Démonstration du théorème de Millman

IMPORTANT

- ✘ Le théorème de Millman est un théorème faisant intervenir des potentiels : il permet d'exprimer le potentiel en un nœuds N.
- ✘ Si ce n'est pas précisé dans l'énoncé, il faut choisir un nœud comme référence des potentiels. Ce nœud est appelé la masse (M) : $V(M) = 0\,\mathrm{V}$
- ✘ Le théorème de Millman est un théorème directement issu de la loi des nœuds (il s'appelle aussi : loi des nœuds sous forme de potentiel) : en cas de doute, revenir à la loi des nœuds.
- ✘ Pour les branches de type impédance, il est interdit de changer de branche en s'éloignant du nœud N !

1 Démonstration

La démonstration se fait grâce au schéma donné figure 1

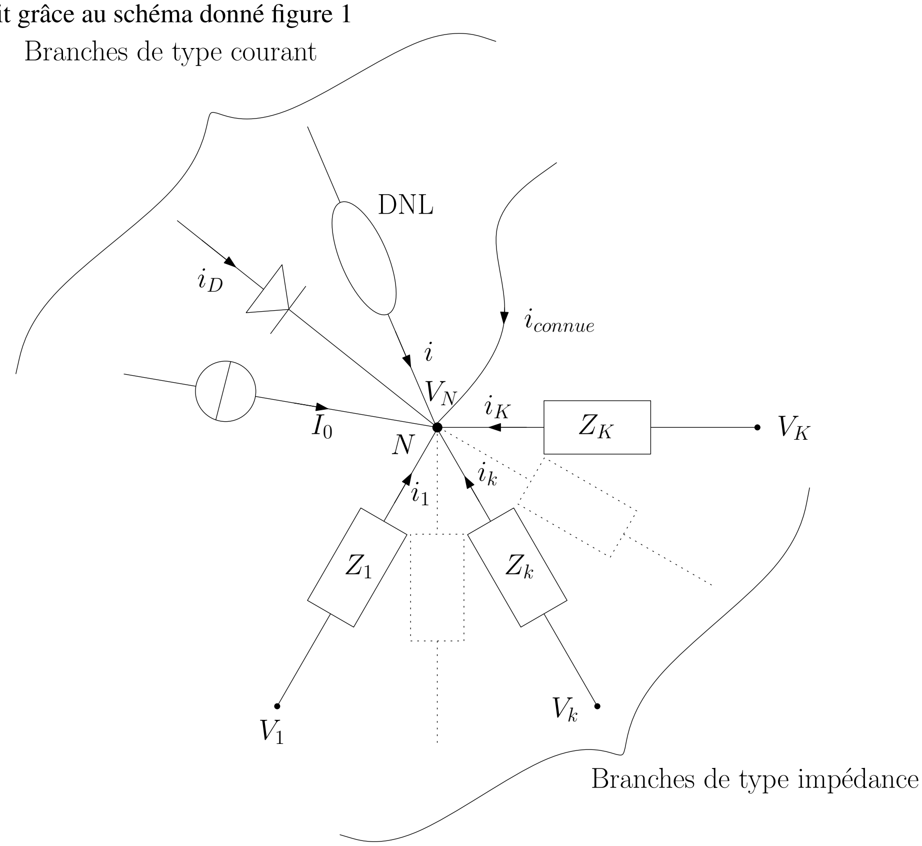

Figure 1

✘ Soit un nœud N sur lequel arrivent deux types de branches :

- Les branches de type impédance : sur la branche k, parcourue par un courant i_k, on trouve une impédance Z_k aux bornes de laquelle on a les potentiels V_N et V_k. On a donc :

$$V_k - V_N = Z_k \times i_k$$

- Les branches de type courant : sur ce type de branche, on trouve toute sorte de dipôles (linéaires ou non linéaires), on peut aussi avoir un courant inconnu (par exemple le courant à la sortie d'une puce électronique). On note i_j le courant dans la branche de type courant repérée par la lettre j.
- La loi des nœuds appliquée en N donne :

$$\sum_k i_k + \sum_j \varepsilon_j i_j = 0$$

ε_j valant 1 si le courant i_j arrive au nœud N et -1 si le courant s'éloigne du nœud N. D'où :

$$\sum_k \left(\frac{V_k - V_N}{Z_k}\right) + \sum_j \varepsilon_j i_j = 0$$

Soit :

$$V_N = \frac{\sum_k \left(\frac{V_k}{Z_k}\right) + \sum_j \varepsilon_j i_j}{\sum_k \left(\frac{1}{Z_k}\right)}$$

2 Énoncé

Loi des noeuds sous forme de potentiel

Le potentiel au nœud N représenté figure 1 vérifie :

$$\sum_k \left(\frac{V_k - V_N}{Z_k}\right) + \sum_j \varepsilon_j i_j = 0$$

Théorème de Millman

Le potentiel au nœud N représenté figure 1 vaut :

$$V_N = \frac{\sum_k \left(\frac{V_k}{Z_k}\right) + \sum_j \varepsilon_j i_j}{\sum_k \left(\frac{1}{Z_k}\right)}$$

3 Exemple simple

Déterminer la tension U en appliquant le théorème de Millman et en supposant la diode bloquée.

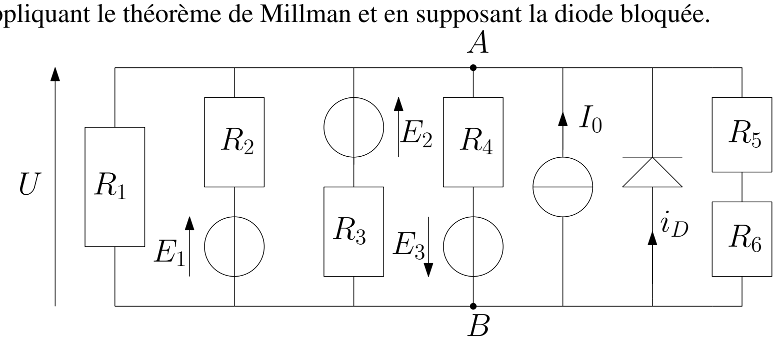

FIGURE 2

- ✘ On choisit $B = M$ et donc $V_B = V_M = 0\,\text{V}$.
- ✘ En appliquant le théorème de Millman en A, on obtient directement :

$$U = V_A = \frac{\frac{0}{R_1} + \frac{E_1}{R_2} + \frac{E_2}{R_3} - \frac{E_3}{R_4} + I_0 + i_D + \frac{0}{R_5 + R_6}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6}}$$

Où $i_D = 0$