

Mvt particules ds \vec{E} et \vec{B}

I) Mvt ds \vec{E} uniforme

① $\frac{\|q\vec{E}\|}{\|m\vec{g}\|} = \frac{qE}{mg}$

* pour un e^- : $\frac{qE}{mg} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 10^4}{9.1 \times 10^{-31} \times 9.81} \approx 10^{14} \gg 1$

* pour un proton : $\frac{qE}{mg} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 10^4}{1.67 \times 10^{-27} \times 9.81} \approx 10^{11} \gg 1$

\Rightarrow on peut négliger le poids des particules.

② (S) = particule (q, m)

$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{lab} = \mathcal{R}_g$

BAM : $\vec{F}_e = q\vec{E} = -qE \vec{y}$

\Rightarrow TRC : $m\vec{a} = \vec{F}_e$

$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -qE \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \\ \dot{y} = -qEt/m + \dot{y}_0 = -\frac{qEt}{m} \\ \dot{z} = \dot{z}_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{qEt^2}{2m} \\ z = 0 \end{cases}$

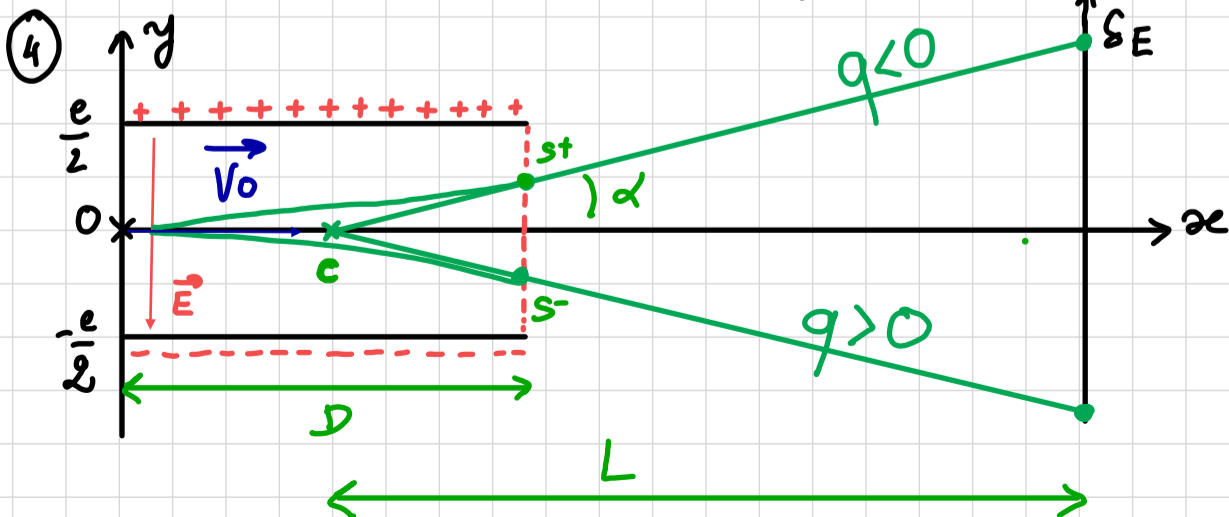
$y = -\frac{qE}{2m v_0^2} x^2$

Trajectoire parabolique.

$z = 0 \Rightarrow$ mvt plan

③ pas de force appliquée à l'ext des armatures

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow$ mvt rectiligne uniforme.



* Coordonnées pt S :

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -\frac{qE}{2m v_0^2} D^2 \end{cases}$

* Thalès :

$\frac{y_D}{SE} = \frac{D/2}{L}$

D'où :
$$\delta_E = \gamma_0 \times \frac{2L}{D} = - \frac{qE D L}{m v_0^2}$$

⑤ /

⑥ $\delta_E^{e^-}$

⑦ Reprenons le TRC :

$$\begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ m \ddot{y} = -qE \\ m \ddot{z} = 0 \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -\frac{qEt}{m} + \dot{y}_0 = -\frac{qEt}{m} + v_0 \sin \alpha \\ \dot{z} = \dot{z}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = -\frac{qEt^2}{2m} + v_0 t \sin \alpha \\ z = 0 \Rightarrow \text{mvt plan} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{qE}{2m v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$$

Trajectoire parabolique.

⑧

\vec{g}	\vec{E}
m	q
\vec{v}_0	\vec{v}_0

← chps statiques uniformes

⇒ mvts paraboliques.

⑨ La particule va se coller à l'armature de charge opposée en suivant la loi :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{qEt^2}{2m} + v_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

II Mvt de \vec{B} uniforme

$$(10) \frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|m\vec{g}\|} = \frac{qvB}{mg}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ Cas d'un } e^- : \frac{qvB}{mg} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 \cdot 1}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,81} \simeq 10^{15} \gg 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \times \text{ Cas d'un } p^+ : \frac{qvB}{mg} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 10^5 \times 1}{1,67 \times 10^{-27} \times 9,81} = 10^{12} \gg 1 \end{array} \right.$$

(11) Mvt circulaire uniforme

(S) = particule (q, m)

$$R = R_{\text{labo}} = R_g \Rightarrow \text{TRC} : m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{BAM} : \vec{F} = \vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

\times justifier rapidement que le mvt est circulaire uniforme :

d'après le TRC :

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \vec{a} \perp \vec{B} \text{ et sachant que } \vec{v}_0 \perp \vec{B}, \text{ on en déduit que} \\ \text{le mvt est plan (plan } \perp \vec{B} \text{ passant par } O \Rightarrow (Oxy)) \\ \square \vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \text{le mvt est circulaire uniforme.} \end{array} \right.$$

\times trouver rapidement le rayon du cercle :

On simplifie le TRC, sachant que le mvt est circulaire uniforme ($\vec{a} = +\frac{v^2}{\rho} \vec{e}_N$; $\vec{v} = v\vec{e}_T$) et que $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\Rightarrow m \frac{v^2}{\rho} = |q|vB \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \frac{mv}{|q|B}}$$

(12) \times Trouver rapidement ω_c (pulsation cyclotron) :

$$\boxed{\omega_c = v/\rho = \frac{|q|B}{m}}$$

$\Delta \omega_c$ svt définie algébriquement!

x Equations paramétrées de la trajectoire

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} m \ddot{x} \\ m \ddot{y} \\ m \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \dot{y} B \\ -q \dot{x} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

⚠ $\omega_c = \frac{qB}{m}$ algébrique

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \begin{cases} \dot{x} - \dot{x}_0 = \omega_c y \\ \dot{y} - \dot{y}_0 = -\omega_c x \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = v_0 + \omega_c y \\ \dot{y} = -\omega_c x \\ z = 0 \Rightarrow \text{mvt plan} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega_c (-\omega_c x) \\ \ddot{y} = -\omega_c (\omega_c y + v_0) \end{cases} \begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t \\ y(t) = C \cos \omega_c t + D \sin \omega_c t - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$$

En utilisant les CI :

$$\begin{cases} x(0) = 0 = A \Rightarrow A = 0 \\ y(0) = 0 = C - \frac{v_0}{\omega_c} \Rightarrow C = \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases} \begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 = B \omega_c \\ \dot{y}(0) = 0 = D \omega_c \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \end{cases}$$

⇒ Equation paramétriques d'un cercle de rayon $\frac{v_0}{|\omega_c|}$ et de centre

$$C \left(0, -\frac{v_0}{\omega_c} \right)$$

x Equation de la trajectoire :

$$\circ \sin \omega_c t = \left(\frac{\omega_c}{v_0} \right) x(t) \quad \circ \cos \omega_c t = \left(\frac{\omega_c}{v_0} \right) y(t) + 1$$

$$\sin^2 \omega_c t + \cos^2 \omega_c t = 1$$

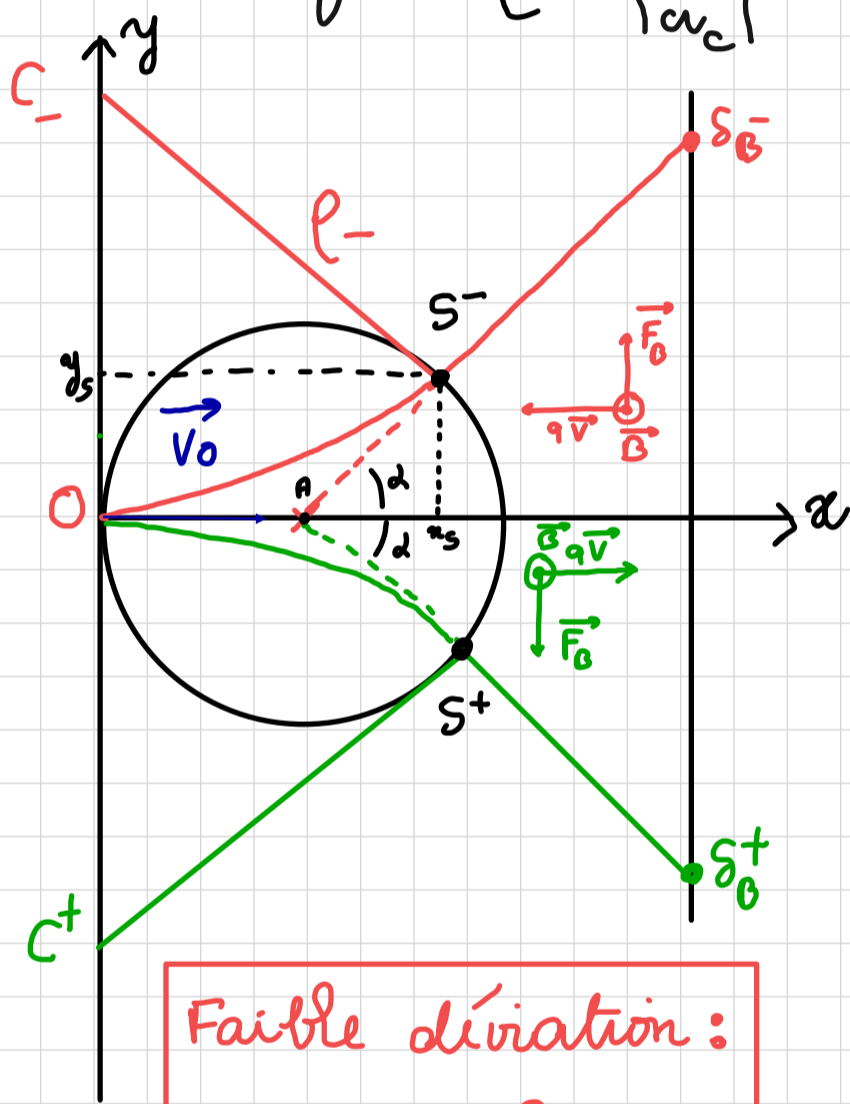
$$\Rightarrow \left(\frac{\omega c}{v_0}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\omega c}{v_0} y + 1\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega c}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega c}\right)^2}$$

De la forme : $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \rho^2$

\Rightarrow cercle de centre $C(x_c=0, y_c=-\frac{v_0}{\omega c})$ et de

rayon $\rho = \frac{v_0}{|\omega c|}$



Faible déviation :

$$y_c \gg R$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_s &\approx 2R \\ y_s &\approx \frac{2R^2}{y_c} = -\frac{2R^2 \omega c}{v_0} \end{aligned}}$$

Coordonnées de S ?

$$\begin{aligned} (x_s - R)^2 + y_s^2 &= R^2 \\ + (y_s - y_c)^2 &= y_c^2 \end{aligned}$$

$$R^2 - 2x_s R - y_c^2 + 2y_s y_c = R^2 - y_c^2$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{R}{y_c} x_s$$

$$\Rightarrow x_s^2 + R^2 - 2x_s R + \frac{R^2 x_s^2}{y_c^2} = R^2$$

$$x_s^2 \left(1 + \frac{R^2}{y_c^2}\right) = 2x_s R$$

$$\boxed{x_s = \frac{2R}{1 + \frac{R^2}{y_c^2}}; y_s = \frac{\frac{R}{y_c} 2R}{1 + \frac{R^2}{y_c^2}}}$$

- sans approximation -

x vitesse de sortie :

$$\begin{cases} \dot{x}_s = v_0 + \omega c y_s = v_0 - \frac{2R^2 \omega^2}{v_0} \\ \dot{y}_s = -\omega c x_s = -2R\omega c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_s}{x_s} = \frac{-2R\omega_c V_0}{V_0^2 - 2R^2\omega_c^2}$$

x équation de la droite de sortie: $y = a x + b$ ↗ $\tan \alpha$

$$\Rightarrow \text{En S : } y_s = \tan \alpha x_s + b$$

$$\Rightarrow b = -\frac{2R^2\omega_c}{V_0} + \frac{2R\omega_c V_0}{V_0^2 - 2R^2\omega_c^2} \times 2R$$

$$b = \frac{-2R^2 V_0^2 \omega_c + 4R^4 \omega_c^2 + 4R^2 V_0^2 \omega_c}{V_0(V_0^2 - 2R^2\omega_c^2)}$$

x Intersection avec l'axe des abscisses:

$$y=0 \Rightarrow x = -\frac{b}{\tan \alpha} = -\frac{(y_s - \tan \alpha x_s)}{\tan \alpha}$$

$$= -\frac{y_s}{\tan \alpha} + x_s$$

$$= -\frac{y_s}{\dot{y}_s} x_s + x_s$$

$$= -\left(\frac{-2R^2\omega_c}{-2R\omega_c}\right) + 2R = R$$

13 x Déflexion magnétique:

Thalès :

$$\frac{y_s}{R} = \frac{\delta_B}{L} \Rightarrow \delta_B = \frac{y_s L}{R}$$

$$\Rightarrow \delta_B = y_s \frac{L}{R} = -\frac{2R^2}{V_0} \frac{qB}{m} \times \frac{L}{R} = -\frac{2qBLR}{mV_0}$$

x Comparaison δ_E / δ_B

$$\delta_E = -\frac{qEL}{mV_0^2}$$

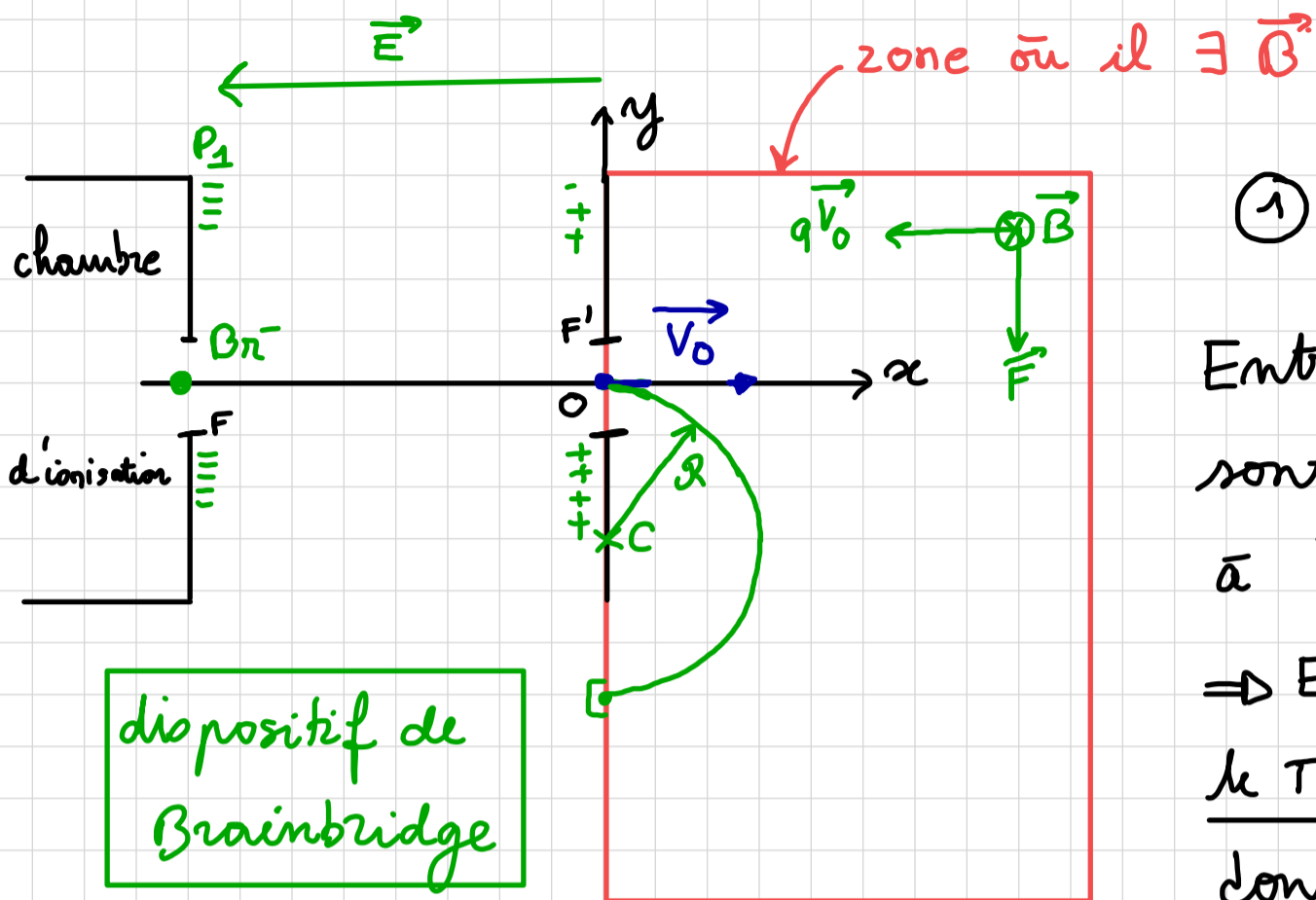
$$\delta_B = -\frac{2qBLR}{mV_0}$$

$$\boxed{\frac{\delta_E}{\delta_B} = \frac{E}{2V_0 B}}$$

$$\begin{cases} E = 10^4 \text{ V/m} \\ B = 1 \text{ T} \\ V_0 = 10^5 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\delta_E}{\delta_B} \sim 5 \cdot 10^{-2} \ll 1}$$

Application : Spectrographe de masse



dispositif de Bainbridge

AN $\Delta E_c = E_{cF'} = 4 \text{ keV}$

vitesses?

$$\frac{1}{2} m v_{F'}^2 = eU$$

$$v_{F'} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

⇒ dépend de m!

① E_c des ions en F'

Entre F et F', les ions sont soumis uniquement

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

$$\Rightarrow E_p = qV$$

le TEM entre F et F'

donne:

$$\Delta E_c + q \overbrace{(V_{P_2} - V_{P_1})}^U = 0$$

$$\Delta E_c = E_c(F') = eU$$

⇒ indépendant de m

② Voir schéma

③ $R = \frac{m v_0}{eB} \Rightarrow$ dépend de m.

④ $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu \times A_1}{\mu \times A_2} = \frac{A_1}{A_2} = 0,97$

⑮
$$\begin{cases} \vec{B} = B_0 \vec{e}_y \\ \vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y + v_{0z} \vec{e}_z \end{cases}$$

⇒ Le TRC donne
$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$\omega_c = \frac{qB}{m}$ algébrique

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} + \omega_c y \\ \dot{y} = v_{0y} - \omega_c x \\ \dot{z} = v_{0z} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = \omega_c v_{0y} \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_{0x} \\ z = v_{0z} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v_{0y}}{\omega_c} + A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t \\ y = -\frac{v_{0x}}{\omega_c} + C \cos \omega_c t + D \sin \omega_c t \end{cases}$$

$$\text{CI} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 0 = \frac{v_{0y}}{\omega_c} + A \\ y(0) = 0 = -\frac{v_{0x}}{\omega_c} + C \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{0x} = B \omega_c \\ \dot{y}(0) = v_{0y} = D \omega_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_{0y}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) + \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y(t) = -\frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) + \frac{v_{0y}}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ z(t) = v_{0z} t \end{cases}$$

\Rightarrow Mvt hélicoïdal

\times pas de l'hélice: $z(t + T_c) = z(t) + h$
 $\Rightarrow \boxed{v_{0z} \times \frac{2\pi}{\omega_c} = h}$

\times cercle ds le plan (Oxy)

$$\begin{cases} v_{0y} x - v_{0x} y = \left(\frac{v_{0y}^2}{\omega_c} + \frac{v_{0x}^2}{\omega_c} \right) (1 - \cos \omega_c t) \\ v_{0x} x + v_{0y} y = \left(\frac{v_{0x}^2}{\omega_c} + \frac{v_{0y}^2}{\omega_c} \right) \sin \omega_c t \end{cases}$$

En posant $v_{0\perp}^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$, on obtient:

$$\cos \omega_c t = 1 - \frac{(v_{0y} x - v_{0x} y)}{v_{0\perp}^2 / \omega_c} \quad \text{et} \quad \sin \omega_c t = \frac{v_{0x} x + v_{0y} y}{v_{0\perp}^2 / \omega_c}$$

D'où :

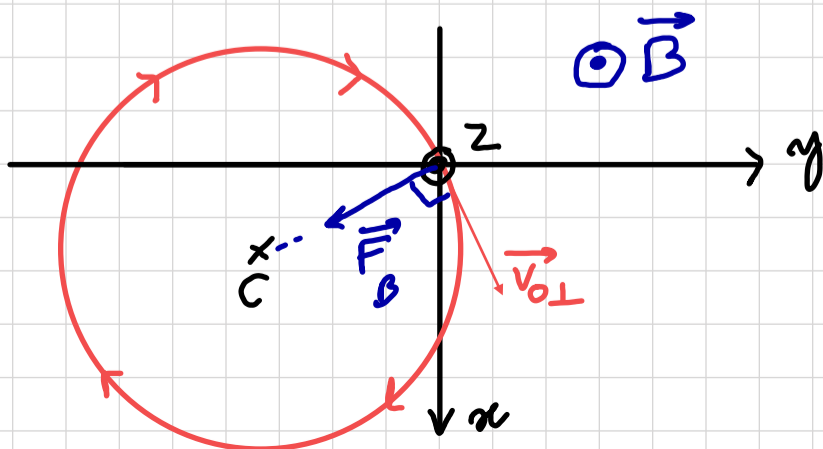
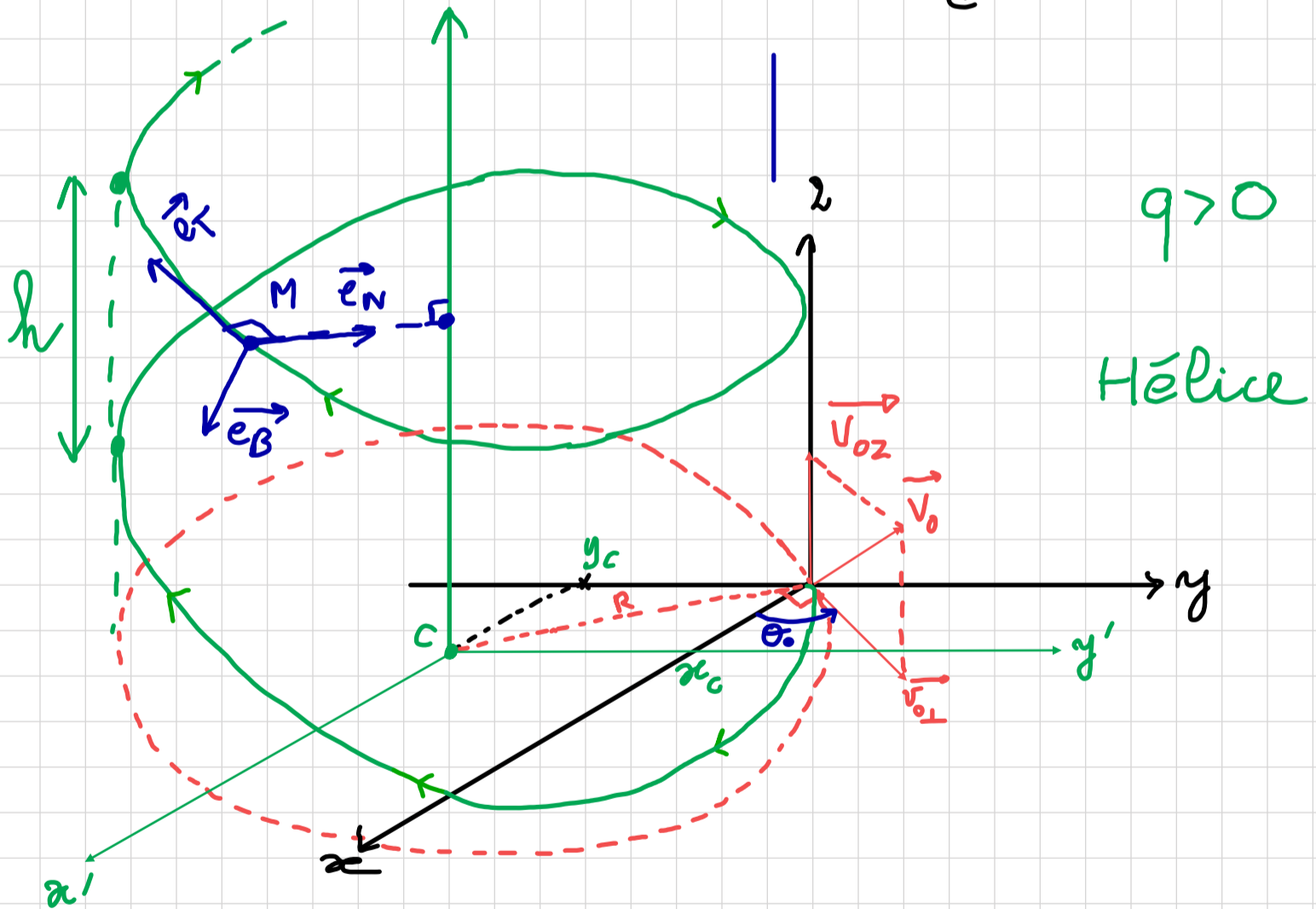
$$\left(\frac{v_{0\perp}^2}{\omega_c} - v_{0y}x + v_{0x}y\right)^2 + (v_{0x}x + v_{0y}y)^2 = \left(\frac{v_{0\perp}^2}{\omega_c}\right)^2$$

$$v_{0\perp}^2 x^2 + v_{0\perp}^2 y^2 - 2\frac{v_{0\perp}^2}{\omega_c} v_{0y}x + 2\frac{v_{0\perp}^2}{\omega_c} v_{0x}y = 0$$

$$x^2 - 2\frac{v_{0y}}{\omega_c}x + y^2 - 2\frac{v_{0x}}{\omega_c}y = 0$$

$$\boxed{\left(x - \frac{v_{0y}}{\omega_c}\right)^2 + \left(y + \frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_{0\perp}}{\omega_c}\right)^2}$$

⇒ cercle { de rayon $R = \frac{v_{0\perp}}{|\omega_c|} = \frac{m\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}}{|q|B}$
 de centre $C(x_c = \frac{v_{0y}}{\omega_c}; y_c = -\frac{v_{0x}}{\omega_c})$



cercle ds le plan
 (Oxy)
 (q > 0)

16) Coordonnées cylindriques

x Changement de coordonnées : Le repère cartésien associé au repère cylindrique que l'on souhaite définir est

$$(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \Rightarrow \begin{cases} x' = x - x_c \\ y' = y - y_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - x_c = -\frac{v_{0y}}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y' = y - y_c = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{v_{0y}}{\omega_c} \sin \omega_c t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \left[-\frac{v_{0y}}{v_{0\perp}} \cos \omega_c t + \frac{v_{0x}}{v_{0\perp}} \sin \omega_c t \right] \\ y' = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \left[\frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{v_{0y}}{\omega_c} \sin \omega_c t \right] \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Astuce} \\ \text{classique} \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x' = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t - \theta_0) \\ y' = \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t - \theta_0) \end{matrix}} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \cos \theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_{0\perp}} \\ \sin \theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0\perp}} \end{cases}$$

⇒ Les coordonnées cylindriques vérifient :

$$\begin{cases} r^2 = x'^2 + y'^2 = R^2 \Rightarrow r = R \\ \tan \theta = \frac{y'}{x'} = \cotan(\omega_c t - \theta_0) \Rightarrow \text{on choisit : } \theta = \frac{\pi}{2} - \omega_c t - \theta_0 \\ z = v_{0z} t \quad \text{inchangée} \end{cases}$$

x D'où $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \dot{\theta} = -\omega_c \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

x vitesse : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{v} = -R \omega_c \vec{e}_\theta + v_{0z} \vec{e}_z}$$

x Accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{a} = -R \omega_c^2 \vec{e}_r}$$

(17)

Base locale de Frénet (HP)

x $\vec{v} = v \vec{e}_T$ où $v = \|\vec{v}\| = v_0$ (\vec{F}_B ne travaille pas)

Sachant que $\vec{v} = -R\omega_c \vec{e}_\theta + v_{0z} \vec{e}_z$, on en déduit:

vecteur tangent

$$\vec{e}_T = -\frac{R\omega_c}{v_0} \vec{e}_\theta + \frac{v_{0z}}{v_0} \vec{e}_z$$

$$x \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_T + \frac{v^2}{R} \vec{e}_N = \frac{v_0^2}{R} \vec{e}_N$$

Sachant que $\vec{a} = -R\omega_c^2 \vec{e}_r$, on en déduit:

Rayon de courbure

$$R = \frac{v_0^2}{R\omega_c^2} = \frac{v_0^2}{v_{0\perp} |\omega_c|} = \frac{v_0^2 m}{|q| B v_{0\perp}}$$

vecteur normal

$$\vec{e}_N = -\vec{e}_r$$

x Le dernier vecteur de la base de Frénet (vecteur binormal) vérifie:

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{R\omega_c}{v_0} \\ \frac{v_{0z}}{v_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_{0z}/v_0 \\ \frac{R\omega_c}{v_0} \end{pmatrix}$$

vecteur binormal

$$\vec{e}_B = -\frac{v_{0z}}{v_0} \vec{e}_\theta + \frac{R\omega_c}{v_0} \vec{e}_B$$

x Abcisse curviligne

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \|\vec{v}\| dt = v_0 dt$$

$$\Rightarrow s(t) = v_0 t$$

Application : Mirrors magnétiques

① Mot particule ds \vec{B} uniforme

Déjà fait \Rightarrow seuls les résultats sont donnés.

111
$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \omega_c = \frac{qB}{m} \text{ algébrique.}$$

 \hookrightarrow vitesse angulaire

112 \triangle Les C.I ont changé!

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\dot{y}_0}{\omega_c} \cos \omega_c t \\ y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ z(t) = \dot{z}_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_c}\right)^2}$$

Circle de rayon:
 $R = \frac{\dot{y}_0}{|\omega_c|}$

\hookrightarrow $\boxed{h = \frac{2\pi}{\omega_c} \times \dot{z}_0}$ \rightarrow Pas.

113
$$\begin{cases} x r = R; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \omega_c t \\ x \vec{v} = -\dot{y}_0 \vec{e}_\theta + \dot{z}_0 \vec{e}_z \\ x \vec{a} = -\dot{y}_0 \omega_c \vec{e}_r \end{cases}$$

114
$$\begin{aligned} x \vec{v}_z &= \dot{z} \vec{e}_z = \dot{z}_0 \vec{e}_z \Rightarrow \|\vec{v}_z\| = \text{cte} \\ x \vec{v}_\perp &= \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y = \dot{y}_0 \sin \omega_c t \vec{e}_x + \dot{y}_0 \cos \omega_c t \vec{e}_y \\ &\Rightarrow \|\vec{v}_\perp\| = \dot{y}_0 = \text{cte} \\ x \vec{v} &= \vec{v}_z + \vec{v}_\perp \Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = \text{cte} \end{aligned}$$

\hookrightarrow Résultat attendu car \vec{F}_B ne travaille pas

121
$$x T_{ce} = 100 \mu s = \frac{2\pi}{|\omega_{ce}|} \Rightarrow \underline{|\omega_{ce}| = 63 \text{ krad/s}}$$

$$x \omega_{ce} = \frac{eB}{m_e} \Rightarrow \underline{B = 3,6 \text{ nT}}$$

122

$$\times \omega_{cp} = \frac{eB}{m_p} = 36 \text{ krads}$$

$$\times T_{cp} = \frac{2\pi}{\omega_{cp}} = 0,18 \text{ s}$$

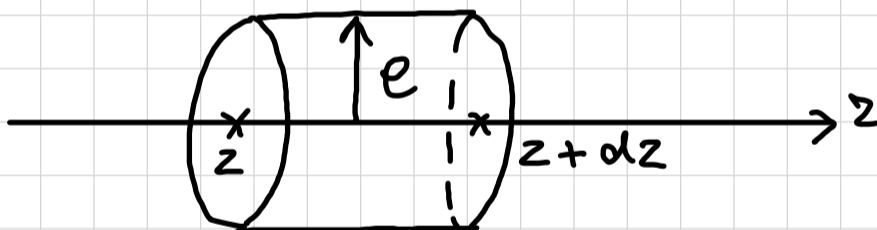
② Mot de \vec{B} non uniforme

②1 Approche théorique

D'où vient la relation $B_e(\rho, z) = -\frac{e}{2} \frac{\partial B_z}{\partial \rho}$?

\times On considère le cas d'un champ \vec{B} faiblement non axial : $\vec{B}(\rho, z, \theta) = \vec{B}(\rho, z) = \underbrace{B_z(\rho, z)}_{\approx B_z(z)} \vec{e}_z + B_e(\rho, z) \vec{e}_\rho$
 ↑
 Invariance par rotation

\times Soit le méso-cylindre, d'axe (Oz) , de longueur dz , de base de rayon e :



\Rightarrow sachant que $\text{div } \vec{B} = \vec{0}$, le flux de \vec{B} à travers ce cylindre est nul (flux sortant) :

$$\underbrace{-\pi e^2 B_z(z) + \pi e^2 B_z(z+dz)}_{\pi e^2 \frac{dB_z}{dz} dz} - \underbrace{2\pi e dz B_e(\rho, z)}_{\text{ordre 1}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_e(\rho, z) = -\frac{e}{2} \frac{dB_z}{dz}}$$

Très classique

2.11

$$\dot{z} B_e(e, z) = \frac{dz}{dt} \times \left(-\frac{e}{\mathcal{E}} \frac{dB_z}{dz} \right) = -\frac{e}{\mathcal{E}} \frac{dB_z}{dt}$$

2.12

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{e} - e \dot{\theta}^2 \\ \frac{1}{e} \frac{d}{dt} (e^2 \dot{\theta}) \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{F}_B = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} \dot{z} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_e \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B = \begin{cases} q r \dot{\theta} B_z \\ \dot{z} B_e - r \dot{\theta} B_z \\ -r \dot{\theta} B_e \end{cases}$$

Le TRC nous donne directement :

$$\begin{cases} m(\ddot{e} - e \dot{\theta}^2) = q e \dot{\theta} B_z \\ \frac{m}{e} \frac{d}{dt} (e^2 \dot{\theta}) = q (\dot{z} B_e - \dot{e} B_z) = q \left(-\frac{e}{\mathcal{E}} \frac{dB_z}{dt} - \frac{de}{dt} B_z \right) = -\frac{q}{e} \frac{d}{dt} \left(\frac{e^2 B_z}{2} \right) \\ m \ddot{z} = -q e \dot{\theta} B_e \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \frac{d}{dt} \left(m e^2 \dot{\theta} + \frac{q e^2 B_z}{2} \right) = 0$$

$$\text{soit } \boxed{m e^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} q e^2 B_z = \text{cte}}$$

2.13

On utilise les résultats relatifs au champ uniforme :

$$\begin{cases} e = \frac{m v_{\perp}}{|q| B_z} \\ \dot{\theta} = \frac{q B_z}{m} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m v_{\perp}}{|q| B_z} \right)^2 \left[\frac{m q B_z}{m} + \frac{1}{2} q B_z \right] = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B_z^2} \times q B_z = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v_{\perp}^2}{B_z} = \text{cte}}$$

22

Miroirs magnétiques

221

x L'axe (Oz) est dirigé vers les zones de champ

$$\text{fort} \Rightarrow B_z \uparrow \Rightarrow v_{\perp} \downarrow$$

$$\text{OR } \|\vec{v}\|^2 = v_0^2 = v_{\perp}^2 + v_z^2 = \text{cte} \Rightarrow v_z \downarrow$$

$$x \quad h = \frac{2\pi}{\omega_c} v_z = \frac{2\pi m}{q B_z} v_z = \frac{2\pi m \times \text{cte} \times v_z}{q (v_0^2 - v_z^2)}$$

Sachant que la fct $\frac{x}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$

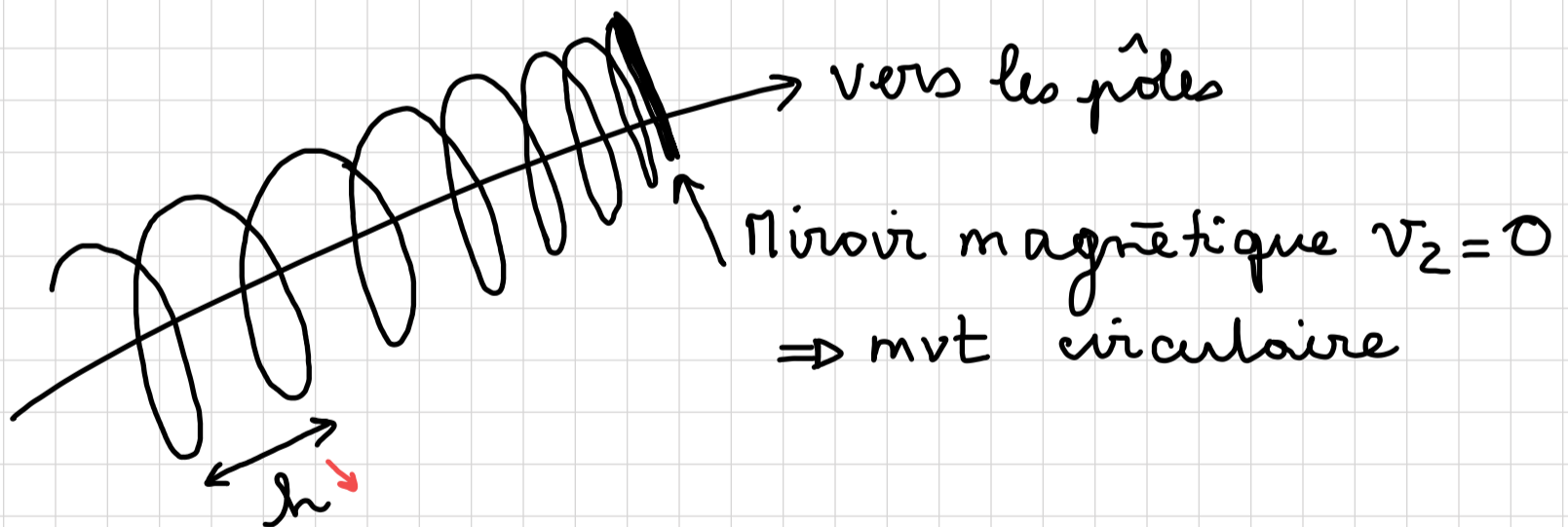
on en déduit que $h \downarrow$ qd $v_z \downarrow$

$$x \quad R = \rho = \frac{m v_{\perp}^2}{|q| B_z} \approx \text{cte}$$

$$x \quad \omega_c = \frac{q B_z}{m} \uparrow$$

Qd la particule se dirige vers les pôles, $v_z \downarrow$, $h \downarrow$
 $v_{\perp} \uparrow$, $\omega_c \uparrow$

222



223

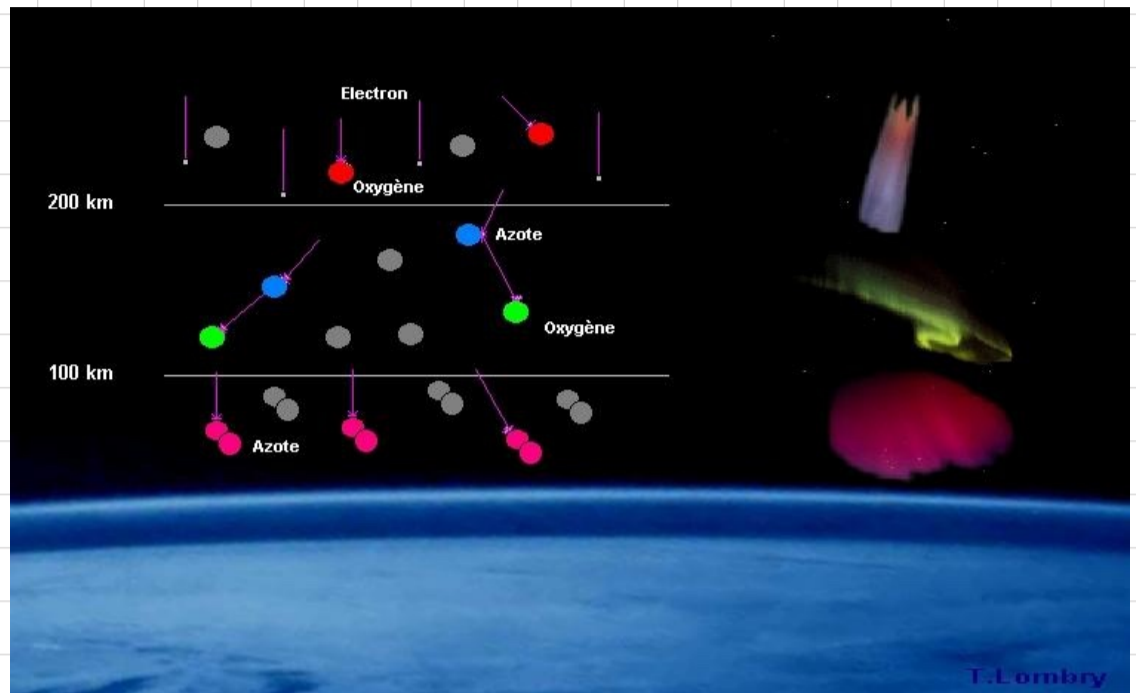
x Plus v_{z0} est importante, plus la distance le long de la lsc pour annuler v_z sera importante et plus l'altitude du miroir magnétique sera faible

x Si les particules descendent suffisamment

bas en altitude, elles rentrent en collision avec les molécules de l'atmosphère créant des aurores boréales.

Molécules ou atomes	Altitude (en km)	Couleurs
Oxygène O	250	Rouge
Oxygène O	110	Vert
Diazote N2	100	Mauve
Diazote N2	90-100	Jaune
Diazote N2	90	Bleu

Transitions radiatives
de la visibles



Couleurs des aurores en fct de l'altitude

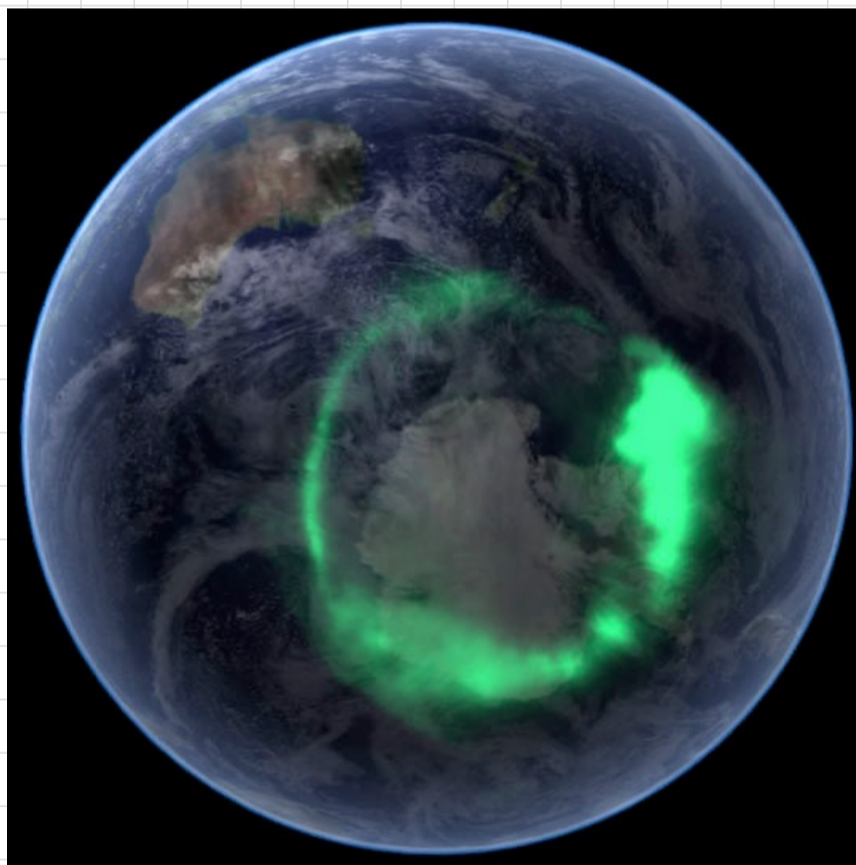


photo prise par
la satellite

IMAGE de la
NASA le 11/09/05
(Aurore Australe)

18 Prise en compte des frottements

D'après ce qui précède, et en ajoutant $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$, on

obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} - \frac{\alpha}{m} \dot{x} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} - \frac{\alpha}{m} \dot{y} & (2) \\ \ddot{z} = 0 - \frac{\alpha}{m} \dot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{z}_0 e^{-t/\tau} \\ z = z_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \end{cases}$$

x méthode ϕ : $\underline{u} = x + iy$

$$(1) + i(2) \Rightarrow \underline{\ddot{u}} = \omega_c \underbrace{(y\dot{-} - i\dot{x})}_{\frac{\dot{u}}{i}} - \frac{1}{\delta} \underline{\dot{u}}$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{u}} + \left(i\omega_c + \frac{1}{\delta} \underline{\dot{u}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{u}} = \underline{A} e^{(-i\omega_c - \frac{1}{\delta})t}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \frac{-\underline{A}}{i\omega_c + \frac{1}{\delta}} e^{-(i\omega_c + \frac{1}{\delta})t} + \underline{B}$$

$$\times \text{C.I} \begin{cases} \underline{u}(0) = 0 \Rightarrow \underline{B} = \frac{\underline{A}}{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + \omega_c^2} \left(\frac{1}{\delta} - i\omega_c\right) \\ \underline{\dot{u}}(0) = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0 = \underline{A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0 \quad \text{et} \quad \underline{B} = \frac{\left(\frac{1}{\delta} - i\omega_c\right)(\dot{x}_0 + i\dot{y}_0)}{\frac{1}{\delta^2} + \omega_c^2}$$

$$\times \underline{u} = \frac{(\dot{x}_0 + i\dot{y}_0) \left(\frac{1}{\delta} - i\omega_c\right)}{\frac{1}{\delta^2} + \omega_c^2} \left\{ -(\cos\omega_c t - i\sin\omega_c t) e^{-t/\delta} + 1 \right\}$$

$$x + iy = \frac{(\dot{x}_0/\delta + \dot{y}_0\omega_c) + i(\dot{y}_0/\delta - \dot{x}_0\omega_c)}{\frac{1}{\delta^2} + \omega_c^2} \left\{ 1 - \cos\omega_c t e^{-t/\delta} + i\sin\omega_c t e^{-t/\delta} \right\}$$

$$x = \frac{\dot{x}_0/\delta + \dot{y}_0\omega_c}{\frac{1}{\delta^2} + \omega_c^2} (1 - \cos\omega_c t e^{-t/\delta}) - \frac{(\dot{y}_0/\delta - \dot{x}_0\omega_c)}{\frac{1}{\delta^2} + \omega_c^2} \sin\omega_c t e^{-t/\delta}$$

$$y = \frac{\dot{y}_0/\delta - \dot{x}_0\omega_c}{\frac{1}{\delta^2} + \omega_c^2} (1 - \cos\omega_c t e^{-t/\delta}) + \frac{\dot{x}_0/\delta + \dot{y}_0\omega_c}{\frac{1}{\delta^2} + \omega_c^2} \sin\omega_c t e^{-t/\delta}$$

⇒ spirale

x position finale : $t \gg \tau$.

$$x_f = \frac{\dot{x}_0 \tau + y_0 \omega_c}{\frac{1}{\tau^2} + \omega_c^2} ; y_f = \frac{\dot{y}_0 \tau - x_0 \omega_c}{\frac{1}{\tau^2} + \omega_c^2}$$

$$\begin{aligned} x &= x_f (1 - \cos \omega_c t e^{-t/\tau}) - y_f \sin \omega_c t e^{-t/\tau} \\ y &= y_f (1 - \cos \omega_c t e^{-t/\tau}) + x_f \sin \omega_c t e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

x changement de repère : $\begin{cases} x' = x - x_f \\ y' = y - y_f \end{cases}$

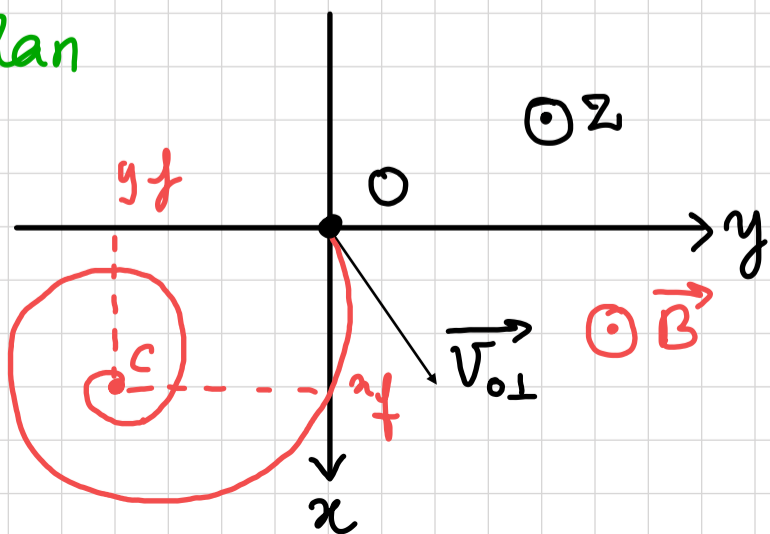
$$\begin{cases} x' = -x_f \cos \omega_c t e^{-t/\tau} - y_f \sin \omega_c t e^{-t/\tau} \\ y' = -y_f \cos \omega_c t e^{-t/\tau} + x_f \sin \omega_c t e^{-t/\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' x_f + y' y_f = - (x_f^2 + y_f^2) \cos \omega_c t e^{-t/\tau} \\ x' y_f - y' x_f = - \underbrace{(x_f^2 + y_f^2)}_{r_f^2} \sin \omega_c t e^{-t/\tau} \end{cases}$$

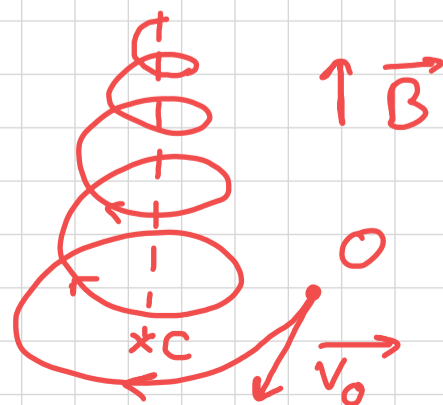
$$\Rightarrow (x' x_f + y' y_f)^2 + (x' y_f - y' x_f)^2 = r_f^4 e^{-2t/\tau}$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = r_f^2 e^{-2t/\tau}$$

dans le plan
(Oxy)



ds l'espace



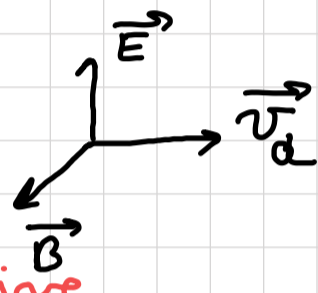
III Particules ds \vec{E} et \vec{B} uniformes

(18) $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

(19) $\vec{O} = q(\vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B}) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{v}_0 \wedge \vec{B}}$

20.1 $\left\{ \begin{array}{l} \times \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ doivent donc \u00eatre } \perp \\ \times \text{ En choisissant } \vec{v}_0 \perp \vec{B}, \text{ on a } (\vec{E}, \vec{B}, \vec{v}_0) = \text{Tri\u00e8tre direct} \\ \text{et on a } \boxed{v_0 = \frac{E}{B}} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = B \vec{u}_x \\ \vec{E} = E \vec{u}_z \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_d = v_0 \vec{e}_y = \frac{E}{B} \vec{e}_y$$



vitesse constante \Rightarrow d\u00e9riv\u00e9e

Posons $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_d$

Alors $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E} + \vec{v}_d \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B})$

$\vec{F} = q \vec{v}' \wedge \vec{B}$

Avec $\vec{v}'_0 = \vec{v}_0 - \vec{v}_d = \left(y_0 - \frac{E}{B} \right) \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$

$\Rightarrow \vec{v}'_0$ n'a pas de composante $\parallel \vec{B}$

\Rightarrow La trajectoire est un cercle de rayon $\rho = \frac{m v'_0}{|q| B}$

20.2 Le PFD donne directement :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{mvt plan} \\ m \ddot{y} = q z B \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_0 + \omega_c z \\ m \ddot{z} = q(E - \dot{y} B) \Rightarrow \dot{z} = \dot{z}_0 + \frac{q}{m} E t - \omega_c y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \omega_c (z_0 - \omega_c y + \frac{qE}{m}t) \\ \ddot{z} = \frac{qE}{m} - \omega_c (y_0 + \omega_c z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_c^2 y = \omega_c z_0 + \omega_c (\frac{qE}{m})t \\ \ddot{z} + \omega_c^2 z = \frac{qE}{m} - \omega_c y_0 \end{cases}$$

$y(t)$

$$\begin{cases} y_e = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_f = \alpha t + \beta \Rightarrow 0 + \omega_c^2 (\alpha t + \beta) = \omega_c z_0 + \omega_c (\frac{qE}{m})t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \omega_c (\frac{qE}{m}) \times \frac{1}{\omega_c^2} = \frac{E}{B} \\ \beta = z_0 / \omega_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t + \frac{z_0}{\omega_c} + \frac{E}{B} t$$

$$\begin{cases} y(0) = A + \frac{z_0}{\omega_c} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = B \omega_c + \frac{E}{B} = y_0 \Rightarrow B = \frac{(y_0 - \frac{E}{B})}{\omega_c} \end{cases}$$

$$y = \frac{z_0}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) + \frac{(y_0 - \frac{E}{B})}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{E}{B} t$$

$z(t)$

$$\begin{cases} z_e = C \cos \omega_c t + D \sin \omega_c t \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_f = (\frac{E}{B} - y_0) \frac{1}{\omega_c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z(t) = C \cos \omega_c t + D \sin \omega_c t + (\frac{E}{B} - y_0) \frac{1}{\omega_c}$$

$$\begin{cases} z(0) = C + (\frac{E}{B} - y_0) \frac{1}{\omega_c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}(0) = D \omega_c = z_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{(E/B - y_0)}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) + \frac{z_0}{\omega_c} \sin \omega_c t$$

Derive

20.3 $\vec{v}_0 = \vec{0} \Rightarrow \dot{y}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0$

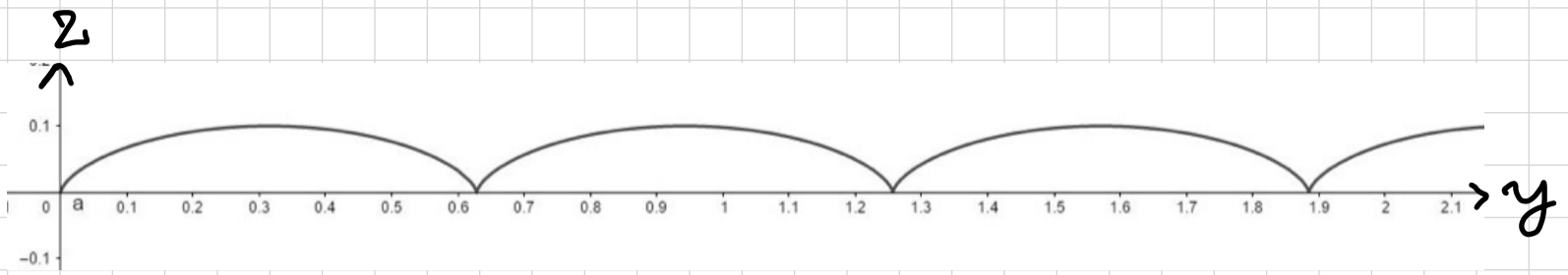
$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{B} \left(t - \frac{1}{\omega_c} \sin \omega_c t \right) \Rightarrow \underline{\text{cycloïde 1}} \\ z(t) = \frac{E}{B \omega_c} (1 - \cos \omega_c t) \end{cases}$$

20.4 $\dot{z}_0 = 0; \dot{y}_0 = \frac{2E}{B} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = \frac{E}{B} \left(t + \frac{1}{\omega_c} \sin \omega_c t \right) \\ z(t) = -\frac{E}{B \omega_c} (1 - \cos \omega_c t) \end{cases}$
 $\Rightarrow \underline{\text{cycloïde 2}}$

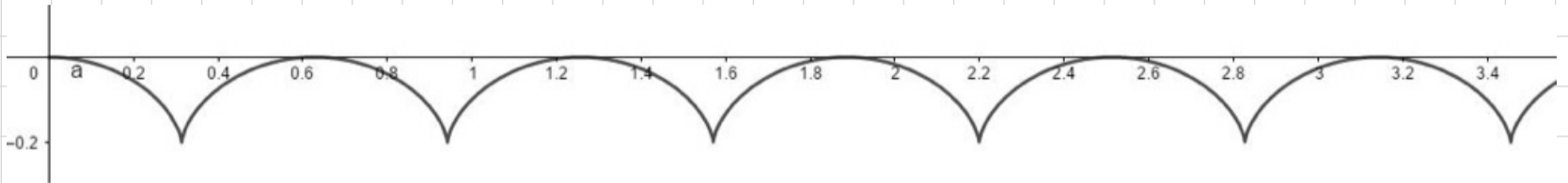
20.5 $\dot{z}_0 = 0$ $\begin{cases} y(t) = \left(\dot{y}_0 - \frac{E}{B} \right) \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c} + \frac{E}{B} t \\ z(t) = \frac{(E/B - \dot{y}_0)}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t) \end{cases} \begin{cases} \dot{y}(t) = \left(\dot{y}_0 - \frac{E}{B} \right) \cos \omega_c t + \frac{E}{B} \\ \dot{z}(t) = \left(\frac{E}{B} - \dot{y}_0 \right) \sin \omega_c t \end{cases}$

	y	\dot{y}	z	\dot{z}
$t=0$	0	\dot{y}_0	0	0
$\omega_c t = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\dot{y}_0 + \frac{E}{B} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\omega_c}$	E/B	$\left(\frac{E}{B} - \dot{y}_0 \right) \times \frac{1}{\omega_c}$	$\frac{E}{B} - \dot{y}_0$
$\omega_c t = \pi$	$\frac{E}{B} \times \frac{\pi}{\omega_c}$	$-\dot{y}_0 + 2E/B$	$2 \left(\frac{E}{B} - \dot{y}_0 \right) \times \frac{1}{\omega_c}$	0
$\omega_c t = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\dot{y}_0 + \frac{E}{B} \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right)}{\omega_c}$	E/B	$\left(\frac{E}{B} - \dot{y}_0 \right) \times \frac{1}{\omega_c}$	$-\frac{E}{B} + \dot{y}_0$
$\omega_c t = 2\pi$	$\frac{E}{B} \times \frac{2\pi}{\omega_c}$	\dot{y}_0	0	0

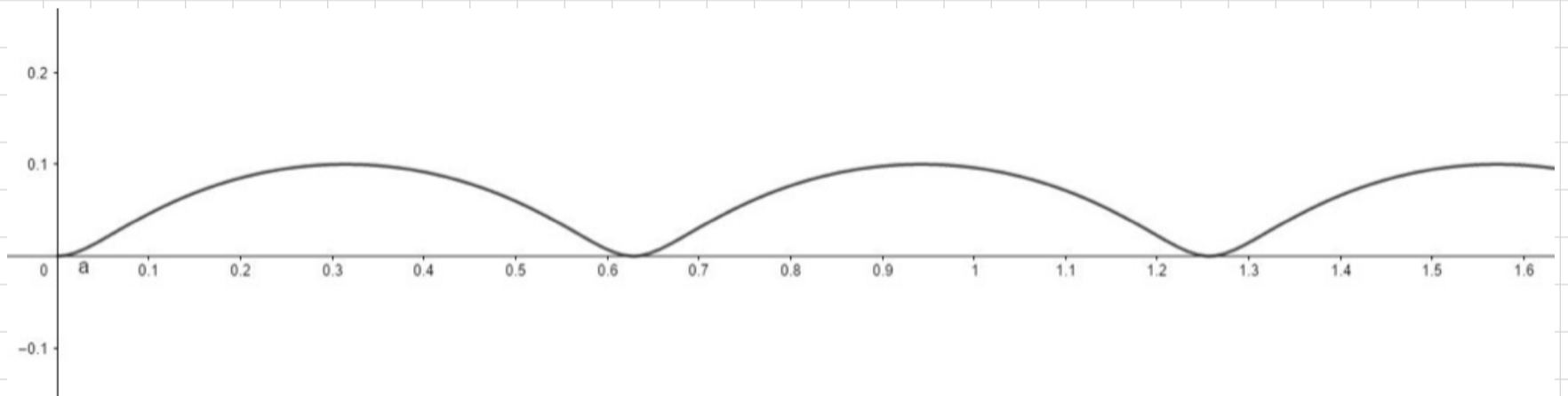
$$\begin{cases} \text{cas où } 0 < \dot{y}_0 < E/B \Rightarrow \underline{\text{Courbe 3}} \\ \text{cas où } \frac{E}{B} < \dot{y}_0 < E/B \Rightarrow \underline{\text{Courbe 4}} \\ \text{cas où } \dot{y}_0 > E/B \Rightarrow \underline{\text{Courbe 5}} \end{cases}$$



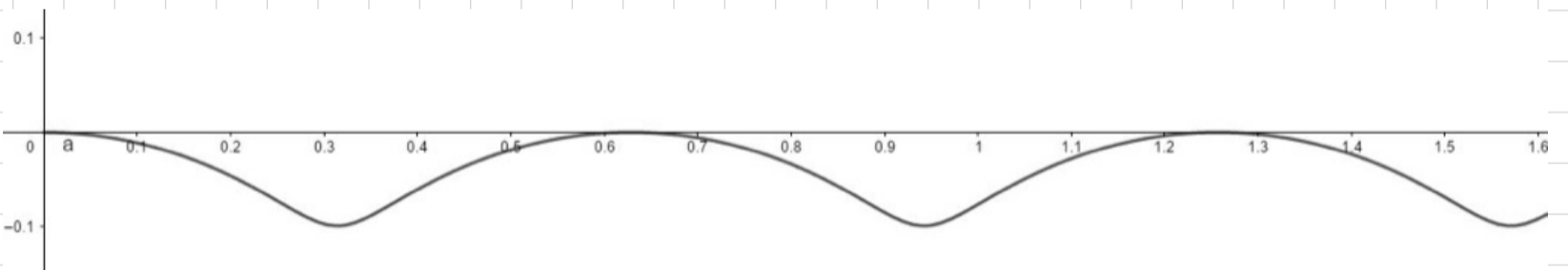
Cycloïde 1 ($y_0 = z_0 = 0$)



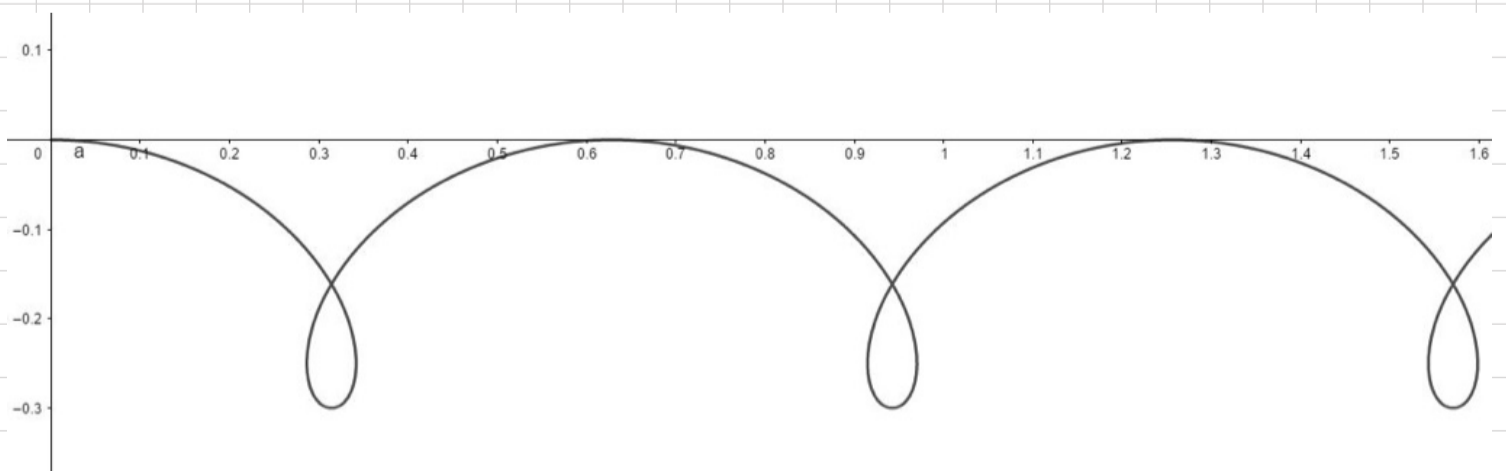
Cycloïde 2



Courbe 3



Courbe 4

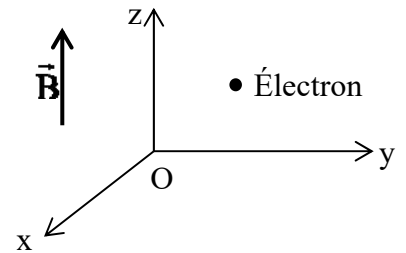


Courbe 5

Le piège de Penning

On étudie un piège de Penning permettant de confiner un électron au voisinage de l'origine O du repère associé au référentiel galiléen de l'étude. Dans cette région règnent :

- un potentiel électrostatique $V = \frac{U}{a^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$
- un champ magnétostatique uniforme \vec{B} selon Oz.



I- Ecrire les équations cartésiennes du mouvement de l'électron.

- On néglige le poids de l'électron.
- On calcule le champ électrostatique : $\vec{E} = -\text{grad}V = -\frac{2U}{a^2}x\vec{u}_x - \frac{2U}{a^2}y\vec{u}_y + \frac{4U}{a^2}z\vec{u}_z$
- Loi de la quantité de mouvement pour l'électron dans le référentiel galiléen : $m\vec{a} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} -\frac{2U}{a^2}x \\ -\frac{2U}{a^2}y \\ \frac{4U}{a^2}z \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2eU}{a^2}x \\ \frac{2eU}{a^2}y \\ -\frac{4eU}{a^2}z \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc : } \begin{cases} \ddot{x} - \frac{2eU}{ma^2}x = -\frac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} - \frac{2eU}{ma^2}y = \frac{eB}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} + \frac{4eU}{ma^2}z = 0 \end{cases}$$

II- a-On suppose que le champ magnétique est nul.

Décrire qualitativement le mouvement de l'électron selon les trois axes et définir une première pulsation caractéristique notée ω_z . En prenant $U = 10 \text{ V}$ et $a = 1 \text{ cm}$, donner un ordre de grandeur de ω_z . L'électron est-il, comme on le souhaite, confiné au voisinage de O ?

b-On suppose que le potentiel électrostatique est nul.

Décrire qualitativement le mouvement de l'électron selon les trois axes et définir une deuxième pulsation caractéristique notée ω_c . Donner un ordre de grandeur de ω_c . L'électron est-il, comme on le souhaite, confiné au voisinage de O ?

$$\text{a- } B = 0 \text{ donc il reste : } \begin{cases} \ddot{x} - \frac{2eU}{ma^2}x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{2eU}{ma^2}y = 0 \\ \ddot{z} + \frac{4eU}{ma^2}z = 0 \end{cases}$$

- Les solutions des équations en x et y vont comporter des termes en exponentielle croissante avec le temps. x et y vont tendre vers l'infini. L'électron ne pourra donc pas être confiné au voisinage de O.

- Le mouvement selon z est sinusoïdal de pulsation : $\omega_z = 2\sqrt{\frac{eU}{ma^2}}$

$$\text{Ordre de grandeur : } \omega_z \approx 2\sqrt{\frac{10^{-19} \cdot 10}{10^{-30} \cdot 10^{-4}}} = \underline{2 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}} \quad (\text{donc une fréquence de l'ordre de } 30 \text{ MHz})$$

$$\text{b- } U = 0 \text{ donc il reste : } \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{eB}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{eB}{m} \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

- Dans le plan horizontal Oxy, la trajectoire de l'électron sous l'action du champ magnétique est circulaire.

La pulsation associée est : $\omega_c = \frac{eB}{m}$

Ordre de grandeur avec $B = 1 \text{ T}$: $\omega_c \approx 10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$ (donc une fréquence de l'ordre de 16 GHz)

- Selon Oz, l'électron a un mouvement rectiligne uniforme si $\dot{z}(0) \neq 0$.
L'électron va s'écartier de O et ne sera donc pas confiné.

Conclusion : Dans les deux cas, l'électron n'est pas piégé.

III- a-Réécrire les équations du mouvement en fonction des deux pulsations ω_z et ω .

b-Montrer que l'électron peut avoir un mouvement horizontal circulaire d'équations $x(t) = A \cos \omega t$ et $y(t) = A \sin \omega t$, à condition de choisir un champ magnétique suffisamment intense.
Quelles sont les valeurs possibles pour la pulsation ω ?

a-Les équations de la question 1 deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{\omega_z^2}{2} x = -\omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} - \frac{\omega_z^2}{2} y = \omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 \end{cases}$$

b-On reporte $x(t) = A \cos \omega t$ et $y(t) = A \sin \omega t$ dans la première équation différentielle :

$$-\omega^2 A \cos \omega t - \frac{\omega_z^2}{2} A \cos \omega t = -\omega_c \omega A \sin \omega t \quad \text{d'où : } \omega^2 - \omega_c \omega + \frac{\omega_z^2}{2} = 0$$

Ce mouvement circulaire n'existe que si ω est définie. Il faut que le discriminant de cette équation du second degré soit positif.

$$\text{Soit : } \omega_c^2 - 2\omega_z^2 > 0 \quad \text{donc : } \frac{eB}{m} > \sqrt{2}\omega_z \quad \text{d'où : } B > B_{\min} = \frac{\sqrt{2}m\omega_z}{e} \quad \text{A.N : } B_{\min} \approx 2 \text{ mT}$$

$$\text{Les solutions de l'équation en } \omega \text{ sont : } \omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2})$$

Ordre de grandeur avec $\omega_z = 2.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_c = 10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$: $\omega_1 \approx 2.10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 \approx \omega_c = 10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$

Il n'y a que deux mouvements circulaires possibles dans le plan horizontal.
L'un de basse fréquence $f_1 \approx 30 \text{ kHz}$, l'autre de haute fréquence $f_2 \approx 16 \text{ GHz}$.

IV- La trajectoire de l'électron a l'allure suivante. Commenter compte tenu des résultats précédents.

On constate que l'électron se déplace au voisinage de l'origine. Le confinement est réalisé.

L'étude précédente fait apparaître trois mouvements sinusoïdaux :

- un mouvement sinusoïdal selon Oz de pulsation ω_z
- Deux mouvements horizontaux circulaires de haute et basse pulsations ω_1 et ω_2 .

Les évaluations numériques ont donné : $\omega_1 \ll \omega_z \ll \omega_2$.

Le mouvement général va être la superposition de ces trois « modes ».

On peut tenter une justification en invoquant l'analyse de Fourier : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ s'écrivent comme superposition de fonctions sinusoïdales. Les seules pulsations qui sont finalement apparues sont ω_z , ω_1 et ω_2 .

On observe bien sur la trajectoire ces trois mouvements sinusoïdaux :

- le mouvement basse fréquence qui correspond à la trajectoire circulaire horizontale moyenne
- le mouvement vertical de fréquence moyenne (8 périodes de mouvement vertical pendant un tour)
- le deuxième mouvement circulaire horizontal de haute fréquence (une dizaine de « petits tours » quand z passe de sa valeur minimale à sa valeur maximale)

Questions supplémentaires éventuelles :

- Vérifier que le potentiel est compatible avec les lois de l'électrostatique.

Il vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$

- Déterminer le rayon de la trajectoire circulaire dans le cas de la question II-b

$$R = mv/eB$$

- I.** ✗ Théorème de Gauss : Le flux (sortant) du champ électrostatique à travers une surface fermée Σ est égale au rapport de la charge située à l'intérieur de Σ par ϵ_0 .
- ✗ Pour qu'une particule chargée puisse être piégée en un point M de l'espace, il faut et il suffit qu'il existe un extremum de potentiel en M et donc, sachant que $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$, que le champ électrostatique diverge (ou converge) à partir de M : le flux du champ sur une surface entourant M est donc strictement positif (ou strictement négatif). D'après le théorème de Gauss, il doit y avoir une charge en M , la zone ne peut pas être vide de charge.
- II.** ✗ On calcule la force électrique exercée sur la particule (de charge q , de masse m) :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -q\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Soit :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -q \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{qV_0}{2a^2}x \\ -q \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qV_0}{2a^2}y \\ -q \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{qV_0}{a^2}z \end{pmatrix}$$

- ✗ On applique alors le PFD à la particule (poids négligé) :

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{qV_0}{2a^2}x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qV_0}{2a^2}y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{qV_0}{a^2}z \end{cases}$$

- ✗ Les équations trouvées sont de la forme :

$$\frac{d^2X}{dt^2} \pm \omega_0^2 X = 0$$

En fonction du signe de qV_0 , on a donc soit l'équation d'un oscillateur harmonique (état lié), soit des solutions divergentes (état de diffusion) :

- Si $qV_0 > 0$, alors le mouvement de la particule est confiné suivant x et y , en revanche la particule peut s'échapper dans la direction (Oz) .
- Si $qV_0 < 0$, alors la particule est piégée dans la direction (Oz) , en revanche la particule peut s'échapper dans les directions (Ox) et (Oy) .

Ainsi, on ne peut pas piéger la particule grâce à ce potentiel.

- III.** 1. $V(t)$ étant une fonction sinusoïdale du temps, il change de signe périodiquement : pendant une demi-période ($qV(t) > 0$), la particule sera piégée dans le plan (Oxy) mais dérivera dans la direction (Oz) et pendant la demi-période suivante ce sera l'inverse. En choisissant judicieusement la période de $V(t)$, on comprend bien que l'on peut envisager de piéger la particule.
2. Le PFD appliqué à la particule donne cette fois :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{qV_0}{2a^2m} \cos(\omega_p t) x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{qV_0}{2a^2m} \cos(\omega_p t) y \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{qV_0}{a^2m} \cos(\omega_p t) z \end{cases}$$

On pose alors :

$$\tau = \frac{\omega_p t}{2}$$

$$q_z = -2q_x = -2q_y = \frac{2qV_0}{ma^2\omega_p^2}$$

et on obtient le système d'équation demandé.

3. Plaçons nous dans le cas où $qV_0 > 0$ et dans le cas où $\cos \omega_p t > 0$ (première alternance par exemple) : La particule dérive suivant l'axe (Oz). Pour trouver un temps caractéristique de cette dérive, on considère que la particule est mise en mouvement sous un potentiel V_0 (en réalité inférieur) avec une vitesse de l'ordre de grandeur :

$$v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$

Le temps mis par la charge pour s'échapper de ce potentiel électrostatique ($z > a$) est donc :

$$t^* = \frac{a}{v} = \sqrt{\frac{a^2 m}{2qV_0}}$$

Pour que la particule ne s'échappe pas, il faut donc que ce temps t^* soit supérieur à la période d'évolution du potentiel :

$$\frac{2\pi}{\omega_p} < t^* \Rightarrow \omega_p > 2\pi \sqrt{\frac{2qV_0}{a^2 m}}$$

4. On garde la condition la plus contraignante, c'est à dire celle portant sur q_z , on arrive alors à :

$$\omega_p > \sqrt{\frac{2qV_0}{0.908a^2 m}}$$