

Etude de l'instabilité de Rosenweig (X-ENS PC 2018)

I Cadre de l'étude

(1) $\frac{du}{dx} = ka \cos(kx)$ donc l'approximation s'écrit $ka \ll 1$

(2) Si le résultat obtenu est linéaire, on peut utiliser les séries ou les transformées de Fourier pour retrouver n'importe quelle déformation (périodique ou non) de la surface.

Je suppose que ce sera le cas pour les faibles déformations car on fait souvent des DL₁.

(3)



↓ flux de ferrofluide

Le volume "en moins" à droite est égal au volume "en plus" à gauche (donc le volume / la masse / la matière est constante) dans \mathcal{D} . \mathcal{D} est donc fermé

II Energie de surface

(4) $E_s = \iint_S \gamma dS - \iint_{\text{référence}} \gamma dS$

où $\iint_{\text{référence}} \gamma dS = \int_{\lambda} \int_L \gamma dx dy = \gamma L \lambda = \gamma L \int dx$

et $\iint_S \gamma dS = \gamma \int dy \int ds = L \gamma \int ds$

d'où $E_s = \gamma L \int (ds - dx)$

(5) $\int (ds - dx) = \int_0^{\lambda} [\sqrt{1 + (u'(x))^2} - 1] dx$ où $u'(x) = ka \cos kx$

$= \int_0^{\lambda} \left[1 + \frac{1}{2} (ka)^2 \cos^2(kx) - 1 \right] dx$ après DL₁

$= \frac{1}{2} (ka)^2 \int_0^{\lambda} \cos^2(kx) dx$

Or $\langle \cos^2(kx) \rangle = \frac{1}{2}$

donc $\int (ds - dx) = \frac{1}{2} (ka)^2 \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{2R}{\lambda} \right)^2 a^2 \lambda$

$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \cos^2(kx) dx$

Et finalement $E_s = \gamma L \frac{\pi^2 a^2}{\lambda} = \gamma L \frac{\pi}{2} ka^2$

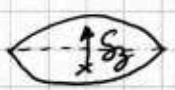
$E_s \sim \gamma L ka^2$

en remplaçant le préfacteur numérique.

III Energie de pesonement

(6) La masse  parre à 

Que vaut cette masse? A un prefacteur pres, elle vaut $\rho \times a \times L \times \frac{1}{2}$
d'où $\boxed{S_m \sim \frac{\rho a L}{2}}$ (avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

(7)  d'où $\boxed{S_y \sim a}$

(8) Et finalement $\boxed{E_g = S_m g S_y = \frac{\rho a^2 L g}{2}}$

IV Analyse de stabilité de l'interface sans champ magnétique

(9) $E_p = E_s + E_g$ où $E_s \sim \gamma k a^2$ et $E_g \sim \frac{\rho a^2 L g}{2}$

d'où $\boxed{E_p \sim L \left(\gamma k + \frac{\rho g}{2} \right) a^2}$

(10) γk et $\frac{\rho g}{2}$ ont la même dimension
donc k^2 et $\frac{\rho g}{\gamma}$ aussi or k^2 est en m^{-2} donc on pose

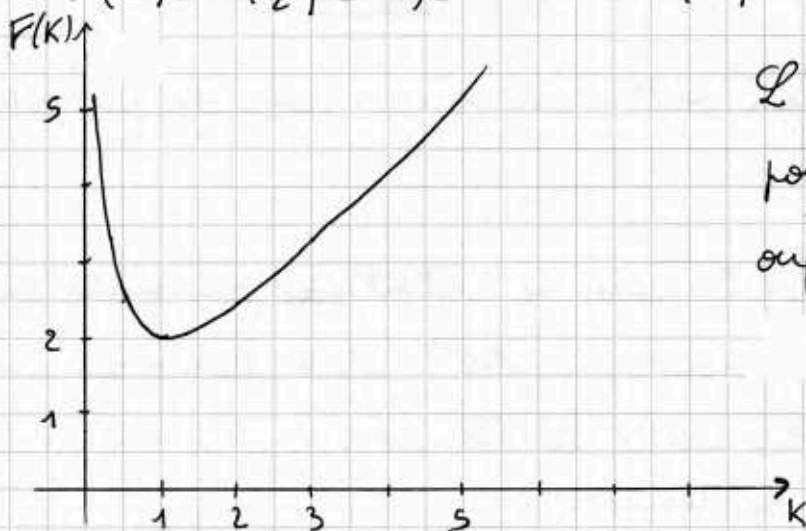
$\boxed{l = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}}$ C'est la longueur capillaire

(11) $E_p = L a^2 \left(\gamma k l \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} + \frac{\rho g}{2 l} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \right)$ en multipliant chaque
terme par $\frac{l}{l}$

d'où $\boxed{E_p \sim L a^2 \sqrt{\gamma \rho g} \left(k + \frac{1}{k} \right)}$

On a donc $\boxed{E^* = L a^2 \sqrt{\gamma \rho g}}$ et $\boxed{F(k) = k + \frac{1}{k}}$

(12) $F'(k) = 1 - \frac{1}{k^2}$ d'où $F_{\min} = F(1) = 2$
 $F(2) = F(\frac{1}{2}) = 2,5$ $F(3) = F(\frac{1}{3}) = 3,33$



L'énergie potentielle est minimale
pour $k=1$, c'est-à-dire $\boxed{k = \frac{1}{l}}$
ou $\boxed{\lambda = \frac{l}{2\pi}}$ c'est la λ qui sera obtenu

Mais ces oscillations ne sont jamais stables car E_p est minimale pour $a=0$, c'est-à-dire pour l'interface plane.

(14) Pour un fluide incompressible, $D_V \propto$ conserve sur un tube de courant donc $L \frac{1}{3} V_x^* = \frac{L \Delta V_x^*}{D_{V_x}}$



d'où $V_x^* \sim V_z^* \sim \dot{a}$

$$(15) \left[E_{cv} \sim \frac{1}{2} m V_x^{*2} \right] \sim \underbrace{\rho L \frac{1}{3} \Delta}_{\text{la masse qui descend}} \dot{a}^2 \sim \left[\frac{\rho L \dot{a}^2}{k^2} \right]$$

la masse = celle du volume qui descend



$$(16) E_{ch} = \frac{1}{2} m V_x^{*2} = \left[E_{cv} \sim \frac{\rho L \dot{a}^2}{k^2} \sim E_{ca} \right]$$

Les énergies cinétiques sont comparables, on prendra $E_c \sim \frac{\rho L \dot{a}^2}{k^2}$

(17) L'énergie mécanique se conserve en l'absence d'autres forces donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$ or $E_m = E_c + E_p \sim \frac{\rho L \dot{a}^2}{k^2} + L a^2 \sqrt{\gamma \rho g} F(k)$

$$\text{donc } \frac{dE_m}{dt} = L \left[\rho \frac{2 \dot{a} \ddot{a}}{k^2} + 2 \dot{a} a \sqrt{\gamma \rho g} F(k) \right] = 0$$

$$\text{On divise par } \frac{2 \rho \dot{a}}{k^2} \quad \ddot{a} + a k^2 \sqrt{\frac{\gamma g}{\rho}} F(k) = 0$$

On multiplie le terme de droite par $\frac{l^2}{l^2} = \frac{l^2 \rho g}{\gamma}$

$$\ddot{a} + a F(k) k^2 \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} l = 0$$

$$\text{où } \omega^* = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} \sqrt{g}$$

(18) C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega(k) = \omega^* k \sqrt{F(k)}$$

(19) La surface oscille et les pics ne restent pas au même endroit. S'il n'y a pas d'amortissement (ω réel), c'est parce qu'on a négligé la viscosité. En réalité le fluide est visqueux et les oscillations s'atténuent rapidement.

V Influence du champ magnétique

(20) $e_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ est l'énergie magnétique volumique en $J.m^{-3}$

e_B est une énergie surfacique en $J.m^{-2}$ or $\frac{B^2}{2\mu_0} a^2 k$ est en $J.m^{-2}$
(car a est en m et k en m^{-1}) donc α est sans dimension

(21) αk est la pente de la surface tracée et a sa hauteur.

Plus α est grand, plus les lés sont déformées, ce qui augmente l'énergie et de même pour la pente. D'où la dépendance en $a^2 k$.

$$(22) E_p' = E_p - \underbrace{\alpha \frac{B^2}{\mu_0} a^2 k}_{w_B} \times \underbrace{\Delta x L}_{\text{surface}} \quad \text{ou } \frac{1}{k}$$

$$(23) E_p' = L a^2 \left[\sqrt{\rho g \delta} F(k) - w_B \right]$$

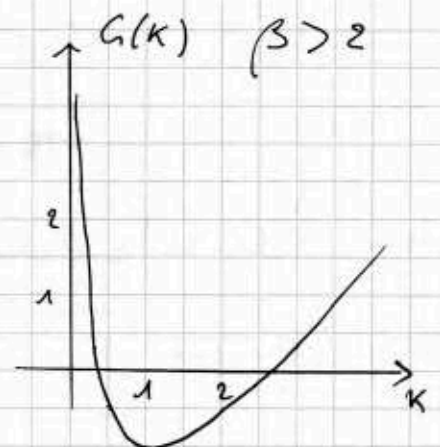
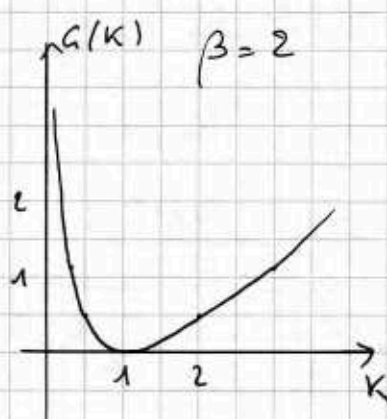
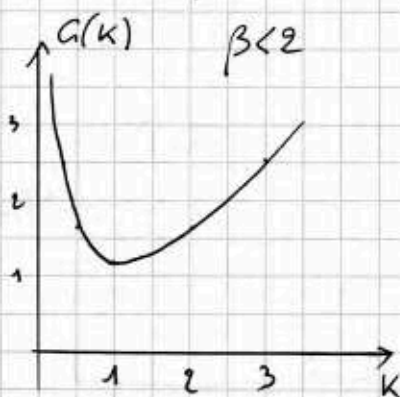
$$\text{Ainsi } \boxed{E_p' = E^* \left[F(k) - \frac{w_B}{\sqrt{\rho g \delta}} \right] = E^* G(k)} \quad \text{où } E^* = L a^2 \sqrt{\rho g \delta}$$

$$\text{ou } G(k) = k + \frac{1}{k} - \beta, \quad \boxed{\beta = \frac{w_B}{\sqrt{\rho g \delta}}}$$

(24) C'est le décalage en énergie

C'est le rapport entre l'énergie magnétique et E^* .

(25) $F(k) \geq 2$ donc les 3 comportements possible sont pour $\beta < 2$, $\beta = 2$ et $\beta > 2$.



(26) Pour $G(k)$ (et E_p') < 0 , l'interface "ondulée" est plus stable que l'interface plane. Il y a donc des pics qui apparaissent si $\beta > 2$. $\boxed{\beta_c = 2}$

(27) pour $\beta = 2^+$, $G(k) < 0$ pour $k=1$. C'est donc pour ce nombre d'onde adimensionné qui apparaît les oscillations $\boxed{K_c = 1}$ donc $k_c l = 1$ donc $\boxed{L_c = l}$ (si "2R=1")

(28) $E_m' = E_p' + E_c$ avec E_c qui n'a pas changé d'origine
 $\boxed{E_m' = L a^2 \sqrt{\rho g} G(k) + \frac{\rho L \dot{a}^2}{k^2}}$ C'est comme E_m mais avec $G(k)$ au lieu de $F(k)$

On obtient donc de la même façon: $\boxed{\ddot{a} + a G(k) K^2 \sqrt{\frac{\rho g}{\delta}} \varphi = 0}$

avec le même $\boxed{\omega^* = \sqrt{g} \sqrt[4]{\frac{\rho g}{\delta}} = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

et, avant de dériver $\boxed{\ddot{a}^2 + \dot{a}^2 G(k) K^2 \omega^{*2} = \text{cte}}$

(29) Ainsi $\boxed{\omega(k) = \omega^* G(k) K^2}$

(30) si $G(k) > 0$, alors $\omega(k) = \omega^* K \sqrt{G(k)}$ est réel (choix positif)
 mais si $G(k) < 0$, alors $\omega(k)$ est imaginaire pur
 $\omega(k) = \pm j \omega^* K \sqrt{-G(k)}$

L'interface n'oscille plus mais les ondulations peuvent être amplifiées.

Si $\beta < \beta_c$, toutes les pulsations sont réelles, les ondulations ne sont pas amplifiées, elles oscillent (et s'amortissent à cause de la viscosité).

Si $\beta = \beta_c$, l'ondulation de $K_c = 1$ reste fixe, les autres oscillent (et s'amortissent)

Si $\beta > \beta_c$, il y a des ondulations de $K \approx K_c$ qui sont amplifiées, les autres oscillent (et s'amortissent).

Il faut donc $\beta > \beta_c$ pour voir les "hérissons" (instabilités de Rosenweig)

(31) Le temps caractéristique τ_c est en $\frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta - \beta_c}}$

En effet si $\beta \rightarrow \beta_c$, on obtient un régime stationnaire, de temps caractéristique infini; ce temps caractéristique, qui vaut aussi $\frac{1}{\text{Im}(\omega(k))}$, diminue à mesure que $G(k)$ est plus négatif.

(32) Les 1^{ers} pics sont obtenus pour $k=1$, c'est-à-dire $\lambda = l$ (cf Q27)
On trouve donc $d_c = l$

(33) Une goutte de plus de 0,2 cm de rayon s'aplatit.
donc $d_c \approx 0,2 \text{ cm}$

(34) Sur la photo, on voit qu'il y a 5 pointes sur 1 cm 1 cm.
|||||
donc $d_c \approx 0,25 \text{ cm}$. C'est compatible.

(35) On dérive par rapport au temps:

$$\omega^* \left\{ \begin{array}{l} k^2 \cancel{\lambda} \ddot{a} + \cancel{\lambda} \ddot{a} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{À l'équilibre } \ddot{a} = 0 \text{ donc } \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\} = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } G(k) - \frac{A a^2}{2 l^2} k^3 + \frac{B a^4}{3 l^4} k^5 = 0.$$

Si $\beta \rightarrow \beta_c^+$, alors $k=1$ et $G(k)=0$

$$\text{d'où, en introduisant } \Theta \quad -\frac{A}{2} \Theta^2 + \frac{B}{3} \Theta^4 = 0$$

$$\text{d'où } \Theta_{a1}^2 = \frac{3A}{2B} \quad \text{et} \quad \Theta_{a1} = \sqrt{\frac{3A}{2B}}$$

(36) Si $f = -f \vec{u}_z$, elle dérive d'une énergie potentielle $E_{pg} = \int z \times \text{Vol}$
avec $z \approx a$; $\text{Vol} \approx L a \lambda \approx L \frac{a}{k}$

$$\text{d'où } E_{pg} = \int \frac{L a^2}{k} = E^* \times \frac{1}{k \sqrt{\rho g \gamma}} \quad \text{où } E^* = L a^2 \sqrt{\rho g \gamma}$$

$$\text{Alors } E_p'' = E^* \left(F(k) - \beta + \frac{1}{k l \rho g} \right)$$

$$= E^* \left(\underbrace{k + \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\rho g} \right)}_{H(k)} - \beta \right)$$

$$\frac{dH}{dk} = 1 - \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{1}{\rho g} \right) = 0 \quad \text{pour } H \text{ minimal, pour } k'_c = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho g}}$$

c'est-à-dire pour $k'_c = \frac{k_c'}{l} = \sqrt{1 + \frac{f}{\rho g}} \sqrt{\frac{\rho g}{\delta}} = \boxed{\sqrt{\frac{\rho g + f}{\delta}} = k'_c}$

C'est plus élevé que k_c , ce qui est normal car f agit comme une augmentation de la pesanteur, donc du terme en $1/k$ de $F(k)$: au lieu de —, on a ----

(37) $k'_c \approx \frac{1}{d'_c} = \frac{1}{97 \text{ mm}} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$ $\left\{ \begin{array}{l} d'_c < d_c \\ \text{donc } k'_c > k_c \text{ comme} \\ \text{estimé + faut.} \end{array} \right.$

$d'_c = 0,7 \text{ mm}$

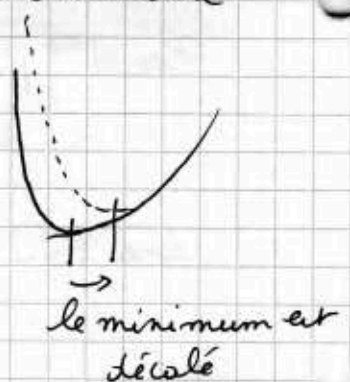
(38)

On a $k_c = \frac{1}{d_c} = \frac{1}{0,25 \text{ cm}} = 4 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1} = \sqrt{\frac{\rho g}{\delta}}$

et $k'_c = 1,4 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = \sqrt{\frac{\rho g + f}{\delta}} = \sqrt{\frac{\rho g}{\delta}} \sqrt{1 + \frac{f}{\rho g}}$

d'où $\left(\frac{k'_c}{k_c}\right)^2 = \left(\sqrt{1 + \frac{f}{\rho g}}\right)^2 = 1 + \frac{f}{\rho g} = 1 + \varphi$

d'où $\varphi = \left(\frac{k'_c}{k_c}\right)^2 - 1 = \left(\frac{14}{4}\right)^2 - 1 \approx \boxed{10 \sim \varphi}$
entre 3^2 et 4^2



Pour toute question ou remarque

vgadiou@netcourrier.com