Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique de section rectangulaire

- On considère la conduite représentée figure (1)

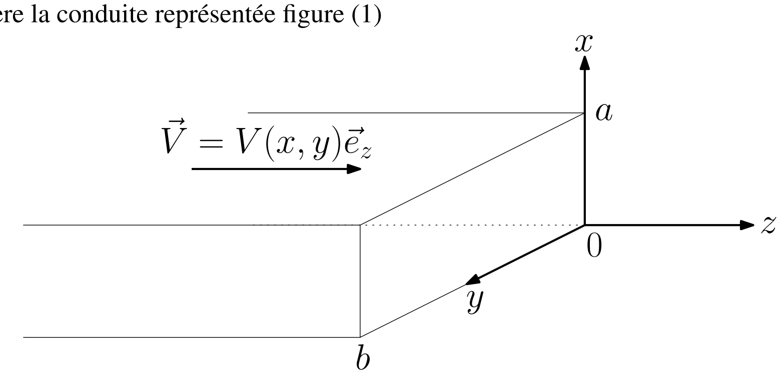

Figure 1 – Représentation de la conduite étudiée

- L'écoulement dans la conduite est dû à un gradient de pression constant :

$$\frac{\Delta P}{L} < 0$$

- Le champ des vitesses de cet écoulement est donc de la forme :

$$\vec{V} = V(x,y)\vec{e}_z$$

- Les conditions limites vérifiées par ce champ sont :

$$V(0,y) = V(x,0) = V(a,y) = V(x,b) = 0$$

- L'équation de Navier Stokes, donne très rapidement (en négligeant les effets de la pesanteur) :

$$\nabla^2(V) = -\frac{\Delta P}{L\eta} = -K$$

1 Recherche de modes propres

- On cherche des solutions à variables séparées : $V(x,y) = f(x)g(y)$ et on cherche λ telle que :

$$\nabla^2(V) = \lambda V(x,y)$$

On obtient alors :

$$\frac{d^2f}{dx^2}g(y) + \frac{d^2g}{dy^2}f(x) = \lambda f(x)g(y)$$

Soit :

$$\frac{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)}{f(x)} = \lambda - \frac{\left(\frac{d^2g}{dy^2}\right)}{g(y)}$$

- Ceci étant vrai quelque soit x et y, les termes de cette équation sont constants (C). On obtient donc :

$$\frac{d^2f}{dx^2} - Cf(x) = 0$$

Vu les conditions limites, la constante C est obligatoirement négative. Posons : $C = -k^2$, on obtient donc :

$$f(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

Sachant que $f(0) = 0$, on obtient $A = 0$ et sachant que $f(a) = 0$, on obtient :

$$k = k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Avec n entier relatif.

- ✘ L'équation différentielle vérifiée par g est alors de la forme :

$$\frac{d^2g}{dy^2}+k'^2g(y)=0 \text{ avec } k'^2=-\lambda-k^2$$

On en déduit :

$$g(y)=A'\cos k'y+B'\sin k'y$$

En tenant compte des conditions aux limites, on obtient cette fois :

$$A'=0 \text{ et } k'=k'_m=\frac{m\pi}{b}$$

Avec m entier relatif.

- ✘ Finalement, le mode propre (n,m) s'écrit :

$$V_{nm}(x,y)=A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\right)$$

- ✘ La fonction recherchée pouvant s'écrire comme une combinaison linéaire des modes propres trouvés précédemment, on obtient :

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

2 Coefficients de Fourier

- ✘ Le Laplacien de la fonction $V(x,y)$ vaut :

$$\nabla^2V=-\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)=-K$$

2.1 Expression des coefficients de Fourier par analogie avec les séries de Fourier 1D

- ✘ On part de la décomposition d'une fonction f, a périodique :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

Avec :

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

- ✘ Ici, on a une fonction f vérifiant : $f(x,y)=\nabla^2V=-K$ et telle que :

$$f(x,y)=-\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)A_{nm}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

- ✘ Par analogie, on a donc :

$$-\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)A_{nm}=\frac{2}{a}\times\frac{2}{b}\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b}f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dxdy$$

- ✘ Sachant que $\nabla^2V=-K$, on obtient :

$$A_{nm}=\frac{4K}{\pi^2ab}\frac{1}{\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)}\left(\int_{x=0}^{x=a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx\right)\left(\int_{y=0}^{y=b}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy\right)$$

2.2 Expression des coefficients de Fourier - calcul complet -

- Pour déterminer les valeurs des coefficients A_{nm}, on utilise l'orthogonalité des modes propres du Laplacien (que l'on connait) :

$$\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b}\nabla^2 V\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)dxdy=-\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)A_{nm}\times I_{n,m,p,k}(x,y)$$

Avec :

$$I_{n,m,p,k}(x,y)=\left(\int_{x=0}^{x=a}\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx\right)\left(\int_{y=0}^{y=b}\sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy\right)$$

- $I_{m,n,p,q}(x,y)$ est non nul pour $n=p$ et $m=q$, les intégrales étant alors égales à $a/2$ (resp. $b/2$). On obtient donc :

$$\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b}\nabla^2 V\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)dxdy=-\frac{\pi^2 ab}{4}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)A_{nm}$$

- Sachant que $\nabla^2 V=-K$, on obtient :

$$A_{nm}=\frac{4K}{\pi^2 ab}\frac{1}{\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)}\left(\int_{x=0}^{x=a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx\right)\left(\int_{y=0}^{y=b}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dy\right)$$

2.3 Calcul final des coefficients

- Ces coefficients sont nuls si n et m sont pairs, il reste :

$$A_{(2p+1)(2q+1)}=\frac{16K}{\pi^4 ab}\frac{1}{\frac{(2p+1)^2}{a^2}+\frac{(2q+1)^2}{b^2}}\frac{ab}{(2p+1)(2q+1)}$$

- D'où l'expression finale de $V(x,y)$:

$$V(x,y)=\frac{16K}{\pi^4}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{\frac{(2p+1)^2}{a^2}+\frac{(2q+1)^2}{b^2}}\frac{1}{(2p+1)(2q+1)}\sin\left(\frac{(2p+1)\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{(2q+1)\pi y}{b}\right)$$

3 Calcul du débit

- Par définition :

$$D_v=\int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b}V(x,y)dxdy$$

- On obtient donc :

$$D_v=\frac{64Kab}{\pi^8}\underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{\frac{(2p+1)^2}{a^2}+\frac{(2q+1)^2}{b^2}}\frac{1}{(2p+1)^2(2q+1)^2}}_{\approx\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

(En ne considérant que le premier terme du développement)
Soit :

$$D_v=\frac{64\Delta P(ab)^3}{\pi^8\eta L\left(a^2+b^2\right)}$$