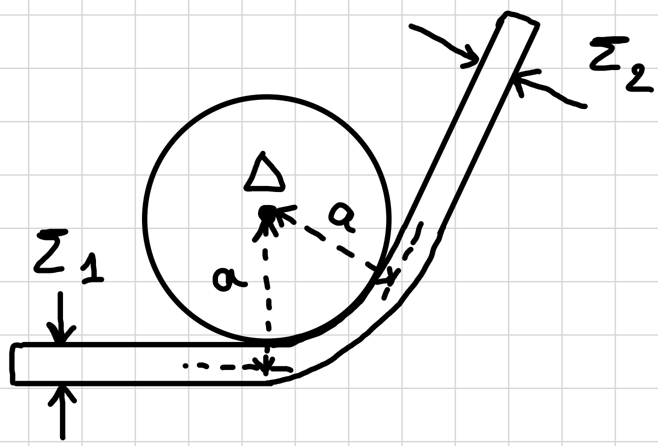
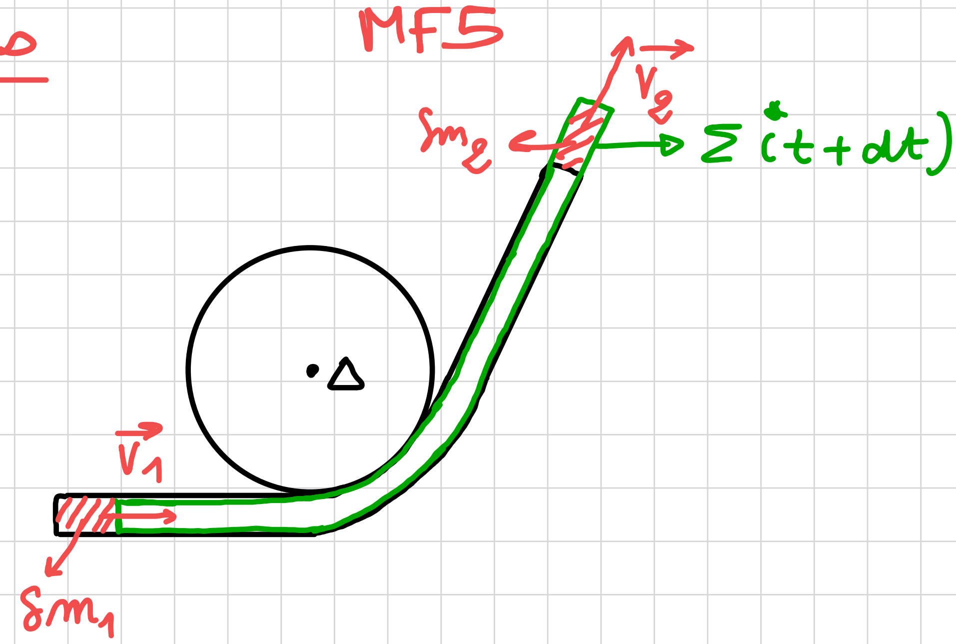
Exercice 1

Pb divers

MF5





(1)

(S) = turbine + fluide

Bilan moment cinétique (projeté sur Δ)

$$\begin{cases} L^*_\Delta(t) = L_\Delta(t) \\ L^*_\Delta(t+dt) = L_\Delta(t+dt) + \delta m_2\, a V_2 - \delta m_1\, a V_1 \end{cases}$$

Avec $\begin{cases} L_\Delta(t) = J\,\omega(t) & \text{(turbine)} \\ L_\Delta(t+dt) = J\,\omega(t+dt) & \text{(turbine)} \end{cases}$

(Ecoulement stationnaire)

D'où $\boxed{\dfrac{DL_\Delta}{Dt} = J\dfrac{d\omega}{dt} + D_m\, a\,(v_2 - v_1)}$

- TMC : $\boxed{\dfrac{DL_\Delta}{Dt} = \sum M_\Delta}$

BAM : seul le couple résistance intervient $\Rightarrow -\Gamma$

$\Rightarrow \boxed{J\dfrac{d\omega}{dt} + D_m\, a\,(v_2 - v_1) = -\Gamma}$ (1)

(2) - Avec le même système, on obtient :

$$\frac{DE_c}{Dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{D_m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \text{où} \quad E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$$

- Le TEC donne ici ($\mathcal{P}^{int} = 0$ car écoulement parfait et incompressible) :

$$\frac{DE_c}{Dt} = J\omega \frac{d\omega}{dt} + \frac{D_m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \mathcal{P}^{ext} = -\Gamma\omega$$

D'où :

$$\boxed{J\omega \frac{d\omega}{dt} + \Gamma\omega + \frac{D_m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 0} \quad (2)$$

③ il faut éliminer v_2 qui est inconnue :

$$(1) \Rightarrow v_1 - v_2 = \frac{1}{D_m a}\left(\Gamma + J\frac{d\omega}{dt}\right) \qquad \Rightarrow \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \overset{(3)}{\boxed{v_1 + v_2 = 2a\omega}}$$

$$(2) \quad v_1^2 - v_2^2 = \frac{2\omega}{D_m}\left(\Gamma + J\frac{d\omega}{dt}\right)$$

$$(3) + (1) \Rightarrow 2v_1 = 2a\omega + \frac{1}{D_m a}\left(\Gamma + J\frac{d\omega}{dt}\right)$$

D'où $$\frac{d\omega}{dt} + \underbrace{\frac{2D_m a^2}{J}}_{1/\tau}\omega = \underbrace{\frac{2D_m a v_1 - \Gamma}{J}}_{\omega_p/\tau}$$

D'où $$\boxed{\omega_p = \frac{v_1}{a} - \frac{\Gamma}{2D_m a^2}}$$

- On voit tout de suite que si Γ est trop grand, ω_p s'annule (la machine ne tourne plus)

$$\boxed{\Gamma_{max} = 2D_m a v_1}$$

④ $$\mathcal{P} = \Gamma\omega_p = \Gamma\left(\frac{v_1}{a} - \frac{\Gamma}{2D_m a^2}\right) = 2D_m a\omega_p(v_1 - \omega_p a)$$

$$\frac{dP}{d\Gamma} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{v_1}{2a} \text{ et } \Gamma = v_1 D_m a \quad (v_2 = 0)$$

(5) $$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_p}{\tau} \Rightarrow \omega = \omega_p\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$