

# Mesure de vitesses et d'accélération par effet Doppler

## 1 Mesure de la vitesse instantanée de la voiture

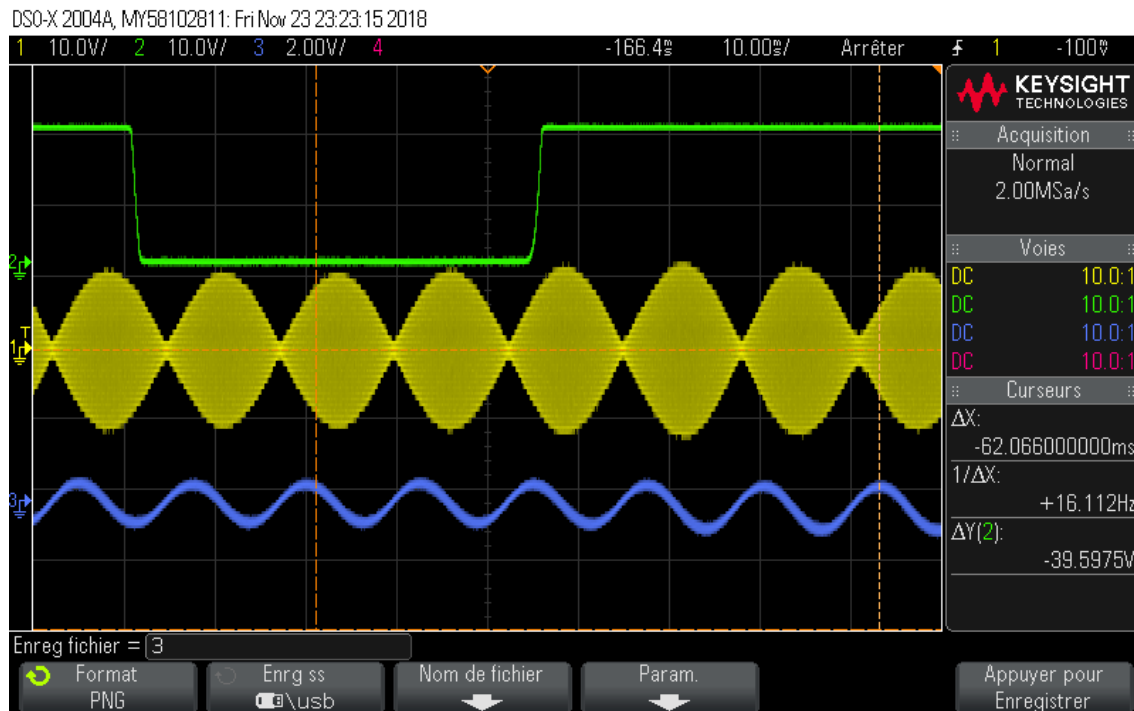


FIGURE 1 – Chronogrammes à obtenir pour la mesure de la vitesse instantanée de la voiture par trois méthodes

Attention ! TOUTES LES MESURES DOIVENT ÊTRE RÉALISÉES AUTOUR D'UN MEME TEMPS : CELUI CORRESPONDANT A LA VARIATION DU SIGNAL DE LA PHOTO-DIODE

### 1.1 Principes des différentes mesures

#### 1.1.1 Émetteurs - Récepteurs

- ✗ Le GBF envoie sur les deux émetteurs US, un signal sinusoïdal de fréquence  $f = 40 \text{ kHz}$ .
- ✗ L'émetteur fixe  $E_1$  envoie donc une onde de même fréquence. Ce signal est reçu par le récepteur  $R$ . En supposant que **la phase coïncide alors avec l'origine des phase**, le signal reçu par le récepteur est de la forme :  $s_1(t) = A_1 \cos(2\pi f t)$ .
- ✗ L'émetteur  $E_2$  fixé à la voiture, de vitesse  $V$  envoie une onde de fréquence  $f' = f + \Delta f$  avec  $\Delta f = \frac{V}{c} f$ . Le signal reçu par le récepteur  $R$  sera de la forme :  $s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f' t + \phi)$ .
- ✗ Le récepteur  $R$  délivre donc :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A_1 \cos(2\pi f t) + A_2 \cos(2\pi f' t + \phi)$$

- ✗ Notons que les battements observés sont d'autant plus marqués que les amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  sont proches. Pour cela, **il faut effectuer la mesure de  $s(t)$  au moment où la voiture est au plus près de  $E_1$ .**
- ✗ Le signal délivré par le récepteur doit être amplifié : l'amplificateur mis à votre disposition fonctionne sur une bande de fréquence très étroite : ajuster la fréquence délivrée par le GBF afin que le signal  $s(t)$  soit le plus important possible (Autrement dit il faut ajuster la fréquence  $f$  à la fréquence de résonance de l'amplificateur).

### 1.1.2 Mesure de $V$ à partir de $s(t)$

- ✗ On suppose, pour plus de simplicité que les amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  sont égales :

$$s(t) = A (\cos(2\pi f t) + \cos(2\pi (f + \Delta f) t + \phi))$$

$$s(t) = 2A \cos\left(2\pi f t + \frac{\phi}{2}\right) \times \cos\left(\pi \Delta f t + \frac{\phi}{2}\right)$$

- ✗ Ce signal est constitué d'une onde moyenne de fréquence  $f = \frac{1}{T}$  et d'une onde d'enveloppe de fréquence  $f_{env} = \frac{1}{T_{env}} = \frac{\Delta f}{2}$ .
- ✗ Attention : **la fréquence des battements vaut** :  $f_{batt} = \frac{1}{T_{batt}} = \Delta f \neq f_{env}$ .
- ✗ La mesure de  $T_{batt}$  nous donne accès à  $\Delta f$ .
- ✗ Notons que l'on doit mesurer  $T_{batt}$  au même endroit que ceux utilisés pour les autres méthodes (voir figure 4).

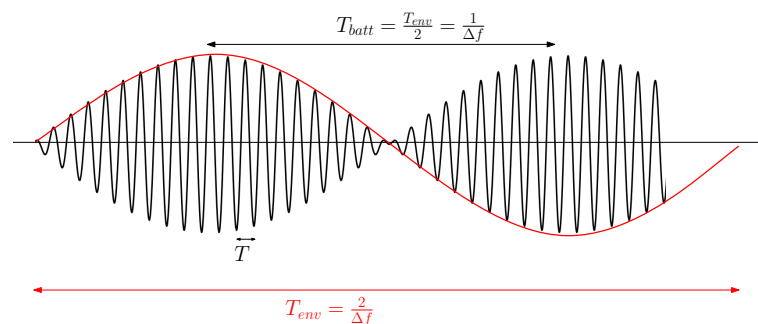


FIGURE 2

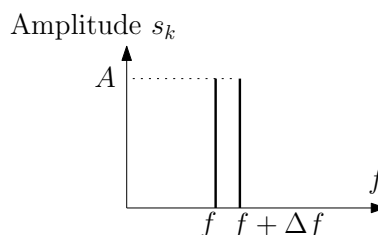


FIGURE 3

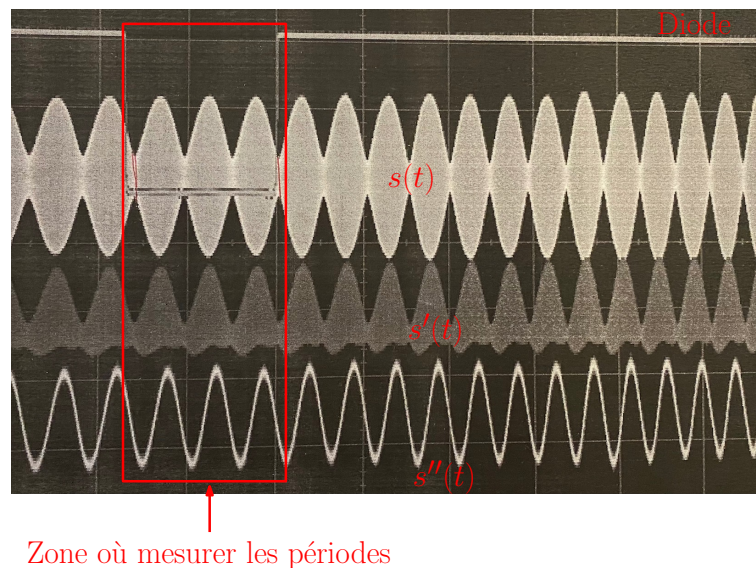


FIGURE 4

### 1.1.3 Étude du signal $s'(t)$

- ✗ La détection synchrone s'effectue en envoyant  $s(t)$  et  $s_1(t)$  dans un multiplieur. A la sortie, on a le signal :

$$s'(t) = KA^2 (\cos(2\pi ft) + \cos(2\pi(f + \Delta f)t + \phi)) \cos(2\pi ft)$$

$$s'(t) = \frac{KA^2}{2} (1 + \cos^2(4\pi f) + \cos(2\pi(2f + \Delta f)t + \phi) + \cos(2\pi\Delta f + \phi))$$

- ✗ Le signal aura donc le spectre suivant :

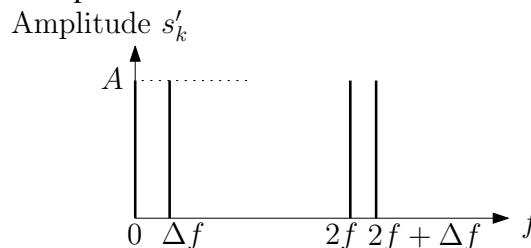


FIGURE 5

- ✗ Le signal  $s'(t)$  est constitué d'une composante continue, d'un signal basse fréquence (de fréquence  $\Delta f$ ) et de deux signaux HF. On repère facilement le signal basse fréquence dans le signal  $s'(t)$  : c'est la période du signal observé. On peut ainsi mesurer directement  $\Delta f$  en mesurant la fréquence du signal. Notons que l'on doit placer les curseurs au même niveau que ceux utilisés pour mesurer  $T_{batt}$  (voir figure 4).

### 1.1.4 Mesure de $V$ à partir de $s''(t)$

- ✗ Le signal  $s'(t)$  est envoyé ensuite à un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  telle que  $f_c \ll 2f$  de façon à ne garder que le signal de fréquence  $\Delta f$  et le signal continu. Le signal  $s''(t)$  à la sortie du passe-bas sera donc de la forme :

$$s''(t) = \frac{KA^2}{2} (1 + \cos(2\pi\Delta f + \phi))$$

- ✗ La mesure de la fréquence du signal (au niveau du signal de la photodiode) nous donne accès à  $\Delta f$  et donc à  $V(t)$ .
- ✗ Pour le choix du filtre passe-bas, il est préférable de choisir un filtre passe-bas du second ordre de facteur de qualité  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et donc de pulsation de coupure égale à  $\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (Si on choisit un  $RLC$  série). A défaut, on prend un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure  $\omega_c = \frac{1}{RC}$  (Si on choisit un  $RC$  série).

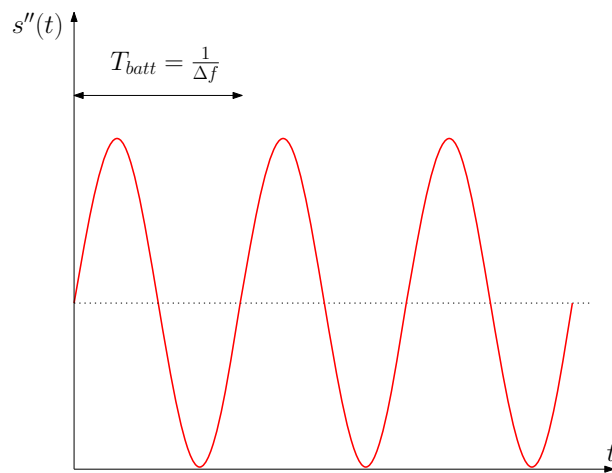


FIGURE 6

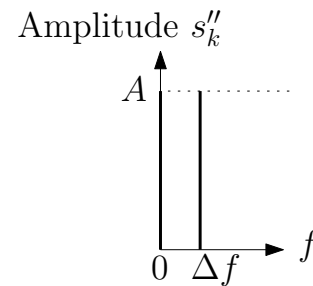


FIGURE 7

### 1.1.5 Mesure de $V$ à l'aide du montage à diode

- ✗ La photodiode est éclairée par le faisceau laser. Lorsque la voiture passe à proximité, la languette de largeur  $e$  coupe le faisceau laser pendant une durée  $\Delta t$ . En mesurant ce temps  $\Delta t$ , on peut ainsi remonter à la vitesse via la formule :

$$V = \frac{e}{\Delta t}$$

- ✗ Pour mesurer  $\Delta t$  on effectue le montage figure 8 et on mesure la tension  $U(t)$  aux bornes de la résistance. En effet, d'après la figure 8, on voit que la diode fonctionne en générateur de courant quand elle est éclairée et qu'elle est polarisée en inverse.

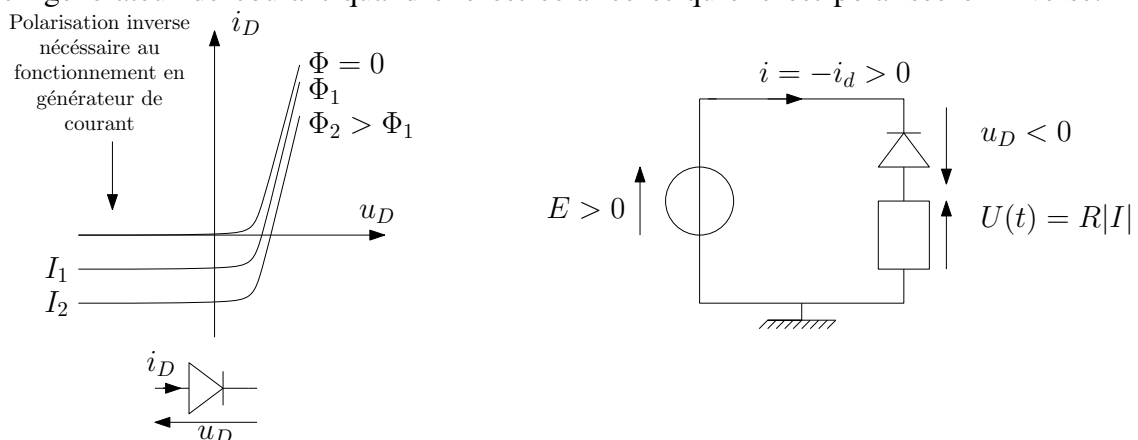


FIGURE 8

- ✗ On commence par faire le montage et on vérifie qu'il fonctionne correctement : Lorsque la diode est éclairée, la tension  $U(t)$  est continue (et vaut  $R|I|$ ) et lorsque la diode est "cachée", la tension doit être nulle.
- ✗ Attention : l'alimentation utilisée est une alimentation à masse flottante : il faut introduire une masse dans le circuit pour stabiliser les signaux (GBF ou oscillo).
- ✗ Pour visualiser la tension  $U(t)$  à l'oscilloscope, il faut obligatoirement placer une des bornes de la résistance à la masse (Rappel : un oscilloscope branché au secteur mesure un potentiel par rapport à la masse).

## 1.2 Mesures et incertitudes

Sachant que toutes ces mesures se font simultanément, on enregistre à l'oscilloscope 3 signaux :  $s(t)$  (les battements),  $s''(t)$  (le signal sinusoïdal à la sortie du passe-bas) et  $U(t)$  (le signal au bord de la résistance). La durée d'enregistrement est de l'ordre de 1 s.

### 1.2.1 Principe de la mesure de la vitesse $V$ connaissant $\Delta f$ (Méthodes 1 et 2)

- ✗ La vitesse se déduit de  $V$  grâce à la formule :

$$V = c \frac{\Delta f}{f}$$

- ✗ On mesure donc  $c$ ,  $f$  et  $\Delta f$  (de différentes manières), sans oublier leurs incertitudes types.
- ✗ Pour la célérité des ondes sonores, on utilise le modèle des gaz parfaits :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}$$

Avec :

$$\mu_{0,GP} = \frac{P_0 M}{RT_0}$$

$$^1\chi_0 = \frac{1}{\gamma P_0}$$

D'où :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

Et donc :

$$\frac{u_c}{c} = \frac{1}{2} \frac{u_{T_0}}{T_0}$$

- ✗ On mesure la température de l'air dans la pièce  $T_0$ , à l'aide d'un thermomètre à graduations, ainsi que son incertitude type :

$$u_{T_0} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

$q$  étant la résolution du thermomètre (1 °C).

---

1. Coefficient de compression isentropique

- ✕ Notons que l'on peut déterminer  $f$  directement à l'aide d'un multimètre branché à la sortie du GBF. Son incertitude type est alors de la forme :

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(a\%f_{lue})^2 + (b \times digits)^2}$$

- ✕ On en déduit  $V$  ainsi que son incertitude type :

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{u_{T_0}}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{u_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta f}\right)^2}$$

### 1.2.2 Mesure 1 : mesure de $T_{batt}$

- ✕ Sur la carte SYSAM, ou à l'oscilloscope, on choisit le signal le plus proche de celui correspondant à la variation du signal de la photodiode.
- ✕ A l'aide des curseurs, on mesure  $T_{batt}$  par encadrement<sup>2</sup> :

$$T_{batt} = \frac{T_{batt,max} + T_{batt,min}}{2}$$

$$u_{T_{batt}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T_{batt,max} - T_{batt,min}}{2}$$

- ✕ On en déduit  $\Delta f$  :

$$\Delta f = \frac{1}{T_{batt}}$$

$$u_{\Delta f} = \frac{1}{T_{batt}^2} u_{T_{batt}}$$

### 1.2.3 Mesure 2 : mesure des périodes de $s'(t)$ et $s''(t)$

- ✕ Sur la carte SYSAM, ou à l'oscilloscope, on choisit les oscillations les plus proches de la variation du signal de la photodiode.
- ✕ A l'aide des curseurs, on mesure  $\Delta t$  par encadrement :

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{max} + \Delta t_{min}}{2}$$

$$u_{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}}{2}$$

- ✕ On en déduit  $\Delta f$  :

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta t}$$

$$u_{\Delta f} = \frac{1}{\Delta t^2} u_{\Delta t}$$

---

2. On néglige les autres incertitudes, constructeur et lecture

### 1.2.4 Mesure 3 : mesure de $\Delta t$ avec la diode

- ✗ On mesure le temps  $\Delta t$  par encadrement<sup>3</sup> :

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{\max} + \Delta t_{\min}}{2}$$

$$u_{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta t_{\max} - \Delta t_{\min}}{2}$$

- ✗ On mesure l'épaisseur  $e$  de la languette à l'aide d'une règle (deux positions sur la règle notées  $p_1$  et  $p_2$ ), on obtient donc :

$$e = p_2 - p_1 \text{ et } u_e = \sqrt{(u_{p_2})^2 + (u_{p_1})^2} = \frac{q}{\sqrt{6}}$$

$q$  étant la résolution de la règle (1 mm).

- ✗ On en déduit :

$$V = \frac{e}{\Delta t} \text{ et } u_V = V \sqrt{\left(\frac{u_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{u_e}{e}\right)^2}$$

## 2 Mesure de l'accélération de la voiture

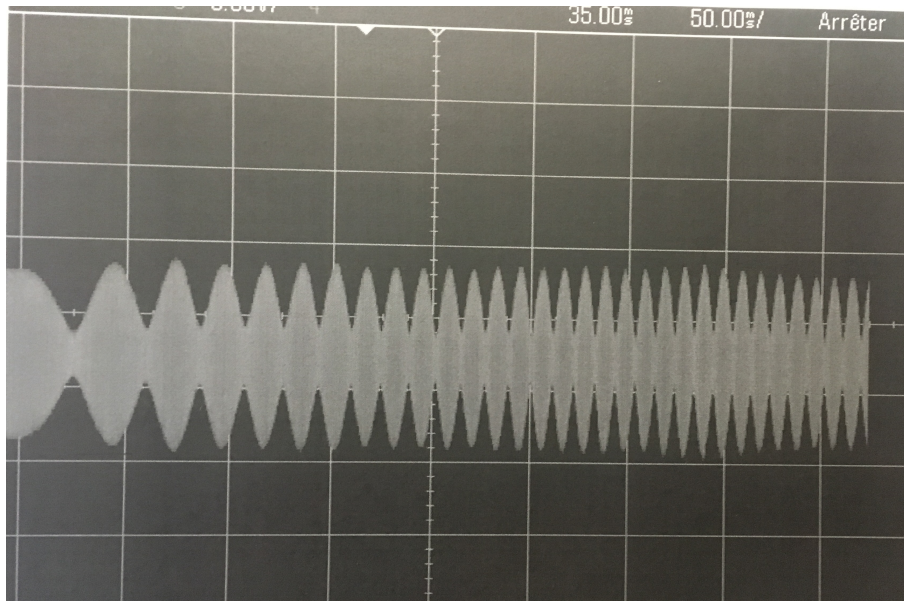


FIGURE 9 – Mesure de l'accélération de la voiture : il faut au moins 20 battements

### 2.1 Accélération théorique

- ✗ On utilise le modèle du véhicule à 4 roues. Les deux roues avant sont soumises aux mêmes actions mécaniques idem pour les 2 roues arrières.

3. On néglige les autres incertitudes

- ✗ Le TRC appliqué à la voiture donne :

$$ma = 2\bar{T}_1 + 2\bar{T}_2 + mg \sin \alpha$$

$$0 = 2N_1 + 2N_2 - mg \cos \alpha$$

où  $m$  est la masse de la voiture,  $\bar{T}_1$  et  $N_1$  concernent les roues avant et  $\bar{T}_2$  et  $N_2$  concernent les roues arrières.

- ✗ Le TMC appliqué à une des roues, dans le référentiel barycentrique de la roue, donne :

$$J\dot{\Omega}_i = -R\bar{T}_i$$

où  $J$  est le moment d'inertie de la roue.

- ✗ Le RSG impose :

$$\Omega_i = \frac{\dot{x}}{R}$$

D'où :

$$\bar{T}_i = -\frac{J}{R^2}\ddot{x}$$

Et donc :

$$\ddot{x} = \frac{mg \sin \alpha}{m + 4\frac{J}{R^2}}$$

- ✗ En supposant que les roues ont une masse  $m'$  répartie uniformément, on a :  $J = m'R^2$  et donc :

$$\ddot{x} = \frac{mg \sin \alpha}{m + 4m'}$$

Ainsi, négliger l'inertie des roues, revient à négliger la masse des roues devant la masse de la voiture, ce qui paraît raisonnable. On obtient alors :

$$\ddot{x} = g \sin \alpha$$

## 2.2 Principe

- ✗ On détermine l'accélération de la voiture à partir de la détermination de la vitesse en fonction du temps. Plus précisément, pour un battement  $k$ , situé entre deux instants  $t_{k-1}$  et  $t_k$ , on détermine la vitesse  $V_k$  de la voiture :

$$T_{batt,k} = t_k - t_{k-1}$$

$$V_k = c \frac{T}{T_{batt,k}}$$

- ✗ On en déduit alors, l'accélération  $a_k$  de la voiture :

$$a_k = \frac{V_{k+1} - V_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}$$

- ✗ On remplit alors un tableau de la forme :

| $k$ | $t_k$ | $t_{k-1}$ | $t_{k+1}$ | $V_k$                         | $V_{k-1}$                     | $V_{k+1}$                     | $a_k$                               |
|-----|-------|-----------|-----------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 2   | $t_2$ | $t_1$     | $t_3$     | $V_2 = c \frac{T}{t_2 - t_1}$ |                               | $V_3 = c \frac{T}{t_3 - t_2}$ |                                     |
| 3   | $t_3$ | $t_2$     | $t_4$     | $V_3 = c \frac{T}{t_3 - t_2}$ | $V_2 = c \frac{T}{t_2 - t_1}$ | $V_4 = c \frac{T}{t_4 - t_3}$ | $a_3 = \frac{V_4 - V_2}{t_4 - t_2}$ |
| ... | ...   | ...       | ...       | ...                           | ...                           | ...                           | ...                                 |



### 2.2.1 Détermination de $a$ à partir des $a_k$

✕ A partir du tableau précédent, on obtient  $N$  valeurs de  $a_k$ .

✕ La valeur de l'accélération est :

$$a = \frac{\sum_N a_k}{N}$$

✕ L'incertitude type sur  $a$  est alors :

$$u_a = \frac{t(N)}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_N (a_k - a)^2}$$

où  $t(N)$  est le coefficient de Student.

### 2.2.2 Détermination de $a$ par régression linéaire sous Régressi

✕ On détermine  $a$  en traçant  $V_k$  en fonction de  $t_k$  :  $a$  est alors la pente de la droite obtenue.

### 2.2.3 Détermination de $a$ par Monté-Carlo

On effectue une simulation Monté-Carlo à partir des données des  $t_k$  et  $V_k$ .

✕ On compare cette accélération à l'accélération attendue :  $a = g \sin \alpha$ . Pour cela il faut mesurer  $\alpha$  à l'aide d'un rapporteur et estimer son incertitude.

## 2.3 Exemple

### 2.3.1 Tableau de valeurs

On obtient le tableau de valeurs suivants :

| $tk$ (ms) | $T_{batt,k}$ (s) | $\Delta f_k$ (Hz) | $v$ , k(m/s) | $a$ , k(m/s <sup>2</sup> ) |
|-----------|------------------|-------------------|--------------|----------------------------|
| -259,10   | 0,0306           | 32,68             | 0,28         |                            |
| -228,50   | 0,0292           | 34,25             | 0,29         | 1,56                       |
| -199,30   | 0,0229           | 43,67             | 0,37         | 2,53                       |
| -176,40   | 0,0201           | 49,75             | 0,42         | 1,20                       |
| -156,30   | 0,0306           | 49,75             | 0,42         | 1,16                       |
| -136,20   | 0,0181           | 55,25             | 0,47         | 1,16                       |
| -118,10   | 0,0182           | 54,95             | 0,47         | 1,52                       |
| -99,90    | 0,0162           | 61,73             | 0,52         | 3,58                       |
| -83,70    | 0,0144           | 69,44             | 0,59         | 1,62                       |
| -69,30    | 0,0148           | 67,57             | 0,57         | 0,18                       |
| -54,50    | 0,0143           | 70,05             | 0,60         | -5,12                      |
| -39,70    | 0,0306           | 72,52             | 0,42         | 0,58                       |
| -26,80    | 0,0139           | 71,94             | 0,61         | 7,04                       |
| -12,90    | 0,0306           | 84,03             | 0,61         | 2,65                       |
| -1,00     | 0,0125           | 80,00             | 0,68         | 5,21                       |
| 11,50     | 0,0115           | 86,91             | 0,74         | 1,46                       |
| 22,50     | 0,0119           | 84,03             | 0,71         | 1,48                       |
| 34,40     | 0,011            | 90,91             | 0,77         | -0,26                      |
| 45,40     | 0,012            | 83,33             | 0,71         | 5,30                       |
| 57,40     | 0,0095           | 105,26            | 0,89         | 4,71                       |
| 66,90     | 0,0105           | 95,24             | 0,81         | -4,64                      |
| 77,40     | 0,0106           | 94,34             | 0,80         | 1,92                       |
| 88,00     | 0,01             | 100,00            | 0,85         | 4,05                       |
| 98,00     | 0,0096           | 104,17            | 0,89         | 2,28                       |
| 107,60    | 0,0095           | 105,26            | 0,89         | -2,29                      |
| 117,10    | 0,0101           | 99,01             | 0,84         | 4,78                       |
| 127,20    | 0,0086           | 116,28            | 0,99         | 2,84                       |
| 135,80    | 0,0095           | 105,26            | 0,89         | -3,00                      |
| 145,30    | 0,0091           | 109,89            | 0,93         | 5,03                       |
| 154,40    | 0,0086           | 116,28            | 0,99         | 3,07                       |
| 163,00    | 0,0086           | 116,28            | 0,99         | -3,16                      |
| 171,60    | 0,0091           | 109,89            | 0,93         | -3,07                      |
| 180,70    | 0,0091           | 109,89            | 0,93         | 10,13                      |
| 189,80    | 0,0076           | 131,58            | 1,12         | 3,25                       |
| 197,40    | 0,0086           | 116,28            | 0,99         | -4,26                      |
| 206,00    | 0,0081           | 123,46            | 1,05         | 2,89                       |
| 214,10    | 0,0082           | 121,95            | 1,04         | 9,07                       |
| 222,30    | 0,0071           | 140,85            | 1,20         | 2,22                       |
| 229,40    | 0,0079           | 125,95            | 1,07         | -5,15                      |
| 237,60    | 0,0076           | 131,58            | 1,12         | 2,11                       |
| 245,20    | 0,0077           | 129,87            | 1,10         | 5,15                       |
| 252,90    | 0,0071           | 140,85            | 1,20         |                            |

### 2.3.2 Détermination directe de $a$ par le calcul de la valeur moyenne des $a_k$

On peut calculer l'accélération directement en calculant la moyenne des  $a_k$  et son écart type :

$$a = 1.77 \pm 3.58 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

L'écart type est très mauvais : il faut utiliser une autre méthode

### 2.3.3 Détermination de $a$ par une modélisation sous Régressi

- ✗ On rentre les valeurs sous Régressi,
- ✗ On utilise une modélisation affine,
- ✗ On obtient le graphe suivant :

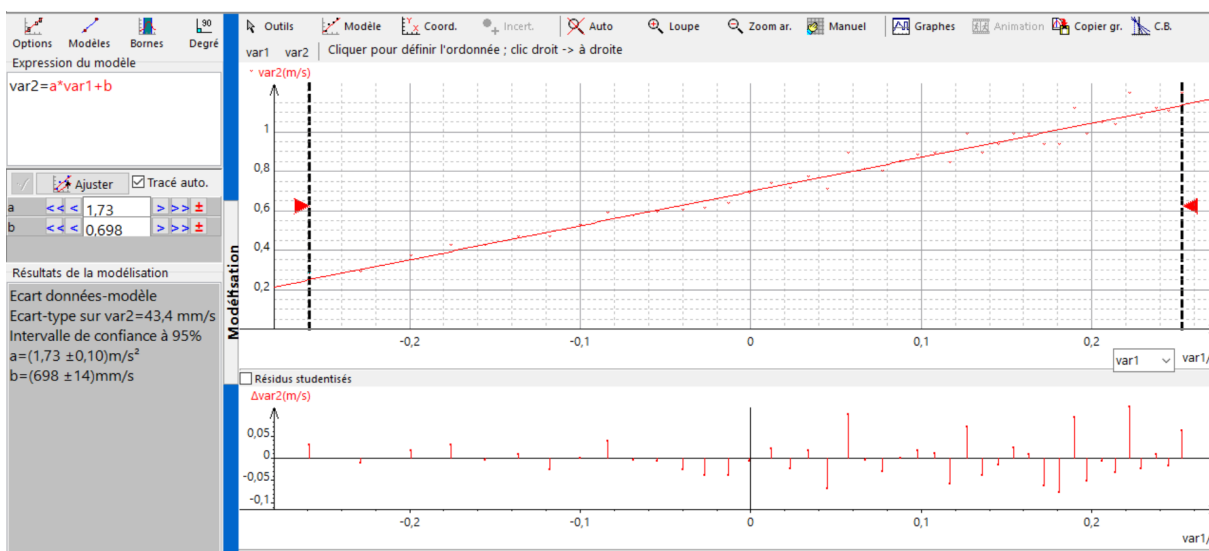


FIGURE 10

- ✗ Les résidus sont bien répartis et l'incertitude type est correcte : on peut valider la méthode et la mesure de  $a$
- ✗ Rappelons que l'incertitude obtenue est calculé par le logiciel, il s'agit d'une incertitude d'origine statistique (liée à la dispersion du nuage de points).

### 2.3.4 Détermination de $a$ par une simulation Monté Carlo

- ✗ On utilise le code suivant :

```

3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import numpy as np
5
6 # Ouverture du fichier
7 fichier = open("t_v.txt", "r")
8
9 # Lecture de l'entête
10 entete = fichier.readline()
11
12 # initialisation des listes
13 tbatt=[]
14 V=[]
15
16 # Lecture du fichier ligne à ligne
17 for ligne in fichier:
18     tmp=ligne.split()
19     tbatt.append(float(tmp[0]))
20     V.append(float(tmp[1]))
21
22 # fermeture du fichier
23 fichier.close
24
25 print(tbatt)
26 print(V)
27
28 #mean_V = sum(V) / len(V)
29 sig_V=np.std(V, ddof =1) # std : renvoie un écart-type d'un échantillon
30 uV=len(V)*[sig_V]
31 N=1000
32 pente=np.zeros(N)
33 ord=np.zeros(N)

```

FIGURE 11

```

29 sig_V=np.std(V, ddof =1) # std : renvoie un écart-type d'un échantillon
30 uV=len(V)*[sig_V]
31 N=1000
32 pente=np.zeros(N)
33 ord=np.zeros(N)
34 #tbattsim=np.zeros(len(tbatt))
35 Vsim=np.zeros(len(V))
36 for n in range(N):
37     for i in range(len(tbatt)):
38         Vsim[i]=np.random.normal(V[i],uV[i])
39     p=np.polyfit(tbatt, Vsim,1)
40     pente[n]=p[0]
41     ord[n]=p[1]
42
43 pente_moy=np.average(pente)
44 ord_moy=np.average(ord)
45 u_pente=np.std(pente,ddof=1)# std : renvoie un écart-type d'un échantillon
46
47 V_sim=np.multiply(pente_moy,tbatt)+ord_moy
48 print('acceleration =',pente_moy)
49 print(f"Incertitude-type sur l'accélerration" : {u_pente})
50
51
52 plt.plot(tbatt,V,marker='o')
53 plt.plot(tbatt,V_sim,'g')
54 plt.show()

```

FIGURE 12

On obtient alors le graphe suivant :

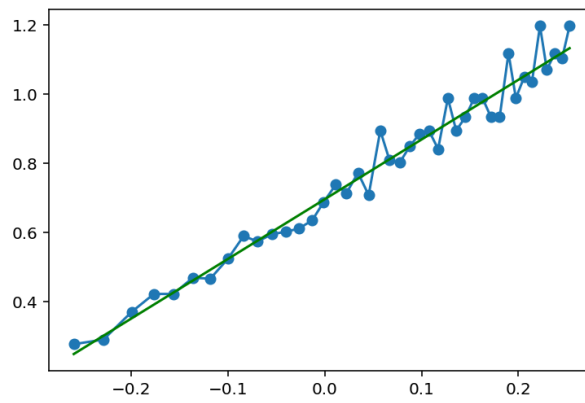


FIGURE 13

Avec :

$$a = 1.72 \pm 0.28 \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

L'écart type est raisonnable, la méthode peut être validée.