o \cdot E_{on}^2}{4} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) + \frac{E_{on}^2}{4\mu_o} \underbrace{\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2}_{\frac{1}{c^2} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2} \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) + \frac{E_{on}^2}{4\mu_o} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right)$$

$$\Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_o \cdot E_{on}^2}{4} \left(1 + \left(\frac{k \cdot c}{\omega}\right)^2 \left(\sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) - \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \right) \right)$$

- On en déduit l'énergie électromagnétique moyenne dans le guide d'onde (longueur L)

$$\langle U_{em} \rangle = \int_{z=0}^a \int_{y=0}^b \int_{x=0}^L \langle u_{em} \rangle dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\epsilon_o \cdot E_{on}^2}{4} \cdot abL$$

b. VECTEUR DE POYNTING

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_o} \Rightarrow \vec{\Pi} = \begin{pmatrix} \left(\frac{E_{on}^2 \cdot k}{\mu_o \omega}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos^2(\omega t - k_n x) \\ 0 \\ \left(-\frac{E_{on}^2 \cdot n \cdot \pi}{\mu_o \cdot a \cdot \omega}\right) \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_n x) \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{a} z\right) \sin(\omega t - k_n x) \end{pmatrix}$$

- D'où la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$: $\langle \vec{\Pi} \rangle = \left(\frac{E_{on}^2 \cdot k}{2\mu_o \omega}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \vec{u}_x$

- D'où la puissance moyenne traversant une section droite $S=a \cdot b$:

$$P = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \int_{z=0}^a \int_{y=0}^b \left(\frac{E_{on}^2 \cdot k}{2\mu_o \omega}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dy \cdot dz \Rightarrow P = \frac{E_{on}^2 \cdot k}{4\mu_o \omega} \cdot a \cdot b$$

c. VITESSE DE DEPLACEMENT DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE :

- L'énergie électromagnétique traversant La surface $S=a \cdot b$ pendant dt est :

$$dE = P dt = \frac{E_{on}^2 \cdot k}{4\mu_o \omega} \cdot a \cdot b dt$$

- Cette énergie est égale à l'énergie contenue dans le parallélépipède de dimensions :

$$\begin{cases} 0 < x < V_e dt \\ 0 < y < b \\ 0 < z < a \end{cases}$$

On a donc également : $dE = \int_{z=0}^a \int_{y=0}^b \langle u_{em} \rangle dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{V_e dt} = \frac{\epsilon_o E_{on}^2}{4} a \cdot b \cdot V_e dt$

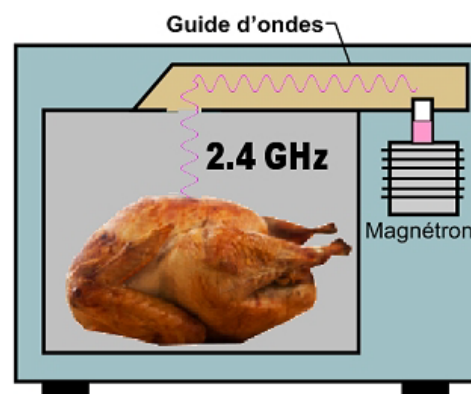
$\Rightarrow$ En égalisant les deux termes : $dE = \frac{E_{on}^2 \cdot k}{4\mu_o \omega} \cdot a \cdot b dt = \frac{\epsilon_o E_{on}^2}{4} a \cdot b \cdot V_e dt$

$\Rightarrow V_e = \frac{k}{\epsilon_o \mu_o \omega} = c^2 \frac{k}{\omega} \Rightarrow V_e = \frac{c^2}{V_\phi} = V_g$

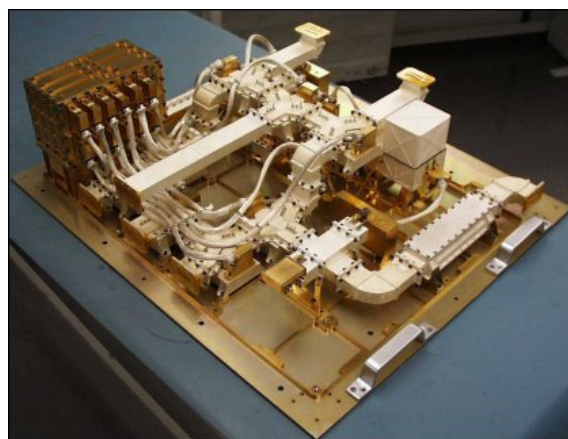
$\Rightarrow$ La vitesse de propagation de l'énergie est égale à la vitesse de groupe.

6. EXEMPLES.

a. FOUR A MICRO-ONDES (F=2.4 GHz).



b. SATELLITE ASCAT (TROIS ANTENNES RECEPTRICES, F=5.3 GHz).



c. ANTENNE D'OUVERTURE
(LA FREQUENCE DEPEND DE LA TAILLE DE L'ANTENNE)

