

## Correction exercice 5 OD4

1) On effectue l'intégrale en  $y$  injectant la relation de dispersion :

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \frac{1}{2\delta k} \Re \left[ \exp(-j\omega_0 t) \int_{k_0 - \delta k}^{k_0 + \delta k} \exp[jk(x - ct)] dk \right] \\ &= \frac{1}{2\delta k} \Re \left[ \exp[-j\omega_0 t] \cdot \frac{\exp[j(k_0 + \delta k)(x - ct)] - \exp[j(k_0 - \delta k)(x - ct)]}{j(x - ct)} \right] \\ &= \Re \left[ \frac{\exp[jk_0(x - ct) - j\omega_0 t]}{2\delta k} \left[ \frac{\exp[j\delta k(x - ct)] - \exp[-j\delta k(x - ct)]}{j(x - ct)} \right] \right]\end{aligned}$$

$$\text{soit : } \Psi(x, t) = \left[ \frac{\sin(\delta k(x - ct))}{\delta k(x - ct)} \right] \cos[k_0(x - ct) - \omega_0 t]$$

$$\text{et : } \Psi(x, t) = \underbrace{\text{sinc}[\delta k(x - ct)]}_{\text{modulante}} \underbrace{\cos[k_0(x - ct) - \omega_0 t]}_{\text{porteuse}} .$$

2) Les vitesses de phase  $v_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = c + \frac{\omega_0}{k} > c$  et de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c$ , sont supérieure ou égale à  $c$ . Le milieu est dispersif car  $v_{\Phi}$  dépend de  $\omega$ . Cela tient au caractère affine (non juste linéaire  $\omega = ck$ ) de la (RD).

3) a) La longueur d'onde de porteuse est  $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$ , le pas spatial de modulante est  $\Lambda = \frac{\pi}{\delta k}$ .

b) Les périodes sont  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 + k_0 c}$  pour la porteuse et  $T = \frac{\pi}{c(\delta k)}$  pour la modulante.

4) Les figures 3 et 4 tracent le graphe spatial du paquet à  $t = 0$  et à  $t > 0$ . Abstraction faite de l'absorption, le paquet se propage sans se déformer dès qu'on linéarise la (RD) en :  $\omega = ck + cte$ . Le phénomène est peu dispersif. Si on tient compte d'effets non linéaires, le paquet se déforme : il s'agit d'un phénomène notablement dispersif.

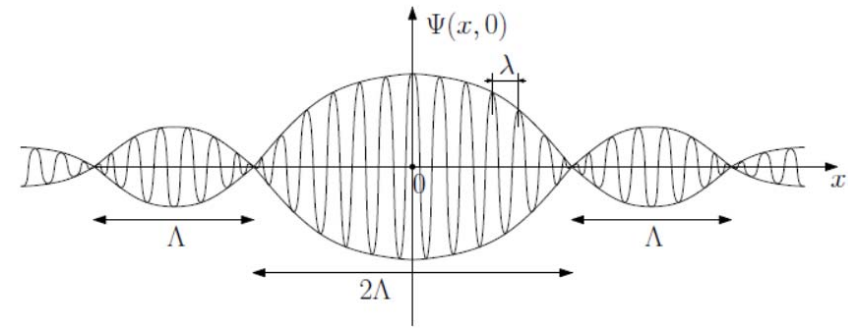


FIGURE 3 – Représentation spatiale à date initiale

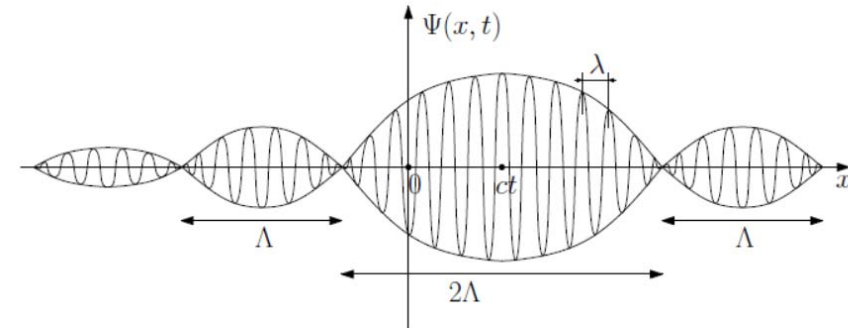


FIGURE 4 – Représentation spatiale à la date  $t > 0$

5)  $v_{\Phi} > c$  n'est pas absurde car l'OPPS n'a pas de sens physique. L'information se code sur un paquet d'OPPS se propageant à vitesse de groupe inférieure à  $c$ , et d'énergie se propageant à vitesse inférieure à  $c$ .