Déphasage entre les RL arrivant en M

- ✘ On écrit les coordonnées des différents points :

$$M(x, y, 0)$$

$$A_1(a, 0, -D)$$
$$A_2(0, a, -D)$$
$$A_3(-a, 0, -D)$$
$$A_4(0, -a, -D)$$

- ✘ On en déduit les différentes distances :

$$A_1M^2 = (x-a)^2 + y^2 + D^2 \Rightarrow A_1M = D\sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a^2}{D^2} - \frac{2ax}{D^2}}$$

$$A_3M^2 = (x+a)^2 + y^2 + D^2 \Rightarrow A_3M = D\sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a^2}{D^2} + \frac{2ax}{D^2}}$$

$$A_2M^2 = x^2 + (y-a)^2 + D^2 \Rightarrow A_1M = D\sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a^2}{D^2} - \frac{2ay}{D^2}}$$

$$A_4M^2 = x^2 + (y+a)^2 + D^2 \Rightarrow A_1M = D\sqrt{1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a^2}{D^2} + \frac{2ay}{D^2}}$$

Les différents termes, dans les racines sont tous du même ordre : on va effectuer un DL1

- ✘ En posant :

$$r_0 = D\left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{a^2}{2D^2}\right)$$

on obtient :

$$A_1M = r_0 - \frac{ax}{D^2}$$
$$A_3M = r_0 + \frac{ax}{D^2}$$
$$A_2M = r_0 - \frac{ay}{D^2}$$
$$A_4M = r_0 + \frac{ay}{D^2}$$

- ✘ Les phases des différents rayons lumineux arrivant en M sont donc [1] :

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_0 - \frac{ax}{D^2}\right)$$

$$\phi_3 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_0 + \frac{ax}{D^2}\right)$$

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_0 - \frac{ay}{D^2}\right)$$

$$\phi_4 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_0 + \frac{ay}{D^2}\right)$$

1. En supposant que les 4 sources secondaires émettent en phase

Méthode complexe

- L'amplitude de vibration en M est donc de la forme :

$$\underline{s}(M) = A\left(\exp(j\phi_1) + \exp(j\phi_3) + \exp(j\phi_2) + \exp(j\phi_4)\right)$$

Soit :

$$\underline{s}(M) = A\exp\left(j\frac{2\pi r_0}{\lambda}\right)\left[\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) + \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) + \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ay}{D}\right) + \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ay}{D}\right)\right]$$

$$\underline{s}(M) = 2A\exp\left(j\frac{2\pi r_0}{\lambda}\right)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ay}{D}\right)\right]$$

- On en déduit l'expression de l'éclairement en M :

$$I(M) = \frac{1}{2}\underline{s}(M)\cdot\underline{s}^*(M) = 2A^2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ay}{D}\right)\right]^2$$

Méthode de Fourier

- On commence par écrire la transmittance de la pupille :

$$t(x_p, y_p) = \delta(x-a)\delta(y) + \delta(x+a)\delta(y) + \delta(x)\delta(y-a) + \delta(x)\delta(y+a)$$

- On en déduit la transformée de Fourier de la transmittance :

$$T(\sigma_x, \sigma_y) = \exp\left(-j2\pi a\sigma_x\right) + \exp\left(j2\pi a\sigma_x\right) + \exp\left(-j2\pi a\sigma_y\right) + \exp\left(j2\pi a\sigma_y\right)$$

Soit :

$$T(\sigma_x, \sigma_y) = 2\left[\cos\left(2\pi a\sigma_x\right) + \cos\left(2\pi a\sigma_x\right)\right]$$

- Sachant que l'on a :

$$\sin\theta_x \approx \theta_x = \sigma_x\lambda \text{ et } \tan\theta_x \approx \theta_x \approx \frac{x}{D}$$

$$\sin\theta_y \approx \theta_y = \sigma_y\lambda \text{ et } \tan\theta_y \approx \theta_y \approx \frac{y}{D}$$

on en déduit l'expression de $T(x,y)$:

$$T(x,y) = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ay}{D}\right)\right]$$

- On en déduit $T(0,0)$:

$$T(0,0) = 4$$

- D'où l'éclairement en M :

$$I(x,y) = \frac{I(0,0)}{4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ay}{D}\right)\right]^2$$

Exemple de tracés

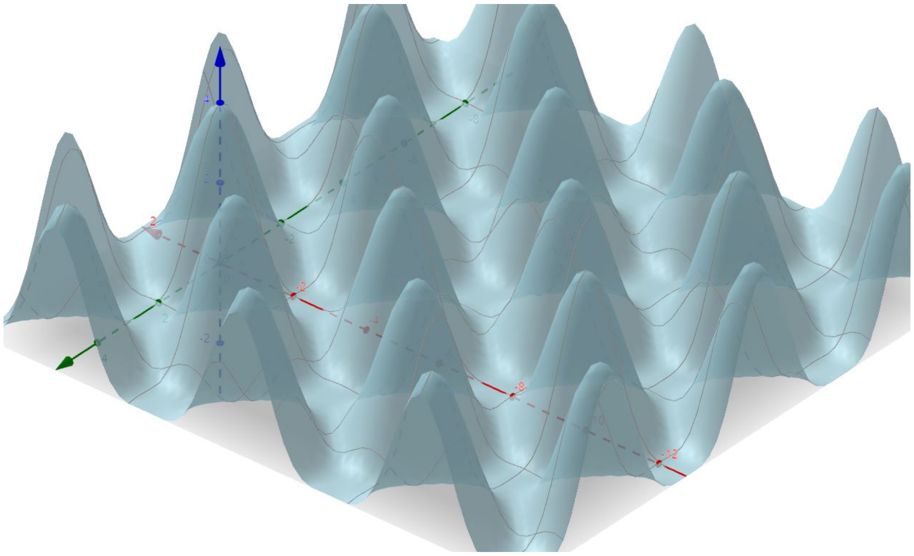

Figure 1 – Exemple de tracé avec Géogébra

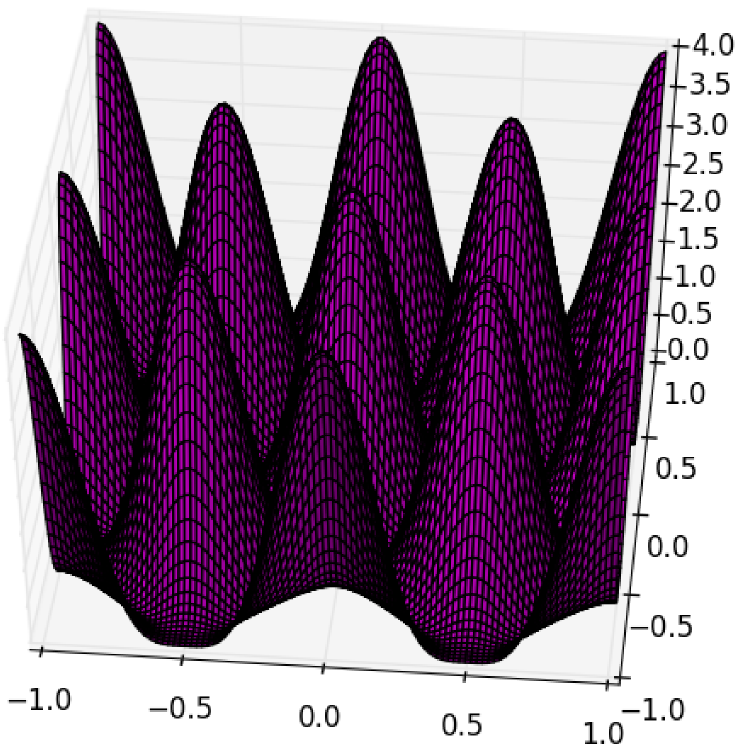

Figure 2 – Exemple de tracé avec Python

Note : la méthode avec les vecteurs de Fresnel n'est pas pratique ici car les déphasages entre les différents rayons lumineux ne sont pas tous identiques.