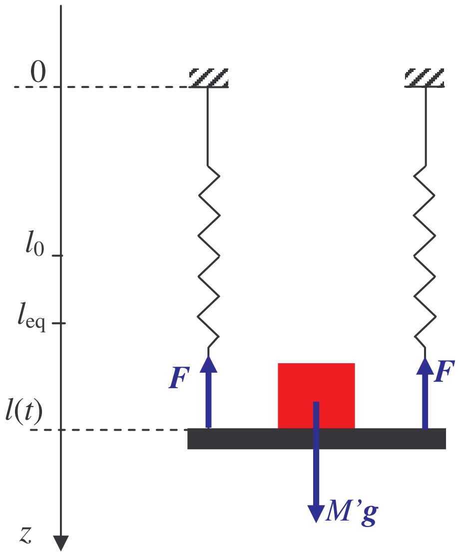
CORRECTION EXERCICE 1 : Siège éjectable

Analyse qualitative

– Si les ressorts ne sont pas suffisamment étirés au moment du lâcher, l'ensemble oscille sinusoïdalement autour de la position d'équilibre l_{eq}. Les passagers ont la sensation d'être plus lourds quand $l > l_{eq}$ et plus légers quand $l < l_{eq}$. C'est au départ que la pesanteur apparente est la plus importante.

– Si les ressorts sont suffisamment étirés au moment du lâcher, l'ensemble monte avec un mouvement en première phase d'oscillateur harmonique autour de la position d'équilibre l_{eq}. Le décollement du siège se produit lorsque le poids apparent s'annule c'est-à-dire lorsque la décélération est g. Ceci se produira pour des ressorts de longueur $l < l_{eq}$.



1. On notera M' la masse totale $M' = M + m$.

La longueur des ressorts à l'équilibre est telle que

$M'g = 2k(l_{eq} - l_0)$ soit $l_{eq} = l_0 + \dfrac{M'g}{k_e}$ où $k_e = 2k$ est la constante de raideur d'un ressort unique équivalent.

Tant que la masse M ne décolle pas du plateau,

$M'\dfrac{\mathrm{d}^2 l(t)}{\mathrm{d}t^2} = M'g - k_e(l(t) - l_0)$ (TRC appliqué au système {plateau + cube} dans le référentiel terrestre supposé galiléen).

Or $0 = M'g - k_e(l_{eq} - l_0)$

Donc par différence et en posant $Z(t) = l(t) - l_{eq}$,

$$\boxed{\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0} \qquad (1)$$

traduisant un mouvement oscillatoire de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_e}{M'}}$ … ou plutôt un début de mouvement harmonique avant un éventuel décollage de la masse M.

En étudiant ensuite la masse M dans le référentiel terrestre (masse M soumise à son poids et à l'action $\boldsymbol{R}$ du plateau) et en lui appliquant le TRC :

$M\ddot{Z} = Mg - \|\boldsymbol{R}\|$ tant que la masse reste en contact avec le plateau. Ceci est vrai tant que $\dfrac{\|\boldsymbol{R}\|}{M} = g - \ddot{Z} > 0$.

L'équation différentielle (1) a pour solution, en tenant compte de conditions initiales $Z(0)) = l(0) - l_{eq} = l_{eq}$ et $\dot{Z}(0) = 0$: $Z(t) = l_{eq}\cos(\omega_0 t)$.

Il vient alors $\boxed{\dfrac{\|\boldsymbol{R}\|}{M} = g + \omega_0^2 l_{eq}\cos(\omega_0 t)}$.

Si $\omega_0^2 l_{eq} > g$, les passagers décollent au premier instant vérifiant $\dfrac{\|\boldsymbol{R}(t_1)\|}{M} = g + \omega_0^2 l_{eq}\cos(\omega_0 t_1) = 0$

c'est-à-dire $\boxed{\cos(\omega_0 t_1) = -\dfrac{g}{\omega_0^2 l_{eq}} = \dfrac{-1}{1+\alpha}}$ où $\alpha = \dfrac{k_e l_0}{M'g}$.

On se trouve bien dans ce 2[e] cas car $\omega_0^2 l_{eq} = \frac{k_e}{M'}\left(l_0 + \frac{M'g}{k_e}\right) = g + \frac{k_e l_0}{M'} > g$.

À l'instant t_1, l'ensemble plateau-passagers se trouvent à la position

$$\boxed{l(t_1) = l_{eq} + Z(t_1) = l_{eq}(1+\cos(\omega_0 t_1)) = l_{eq}\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

On vérifie que $l(t_1) < l_{eq}$ ce qui est en accord avec l'analyse qualitative.

<u>Commentaires possibles et attendus</u>

- La masse des passagers joue un rôle : des passagers légers (masse M_1 donc masse totale $m + M_1$) donnent un coefficient α_1 supérieur au coefficient α_2 associé à des passagers plus lourds. La longueur des ressorts sera alors plus proche de l_{eq} pour des passagers légers qui décolleront donc plus tôt et plus proche de la position d'équilibre.
- Pour *M'* fixé, plus les ressorts sont « mous », plus α est petit, plus le décollement se fait tard et loin de la position d'équilibre. Les « sensations » sont alors moins fortes !

2. L'accélération est maximale au départ car $\ddot{Z}(t) = -\omega_0^2 l_{eq}\cos(\omega_0 t)$ et vaut en norme $\omega_0^2 l_{eq} = \frac{k_e l_0}{M'} = g(1+\alpha)$ au départ.

Cette pesanteur apparente est donc de $6g$ lorsque $\alpha = 5$ soit $\frac{M'g}{k_e} = \frac{l_0}{5}$ c'est-à-dire $\boxed{l_{eq} = 1{,}2 l_0}$.

3. Dimensionnement du problème

$l_0 = 20\ \mathrm{m}$; $M = 150\ \mathrm{kg}$; $m = 150\ \mathrm{kg}$

donc $k = \frac{k_e}{2} = 375\ \mathrm{N\cdot m}$ pour une accélération de 6g au départ.

On calcule $\omega_0 = 1{,}58\ \mathrm{rad/s}$ et $\cos(\omega_0 t_1) = \frac{-1}{6}$ soit $\boxed{t_1 = 1{,}1\ \mathrm{s}}$