

DS2

Le sujet comporte trois extraits de sujets de concours

- ✗ Physique 1 CCMP PSI 2022 - Partie III
- ✗ Physique 1 CCS MP 2022 - Partie I
- ✗ Physique 2 CCMP PSI 2011 - Partie II

Attention : Le terme régime permanent à la question 20 de CCMP PSI 2011 , signifie régime stationnaire



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Fourier dans tous ses états

Ce problème traite de quelques applications de l'analyse de Fourier à la physique. Il comporte 3 parties largement indépendantes. La première partie est consacrée à l'étude de l'échantillonnage d'un signal électronique. La deuxième partie aborde le filtrage acoustique à travers l'étude de la transmission d'une onde sonore par une paroi mobile. La troisième partie présente l'expérience originelle de Joseph Fourier de l'étude des phénomènes de diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique. C'est notamment cette expérience qui lui a permis d'introduire pour la première fois la décomposition d'une fonction périodique en séries dites « de Fourier ».

Dans tout le problème, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique avec, au plus, deux chiffres significatifs.

Les vecteurs unitaires seront notés avec un chapeau \hat{e} , ainsi, dans l'espace cartésien $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ un vecteur quelconque \vec{a} s'écrira $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Données numériques

- Masse volumique de l'air : $\mu_0 = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Capacité thermique massique du fer : $c = 4,0 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Masse volumique du fer : $\mu_f = 7,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Conductivité thermique du fer : $\lambda = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Coefficient conducto-convectif à l'interface fer-air : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

III Analyse de Fourier et diffusion thermique

On considère un matériau homogène assimilable à une répartition unidimensionnelle de matière selon un axe (Ox). On rappelle l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle sans perte et sans terme source, donnant la température $T(x,t)$ à l'abscisse x et au temps t dans le matériau :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

- – 15. Déterminer l'expression de la constante D en fonction de la masse volumique μ , du coefficient de conductivité thermique λ et de la capacité thermique massique c du matériau considéré. On pourra raisonner par analyse dimensionnelle. En déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ sur une longueur L . Faire l'application numérique pour une diffusion dans le fer sur une longueur $L = 50$ cm.

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16$ cm et de section carrée de côté $a \ll R$. L'anneau est chauffé en un point pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ .

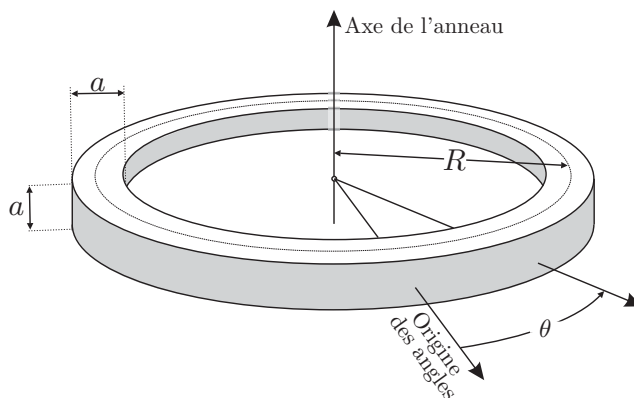


FIGURE 3 – Géométrie du problème étudié par Fourier : le tore à section carrée.

On notera $T(\theta,t)$ la température de l'anneau, supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi; \pi]$ et on admettra que, par symétrie, $T(-\theta,t) = T(\theta,t)$.

Le flux thermique conducto-convectif $\delta\Phi$ sortant à travers une surface dS de l'anneau de fer vers l'air environnant (de température T_e constante) est modélisé par la loi de Newton

$$\delta\Phi = h(T(\theta,t) - T_e)dS,$$

dans laquelle le coefficient d'échange thermique h est supposé constant.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z.$$

- – 16. Rappeler la loi de Fourier pour la diffusion thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} puis dessiner l'allure des lignes de champ le long de l'anneau, en précisant leur orientation.

Pour établir l'équation décrivant l'évolution de la fonction $T(\theta, t)$ dans l'anneau, on considère le volume élémentaire dV compris entre deux sections de surface a^2 de l'anneau, repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$.

- – 17. Déterminer les expressions approchées de dV ainsi défini et de la surface élémentaire dS_{lat} de son contact avec l'air. On rappelle que $a \ll R$. En déduire que $T(\theta, t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a} (T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

- – 18. Donner, en régime stationnaire, et en fonction de T_e , R , θ et de $\delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$, la forme de la solution $T(\theta)$. On introduira deux constantes d'intégration A et B sans chercher à les déterminer pour l'instant. Préciser, en le justifiant, la dimension de la grandeur δ .
- – 19. On donne sur la figure 4 l'allure de la représentation graphique associée aux solutions $T(\theta)$ et $j_{\text{th}}(\theta)$ (pour r fixé). On note $T_1 = T(\theta = 0)$ la valeur, imposée par le chauffage, en $\theta = 0$. Commenter ces deux graphes puis les exploiter judicieusement pour déterminer, sur l'intervalle $[0, +\pi]$, les constantes A et B introduites précédemment, en fonction de T_1 , T_e , R et δ . En déduire la solution $T(\theta)$ sur l'intervalle $[0, +\pi]$.

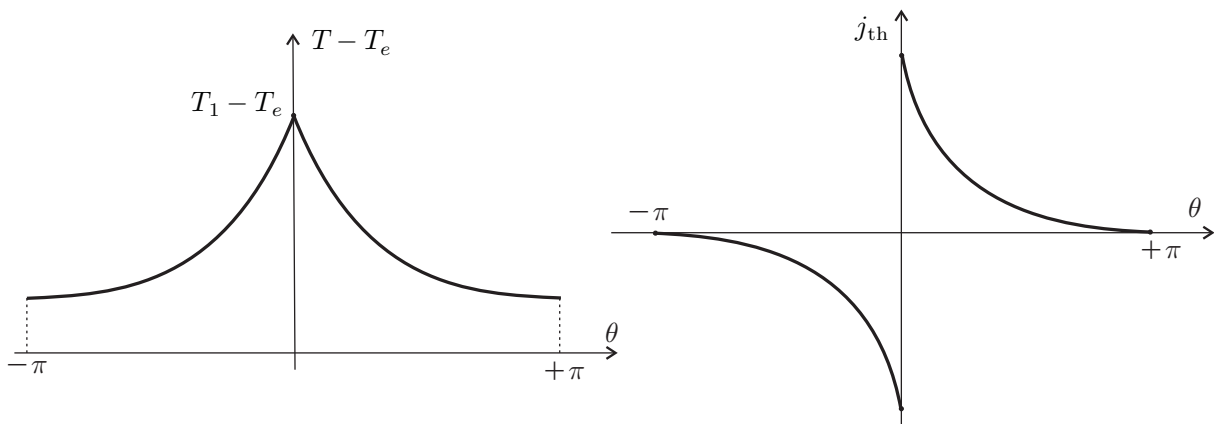


FIGURE 4 – Graphe des solutions : Différence de température à gauche, flux thermique surfacique à droite.

- – 20. Sur les relevés expérimentaux de Joseph Fourier du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs de températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires. Montrer que cet ordre de grandeur était prévisible à condition de supposer le phénomène de diffusion prépondérant en régime transitoire.

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites « séries de Fourier ». L'anneau est chauffé comme précédemment en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale

de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température reste de la forme $T(\theta, t)$. On s'intéresse toujours au domaine $\theta \in]-\pi; \pi]$, avec $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$ par symétrie.

- – 21. Donner l'équation vérifiée par $T(\theta, t)$. On cherche les solutions à variable séparée de la forme $T_n(\theta, t) = f_n(\theta) g_n(t)$. L'interprétation de l'indice n apparaîtra dans la donnée de la condition initiale nécessaire à la résolution complète de l'équation. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta, t)$ s'écrit sous la forme

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n}.$$

On donnera la relation entre τ_n et d_n et on précisera leurs dimensions respectives.

- – 22. À l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta).$$

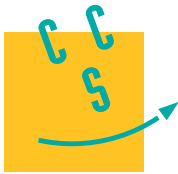
Les coefficients b_n sont supposés connus. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta, t)$ peut se mettre sous la forme

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t).$$

Expliciter B_n , d_n et τ_n en fonction de b_n , n , R , μ , c et λ .

- – 23. Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta, t) - T_m$ devient rapidement proportionnel à $\cos(\theta)$. Commenter cette constatation.

FIN DE L'ÉPREUVE

*Centres de données*

Un centre de données — *data center* en anglais — est un lieu regroupant des installations informatiques chargées de stocker et de distribuer des données (*data*). Ces dernières années, l'expansion des services en ligne a entraîné une croissance exponentielle du nombre de centres de données, dégageant de grandes quantités de chaleur. La régulation en température de ces lieux est donc devenue un enjeu environnemental majeur.

Ce problème est composé de deux parties, elles-mêmes divisées en différentes sous-parties, totalement indépendantes. La première partie propose une étude thermodynamique et thermique de dispositifs utilisables pour le refroidissement d'un centre de données. La deuxième partie porte sur le projet de délocalisation des centres de données dans l'espace.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

I Refroidir les centres de données, quelques solutions techniques contemporaines

I.A – À l'échelle des composants

À l'échelle des composants, il est nécessaire d'évacuer la chaleur dégagée, par les transistors des microprocesseurs notamment. Pour ce faire, des ventilateurs sont installés afin de renouveler en permanence l'air au contact des composants. De plus, des ailettes de refroidissement sont assemblées directement sur la surface des composants afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.

On modélise une de ces ailettes par un cylindre d'axe (Ox) , de rayon a , de longueur $b \gg a$ et de conductivité thermique λ . Elle est accolée en $x = 0$ au composant de température T_d ; le contact thermique en $x = 0$ est supposé parfait. Le reste de l'ailette est au contact de l'air que l'on suppose de température T_a uniforme.

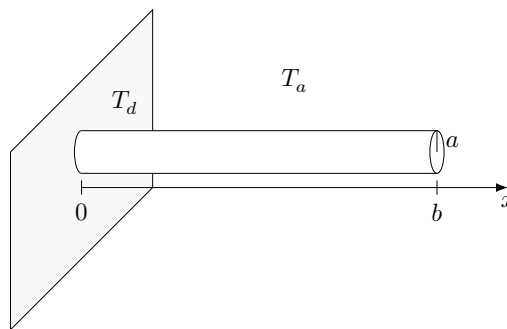


Figure 1 Modélisation de l'ailette

En régime stationnaire, supposé atteint dans toute cette sous-partie, la température $T(x)$ est considérée comme uniforme sur la section droite de l'ailette située à l'abscisse x pour tout $x \in [0, b]$.

Q 1. Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique \vec{j}_Q qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

L'air qui entoure le solide, constamment renouvelé et de température uniforme T_a , échange avec l'ailette un transfert conducto-convectif. Dans une fine couche de fluide au contact de la surface du solide, ce transfert latéral peut-être modélisé par la loi de Newton :

$$\vec{j}_{cc}(x) = h(T(x) - T_a) \vec{n}$$

où \vec{j}_{cc} correspond à la densité de flux conducto-convectif et \vec{n} est un vecteur unitaire, normal à la surface d'échange et orienté du solide vers l'air. Le coefficient h , dont certaines valeurs numériques sont disponibles en fin d'énoncé, est appelé coefficient de transfert thermique de surface.

Q 2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur dx de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}. \quad (\text{I.1})$$

Q 3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon $a = 1$ mm.

Q 4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température $T(x)$ en $x = 0$ et en $x = b$.

Sur la figure 2 est représentée la solution « normalisée » de l'équation (I.1), définie par $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a}$, en fonction de l'abscisse adimensionnée x/b , pour différentes valeurs du rapport b/δ .

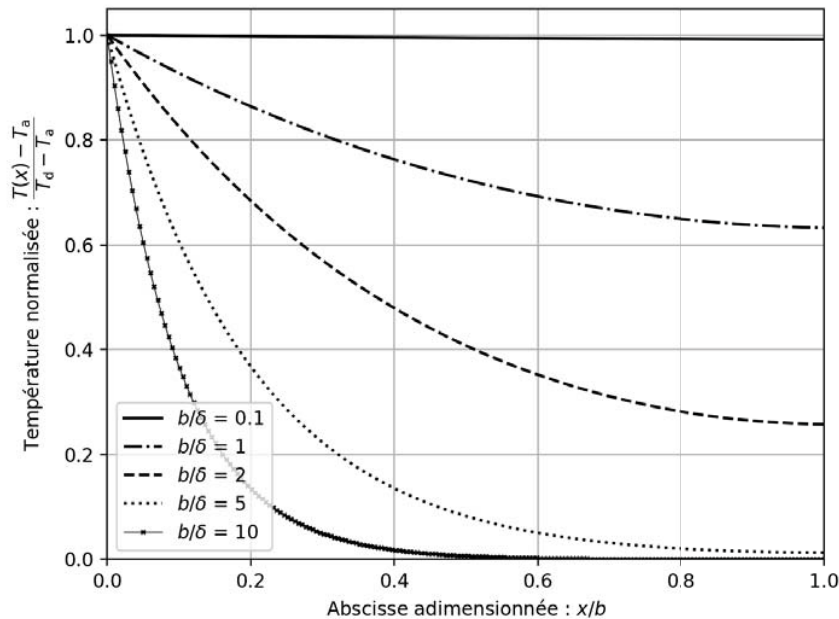


Figure 2 Représentation graphique du champ de température dans une ailette en silicium (solution de l'équation (I.1)) pour différentes valeurs du rapport b/δ

Q 5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de $T(x)$ dans le cas où $b \gg \delta$. Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

On définit la résistance thermique R_{th} de l'ailette de refroidissement par $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{P}}$, où \mathcal{P} désigne la puissance thermique totale évacuée par l'ailette dans l'air.

Q 6. La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport b/δ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de R_{th} commune aux différents matériaux lorsque $b \ll \delta$; justifier sa valeur numérique.

Q 7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique R_{th} de l'ailette en silicium dans le cas où $b \gg \delta$.

Q 8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à $b = 2$ cm. En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon $a = 1$ mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède par 60 °C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

I.B – À l'échelle des locaux

Dans toute cette sous-partie, on s'intéresse au système de refroidissement d'une salle informatique de 25 m³, située dans le sud de la France, dans laquelle sont placés plusieurs serveurs de données. L'objectif est de maintenir la température de la salle à une valeur inférieure ou égale à $T_{max} = 35$ °C, sachant que les serveurs de données dégagent une énergie thermique de 100 kW·h chaque jour.

Q 9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.

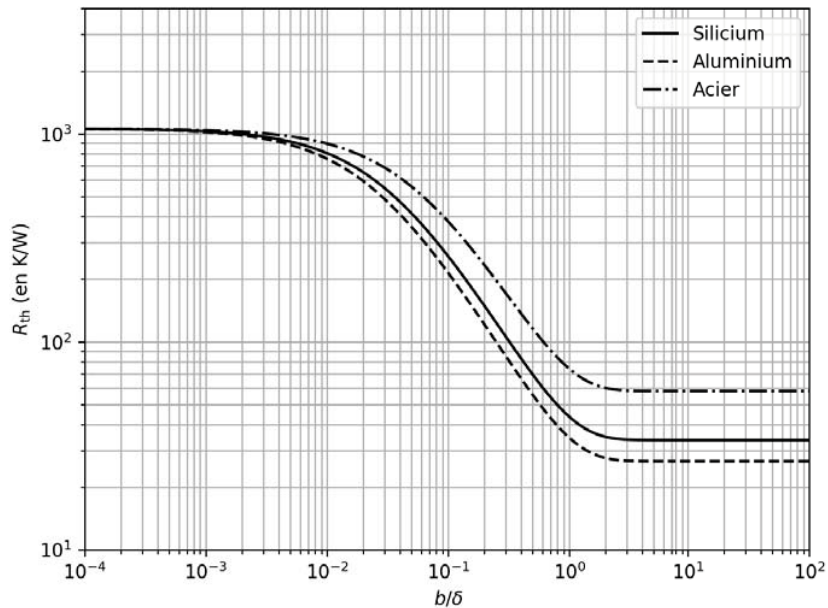


Figure 3 Évolution de la résistance thermique d'une ailette de rayon $a = 1$ mm, en présence de ventilation, en fonction du rapport b/δ

Afin de réduire les dépenses engagées pour le refroidissement de la salle, une alternative intéressante est celle du *free-cooling*, qui consiste à ventiler la salle tout en exploitant la fraîcheur de l'air extérieur. Pour ce faire, on a recours à l'installation d'un ventilateur pouvant remplacer l'air de la pièce avec le débit de volume $D_v = 830 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$. La puissance absorbée par le ventilateur est $\mathcal{P}_v = 60 \text{ W}$.

Q 10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température T_{\max} . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique ρ_{air} de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air D_m , en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

Les relevés annuels de température à l'extérieur de la salle sont présentés sur la figure 4.

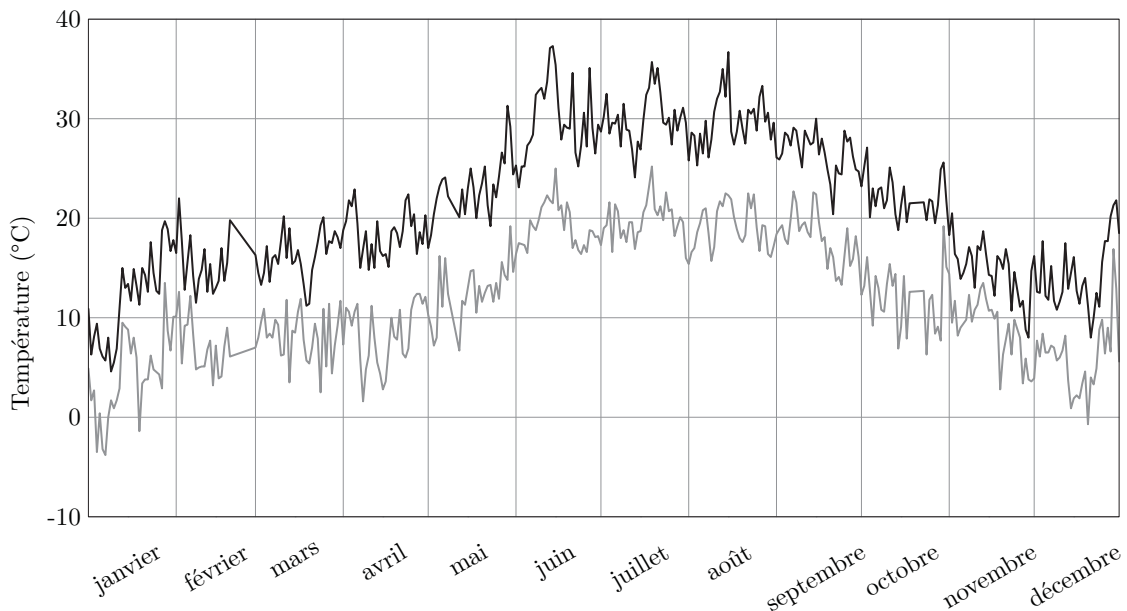


Figure 4 Relevé des températures journalières minimales et maximales à l'extérieur de la salle pour l'année 2021 (source infoclimat.fr)

Lorsque le système de *free-cooling* ne permet pas de maintenir la température de la salle à une température inférieure ou égale à T_{\max} , le système de conditionnement d'air prend le relais et le système de *free-cooling* s'arrête.

Q 11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de *free-cooling* est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de *free-cooling* dans cette salle informatique.

Données

| | |
|--|---|
| Conductivité thermique du silicium | $\lambda_{\text{Si}} = 148 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Conductivité thermique de l'aluminium | $\lambda_{\text{Al}} = 237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Conductivité thermique de l'acier | $\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique) | $h_s = 30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé) | $h_r = 300 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Prix du kW·h | 0,17 € |
| Constante des gaz parfaits | $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ |
| Constante de la gravitation universelle | $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ |
| Masse de la Terre | $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ |
| Rayon moyen de la Terre | $R_T = 6,40 \times 10^6 \text{ m}$ |
| Perméabilité magnétique du vide | $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Permittivité diélectrique du vide | $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ |
| Charge élémentaire | $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ |
| Masse de l'électron | $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ |
| Masse du proton | $m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ |
| Constante d'Avogadro | $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ |
| Constante de Faraday | $\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$ |
| Masse molaire atomique du lithium | $M_{\text{Li}} = 6,94 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ |
| Masse molaire atomique du carbone | $M_{\text{C}} = 12,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ |
| Masse molaire atomique de l'azote | $M_{\text{N}} = 14,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ |
| Masse molaire atomique de l'oxygène | $M_{\text{O}} = 16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ |

Formulaire

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{a}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

Soit deux fonctions sinusoïdales f et g , scalaires ou vectorielles, de même période et d'écritures complexes respectives \underline{f} et \underline{g} . La valeur moyenne de la fonction $f \times g$, le symbole \times signifiant une opération de produit (scalaire ou vectoriel), vérifie la relation

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \times \underline{g}^*)$$

où Re désigne la partie réelle et \underline{g}^* le conjugué de la fonction complexe \underline{g} .

• • • FIN • • •

Fillière PSI

(Durée de l'épreuve: 4 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II — PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

LE TRAITEMENT DES DÉCHETS

Ce problème étudie un dispositif de traitement de déchets ménagers par incinération. Il se compose de deux parties indépendantes :

- l'étude de l'acheminement des déchets vers un four à l'aide d'un tapis roulant entraîné par un moteur à courant continu ;
- l'étude thermique et thermodynamique du four de combustion des déchets.

Les vecteurs sont notés avec des chapeaux s'ils sont unitaires ($\|\vec{e}_i\| = 1$) ou avec des flèches dans le cas contraire ($\vec{k} = k\vec{e}_i$).

II. — Incinération des déchets

Le four est composé d'une enceinte munie d'une ouverture par laquelle entrent les déchets à incinérer et d'une seconde ouverture reliée à un conduit de cheminée par laquelle sortent tous les gaz présents après la combustion. La composition des gaz rejetés dans l'atmosphère est réglementée. C'est la raison pour laquelle la température de combustion est située dans un intervalle bien déterminé :

- elle ne doit pas être trop élevée afin de ne pas générer des produits toxiques tels que par exemple le dioxyde d'azote ;
- elle ne doit non plus pas être trop basse pour que la combustion des déchets soit totale.

Deux commandes permettent de réguler la température du four :

- la première agit sur l'injection de carburant dans le brûleur qui permet d'échauffer le four ;
- la seconde permet d'injecter dans le four de l'eau liquide dont la vaporisation refroidit le four.

II.A. — Comportement du four en régime libre

On suppose ici que l'ensemble du système constituant l'enceinte du four, c'est-à-dire ses parois en acier ainsi que l'air qu'il contient, présente une température uniforme notée $T_s(t)$ qui est mesurée par un capteur de température situé à l'intérieur du four. Afin d'identifier ses paramètres thermodynamiques, on étudie l'évolution de $T_s(t)$ lorsque le four se refroidit sans être alimenté ni en air ni en déchets, ses orifices étant obturés. L'enceinte du four constitue alors un système thermodynamique fermé. La température extérieure, notée T_{ext} , est supposée constante et uniforme. Dans tout le problème, on prendra $T_{ext} = 25^\circ\text{C}$.

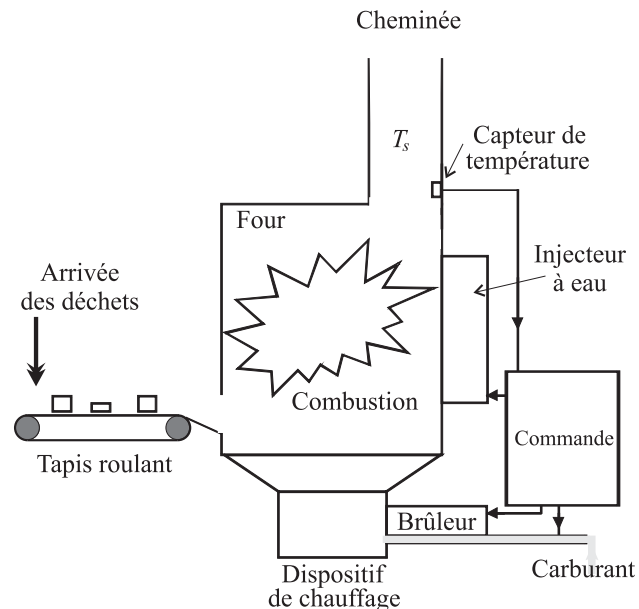


FIG. 4 – Descriptif du four

Le four est entouré d'un isolant thermique constitué par des murs de briques. La puissance thermique reçue par le four de l'extérieur est de la forme $\mathcal{P}_f = G[T_{ext} - T_s(t)]$. La capacité thermique de tout l'acier constituant le four est notée C_0 . On négligera la capacité thermique de l'air contenu dans le four par rapport à celle de l'acier.

❑ 15 — À l'aide d'un bilan thermique appliqué au système four entre t et $t + dt$, établir l'équation différentielle satisfaite par $T_s(t)$ et la résoudre. On fera intervenir un temps caractéristique τ_ℓ .

❑ 16 — À partir de la température initiale $T_s(0) = 100^\circ\text{C}$, on coupe toute alimentation et on ferme toutes les ouvertures puis on laisse refroidir le four. La mesure expérimentale de $T_s(t)/T_s(0)$ lors du refroidissement est représentée sur la figure 5 dans laquelle le temps est exprimé en heures. Déduire de la courbe la valeur numérique de τ_ℓ .

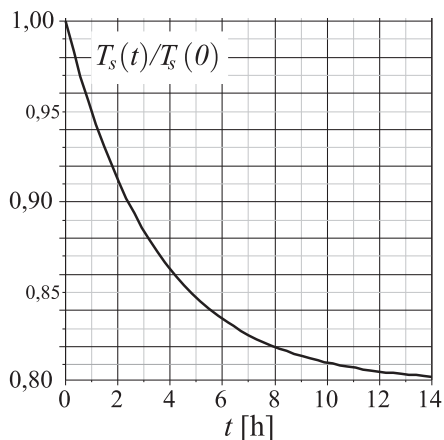


FIG. 5 — Représentation graphique de $T_s(t)/T_s(0)$ en fonction du temps t exprimé en heures.

❑ 17 — La capacité du four vaut $C_0 = 25 \cdot 10^5 \text{J.K}^{-1}$. Calculer la valeur de G . Cette valeur sera utilisée dans toute la suite du problème.

❑ 18 — Le four en acier est entouré d'un mur de briques d'épaisseur $e = 10 \text{ cm}$, de conductivité thermique $\lambda = 1 \text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$. Le flux (ou puissance) thermique échangé entre le four et l'extérieur traverse une surface totale $\Sigma = 19 \text{ m}^2$. Établir, en régime permanent de température, l'expression de \mathcal{P}_f et en déduire l'expression de la conductance thermique G en fonction de λ , e et Σ . Calculer alors la valeur numérique de G suivant ce modèle.

❑ 19 — Comparer les deux valeurs obtenues aux questions 17 et 18. Qu'en déduisez-vous ?

II.B. — Thermodynamique d'un système ouvert

L'enceinte du four est un système ouvert qui peut admettre de la matière et en évacuer. Le contenu de l'enceinte reste toujours modélisé par un système homogène à la température $T_s(t)$. La fraction de dioxygène entrant avec les déchets et qui sert à leur combustion est supposée négligeable, ce qui permet de négliger les transferts de matière entre l'air et les déchets. On suppose que l'eau injectée par la commande de refroidissement est entièrement vaporisée et ne subit aucune réaction chimique. On suppose enfin que la combustion des déchets est totale et ne produit que des composés gazeux. On néglige donc tous les résidus solides de la combustion, cendres et mâchefers. Les échanges de matières possibles sont alors les suivants :

- entrée des déchets solides, de capacité thermique massique à pression constante c^e , à la température T_{ext} , acheminés par le tapis roulant avec un débit massique $D^e = D$;
- entrée d'air par l'orifice d'admission des déchets avec un débit massique D_{air}^e ; sa capacité thermique massique à pression constante c_{air} sera supposée indépendante de la température. On notera D_{air}^s le débit massique de l'air à la température T_s à la sortie de la cheminée ;
- injection éventuelle d'eau liquide à la température T_{ext} et avec le débit massique D_{eau} ; la vaporisation de cette eau, de capacité thermique massique à pression constante c_{eau} , permet de refroidir l'enceinte ;
- évacuation par le conduit de cheminée, à la température T_s , de l'air, des gaz produits par la combustion et de la vapeur d'eau. On notera c^s et c_{vap} les capacités thermiques massiques à pression constante respectives de ces deux gaz ainsi que D^s et D_{vap} les débits massiques correspondants.

Tous les gaz seront, le cas échéant, décrits à l'aide du modèle du gaz parfait. On souhaite établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la température $T_s(t)$ en fonction du temps.

On considère un système thermodynamique ouvert \mathcal{S} dont l'énergie interne est notée $U_{\mathcal{S}}(t)$. On note n_e le nombre d'espèces qui entrent dans ce système. Pour chaque espèce entrante $i = 1, \dots, n_e$ on note D_i^e son débit massique et h_i^e son enthalpie massique. De même, on note n_s le nombre d'espèces d'enthalpie massique $h_{j=1, \dots, n_s}^s$ qui sortent du système avec un débit massique $D_{j=1, \dots, n_s}^s$.

□ 20 — Montrer que si l'on néglige les énergies cinétiques et potentielles, le premier principe de la thermodynamique appliqué au système \mathcal{S} entre t et $t + dt$ conduit à l'égalité

$$\frac{dU_{\mathcal{S}}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n_e} D_i^e h_i^e - \sum_{j=1}^{n_s} D_j^s h_j^s + \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}' \quad (E)$$

où \mathcal{P}_{th} et \mathcal{P}' représentent respectivement la puissance thermique reçue par \mathcal{S} et une éventuelle puissance autre que celle des forces de pression, fournie à \mathcal{S} par l'extérieur. On remarquera que le régime envisagé n'est pas permanent.

Le système \mathcal{S} est en fait le four utilisé pour la combustion des déchets. Il comprend l'acier qui constitue ses parois et les déchets qu'il contient à l'instant t . La section d'entrée de matière est à l'extrémité du tapis d'acheminement des déchets et la section de sortie est celle du conduit de cheminée d'évacuation des gaz. La température extérieure au four est toujours considérée comme constante, uniforme, égale à T_{ext} . On admet que la mise en route du brûleur déclenche l'apport de la puissance \mathcal{P}_{ch} au système \mathcal{S} et l'injection d'eau lui apporte une puissance $-\mathcal{P}_{ref}$ où $\mathcal{P}_{ch} > 0$ et $\mathcal{P}_{ref} > 0$. Cette injection d'eau sera étudiée en fin de problème.

□ 21 — Comment peut s'écrire $\frac{dU_{\mathcal{S}}(t)}{dt}$ si l'on suppose que la contribution à l'énergie interne $U_{\mathcal{S}}(t)$ du contenu du four est négligeable devant celle de l'acier constituant ses parois.

□ 22 — Le modèle des échanges thermiques entre le four et l'extérieur reste celui décrit avant la question 15. Quelle est alors l'expression de \mathcal{P}_{th} ?

□ 23 — On suppose que les déchets, l'air et l'eau de refroidissement s'écoulent en régime permanent. En tenant compte de l'hypothèse d'absence d'échange de matière entre les déchets, l'air et l'eau, déterminer les relations entre les différents débits d'entrée et de sortie. Exprimer alors la différence

$$D_{air}^e h_{air}^e - D_{air}^s h_{air}^s$$

intervenant dans l'équation (E) en fonction de c_{air} , T_{ext} , $T_s(t)$ et $D_{air} = D_{air}^e$.

Les déchets entrent dans le système \mathcal{S} sous forme de phase condensée à la température T_{ext} , leur enthalpie massique est alors notée h^e et leur débit massique $D^e = D$. Ils en ressortent par la cheminée sous forme gazeuse à la température $T_s(t)$, leur enthalpie massique est alors notée h^s et leur débit massique D^s . Afin de simplifier l'étude, on supposera que la combustion qui assure la transformation des déchets a lieu à la température fixée T_0 telle $T_{ext} < T_0 < T_s(t)$. À cette température, la variation d'enthalpie massique des déchets entre la phase condensée avant combustion (phase 1) et la phase gazeuse après combustion (phase 2) est notée $q = h_1(T_0) - h_2(T_0)$.

□ 24 — Exprimer, le terme $h^e - h^s$ en fonction de c^e , c^s , $T_s(t)$, T_{ext} , T_0 et q . Dans toute la suite du problème on prendra $c^e = c^s = c$, déterminer alors l'expression de $D^e h^e - D^s h^s$ intervenant dans (E).

□ 25 — Montrer finalement que l'ensemble des dispositifs qui interviennent lorsque le four fonctionne conduit à un bilan thermodynamique caractérisé par l'équation différentielle :

$$C_0 \frac{dT_s}{dt} + (G + Dc + D_{air}c_{air})T_s = (G + Dc + D_{air}c_{air})T_{ext} + Dq + \mathcal{P}_{ch} - \mathcal{P}_{ref}$$

II.C. — Essai du four en charge

Dès lors que le four a subi une phase de chauffage à vide non décrite ici, les déchets entrent dans celui-ci avec un débit constant D . On suppose que $T_s(t)$ est suffisamment élevée pour que la réaction de combustion s'amorce et on prendra $q = 7,0 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$, $c = 10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $D = D_m$ défini à la question 1. L'alimentation en puissance de chauffage et l'injection d'eau de refroidissement sont coupées. Un courant d'air permanent de débit $D_{air} = 1,9 \text{ kg.s}^{-1}$ s'installe, on prendra $c_{air} = c$.

□ 26 — Calculer la valeur numérique de la température T_∞ atteinte par $T_s(t)$ en régime permanent ainsi que celle de la durée caractéristique τ_∞ correspondante.

□ 27 — En fait le débit $D(t)$ est périodique et ses variations avec le temps sont celles représentées sur la figure 3. On étudie l'influence de ce débit variable sur la température $T_s(t)$ qui règne à l'intérieur du four ; on pose $T_s(t) = T_\infty + \theta(t)$ et $D(t) = D_m + \delta(t)$. Montrer que les fonctions θ et δ vérifient l'équation

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau'_\infty} = \left[\frac{c(T_{ext} - T_\infty) + q}{C_0} \right] \delta - \frac{c}{C_0} \theta \delta$$

dans laquelle on identifiera la durée τ'_∞ . Pour la suite du problème, on négligera le terme du second ordre proportionnel au produit $\theta\delta$

□ 28 — La période de la fonction $\delta(t)$ est de l'ordre de quelques secondes. En vous basant sur la valeur numérique de τ'_∞ et les propriétés des filtres passe bas du premier ordre, expliquer précisément pourquoi l'on peut considérer que $T_s(t) \simeq T_\infty$.

En régime permanent à débit D_m constant, on souhaite étudier l'influence d'un changement brusque de la nature des déchets. Afin de modéliser une telle variation on envisage le cas suivant :

- On fait l'hypothèse que la nature des déchets est entièrement déterminée par leur variation q d'enthalpie massique à T_0 décrite dans le texte précédant la question 24 ;
- Tant que $t \leq 0$, le four fonctionne en régime permanent à la température T_∞ et il est alimenté à débit constant D_m par des déchets tels que $q = 7,0 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$;
- Dès que $t > 0$ la nature des déchets change, q devient $q' = 1,09q$, le débit restant égal à D_m .

□ 29 — Déterminer la nouvelle température T'_∞ qui s'établit en régime permanent pour $t > 0$.

Pour un bon fonctionnement, la température du four ne doit pas excéder $T_{\max} = 900^\circ \text{ C}$. Lorsque le capteur de température qui mesure T_s détecte le dépassement de la valeur T_{\max} , le système déclenche l'injection d'eau avec le débit $D_{eau} = 0,5 \text{ kg.s}^{-1}$ et coupe l'arrivée d'eau lorsque la température T_s est redescendue à $T_{\min} = 850^\circ \text{ C}$.

L'eau entre dans le four sous forme liquide à la température T_{ext} et subit trois transformations :

- un échauffement isobare du liquide de T_{ext} à 100° C ;
- une vaporisation isotherme et isobare à 100° C ;
- un échauffement isobare de la vapeur de 100° C à T_s .

Lorsque l'eau est à la température de 100° C , son enthalpie massique de vaporisation possède la valeur $\Lambda = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$; par ailleurs, les capacités thermiques massiques à pression constante, supposées indépendantes de la température, ont pour valeurs respectives $c_{eau} = 4200 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ pour l'eau liquide et $c_{vap} = 2300 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ pour la vapeur.

- ❑ **30** — Évaluer la variation d'enthalpie massique pour ces trois transformations en prenant $T_s = T_{\max}$.
En déduire la valeur numérique de \mathcal{P}_{ref} .
- ❑ **31** — Calculer la durée de la phase de refroidissement par injection d'eau.

FIN DE LA PARTIE II

FIN DE L'ÉPREUVE