

# Réponse fréquentielle d'un système linéaire.

## I. Systèmes linéaires.

### 1. Définitions.

- Système physique : système fournissant des signaux de sortie à partir de signaux d'entrée.



- Système physique permanent : Système physique tel que tout décalage de  $\Delta t$  en entrée entraîne un décalage de  $\Delta t$  en sortie.
- Système physique linéaire : système physique tel que l'équation différentielle reliant  $e(t)$  et  $s(t)$  est linéaire :

$$\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{(k)}s}{dt^{(k)}} = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)}e}{dt^{(i)}} \quad (\text{Équation 1})$$

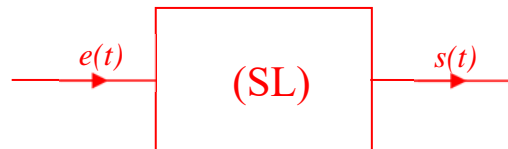
Notons que pour les systèmes permanents les coefficients  $a_i$  et  $b_k$  sont constants.

- En régime libre, le second membre de cette équation est nul :  $\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{(k)}s}{dt^{(k)}} = 0$  et dans le cas d'un régime forcé, le second membre est non nul.

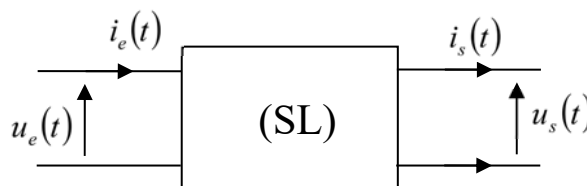
### 2. Représentation d'un système linéaire

- **Représentation bifilaire :**

C'est la représentation précédente :



- **Quadripôle :**



### 3. Régime d'utilisation/ Forme des signaux.

#### a. Nature des signaux :

Soit un signal  $x(t)$  :

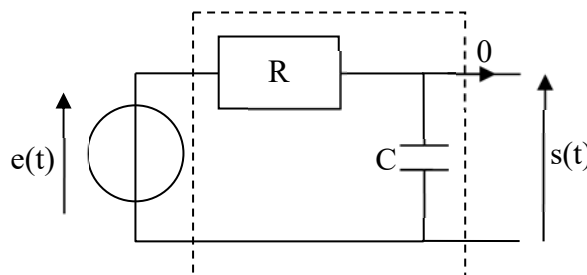
- **Signal continu** :  $x(t)$  est une fonction continue du temps (au sens mathématique du terme).  
Exemple : signal constant (continu) ; signal sinusoïdal ; signal en dents de scie ; signal en créneaux.
- **Signal discret** :  $x(t)$  prend des valeurs  $x_n$  discrètes à des temps  $t_n$  (signal échantillonné).

#### b. Régime d'utilisation :

- **Régime continu** :  $e(t)$  et  $s(t)$  sont des constantes.
- **Régime sinusoïdal** :  $e(t)$  et  $s(t)$  sont des fonctions sinusoïdales du temps.

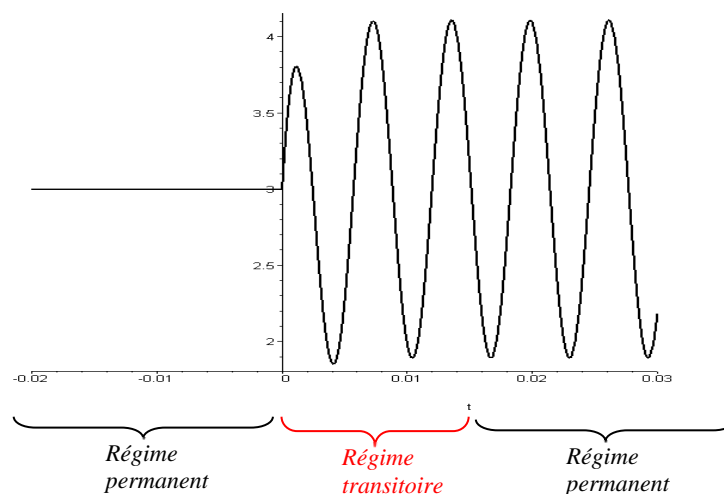
$$e(t) = E_o \cos(\omega t) \text{ et } s(t) = \underbrace{S_o}_{\text{amplitude}} \cos\left(\omega t + \underbrace{\phi}_{\text{phase}}\right)$$

- **Régime permanent** : Régime établi depuis un temps  $t$  grand devant la constante de temps du système linéaire.  
Exemple : régime continu ; régime sinusoïdal.
- **Régime transitoire** : Régime d'utilisation des circuits intervenant lors d'un changement d'alimentation.  
Exemple :



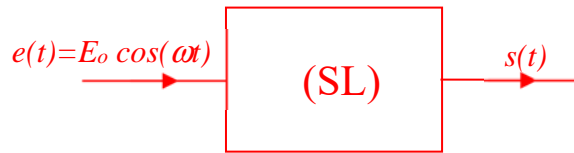
$$t < 0 : e(t) = E_o \Rightarrow s(t) = E_o$$

$$t > 0 : e(t) = E_o \cos(\omega t) \Rightarrow s(t) = S_o \cos(\omega t + \phi) + Ae^{-t/\tau} + B$$



#### 4. Régime sinusoïdal forcé/ Représentation complexe/ Notation opérationnelle.

- On se place en régime sinusoïdal :



- Le système étant linéaire,  $s(t)$  est de la forme :  $s(t) = s_l(t) + s_f(t)$  où :
  - $s_l(t)$ , solution libre, est solution de l'équation différentielle homogène (équation différentielle sans second membre). En régime permanent cette solution est nulle.
  - $\Rightarrow s(t) \approx s_f(t)$  en régime permanent.
  - $s_f(t)$ , solution forcée, est du même type que la commande  $e(t)$ .
  - $\Rightarrow$  Ici  $s(t)$  est donc sinusoïdal.
- Généralisation : Les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires :  $e(t)$  sinusoïdale  $\Leftrightarrow s(t)$  sinusoïdale.
- Notons que dans le cas d'un système non linéaire, si l'entrée est de la forme  $e(t) = E_o \cos(\omega t)$  alors le signal de sortie est la somme de fonctions sinusoïdales de pulsations différentes de  $\omega$ .

##### a. Notation complexe :

- Soit  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$  = valeur réelle instantanée de  $x(t)$  où :

$X_m$  =valeur maximale réelle ou amplitude réelle.

$$X_{eff} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} = \text{valeur efficace réelle.}$$

Alors :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = \text{valeur complexe instantanée ( } x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$$

$$\underline{X}_m = X_m e^{j\phi} = \text{valeur maximale complexe ( } \underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j(\omega t)} \text{ et } |\underline{X}_m| = X_m )$$

$$\underline{X}_{eff} = X_{eff} e^{-j\phi} = \text{valeur efficace complexe ( } \underline{x}(t) = \sqrt{2} \underline{X}_{eff} e^{j(\omega t)} ; \underline{X}_{eff} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \text{ et } |\underline{X}_{eff}| = X_{eff} )$$

- Opérations :**

Addition :

$$\text{si } x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\text{Alors : } \underline{x}(t) = \underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t) ; \underline{X}_m = \underline{X}_{1m} + \underline{X}_{2m} ; \underline{X}_{eff} = \underline{X}_{1eff} + \underline{X}_{2eff}$$

Mais attention !  $X_m \neq X_{1m} + X_{2m}$  et  $X_{eff} \neq X_{1eff} + X_{2eff}$

Dérivation :

$$\text{Si } x(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

$$\text{Alors : } \underline{x}(t) = \frac{d(\underline{f}(t))}{dt} \Rightarrow \underline{x}(t) = (j\omega)\underline{f}(t)$$

$$\underline{X}_m = j\omega\underline{F}_m ; \underline{X}_{eff} = j\omega\underline{F}_{eff}$$

Intégration :

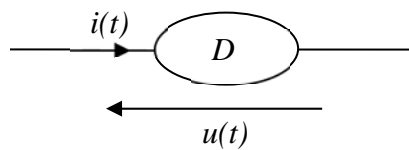
$$\text{Si } x(t) = \int f(t)dt$$

$$\text{Alors : } \underline{x}(t) = \int \underline{f}(t)dt \Rightarrow \underline{x}(t) = \frac{\underline{f}(t)}{j\omega}$$

$$\underline{X}_m = \frac{\underline{F}_m}{j\omega} ; \underline{X}_{eff} = \frac{\underline{F}_{eff}}{j\omega}$$

▪ **Impédance** :

Soit un dipôle linéaire D utilisé en régime sinusoïdal forcé.



Où  $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_i)$  et  $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_u)$

On note  $\underline{I} = Ie^{j\phi_i}$  et  $\underline{U} = Ue^{j\phi_u}$  les valeurs efficaces complexes correspondantes.

Par définition, l'impédance du dipôle linéaire est :  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$

On a alors :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX \quad \text{où } R \text{ est la résistance du dipôle et } X \text{ sa réactance.}$$

$$= |\underline{Z}|e^{j\phi} \quad \text{où } |\underline{Z}| = \frac{U}{I} \text{ et } \phi = \phi_u - \phi_i$$

$$\text{D'où : } R = \frac{U}{I} \cos(\phi) \text{ et } X = \frac{U}{I} \sin(\phi)$$

### b. Etude des réseaux linéaires en notation complexe :

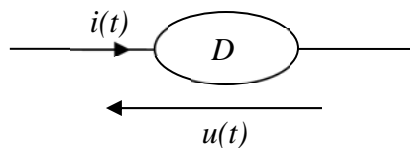
- Tous les théorèmes de l'électrocinétique reposent sur le caractère linéaire des circuits.

⇒ On pourra donc les utiliser en notation complexe.

- Exemple : générateurs de Thévenin et Norton ; Equivalence Thévenin/ Norton ; Théorème de Millman (loi des nœuds sous forme de potentiel) ; Théorème de superposition ; diviseur de tension ; diviseur de courant...

### c. Puissance en régime sinusoïdal.

Soit un dipôle linéaire utilisé en régime sinusoïdal.



$$\text{Où } i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_i) \text{ et } u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi_u)$$

On note  $\underline{I} = Ie^{j\phi_i}$  et  $\underline{U} = Ue^{j\phi_u}$  les valeurs efficaces complexes correspondantes.

- $p(t) = u(t).i(t)$  = puissance instantanée reçue.
- $\underline{p}(t) = \frac{1}{2} \underline{u}(t).\underline{i}(t)^* = \underline{U}.\underline{I}^* = \underline{Z}I^2 = UIe^{j\phi}$  = puissance complexe reçue.
- $P_a = \text{Re}(\underline{p}(t)) = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t).dt = UI \cos(\phi) = RI^2$  = puissance moyenne reçue = puissance active.
- $Q = \text{Im}(\underline{p}(t)) = UI \sin(\phi) = XI^2$  = puissance réactive.
- $S = UI$  = puissance apparente

Notons que  $P_a$  correspond à la puissance moyenne reçue et s'exprime en Watts (W) alors que Q ne correspond pas à une puissance reçue : elle traduit uniquement les échanges énergétiques dans le dipôle au cours d'une période. Pour marquer la différence avec une puissance reçue, on l'exprime non pas en Watts mais en volts.Ampère.réactif (VAR). De même S, correspondant à la puissance reçue en régime continu en prenant pour les valeurs continues les valeurs efficaces U et I, s'exprime non pas en Watts mais en Volts.ampère (V.A)

### d. Notation opérationnelle.

En notation opérationnelle on remplace  $j\omega$  par  $p$  :  $\underline{X}(j\omega) \Rightarrow X(p)$

**Attention !! Cette notation ne doit pas être utilisée lorsque l'on cherche à calculer le module ou l'argument d'une grandeur complexe. Elle est en revanche très pratique lors de l'étude fréquentielle des fonctions de transfert.**

## II. Réponse fréquentielle d'un système linéaire.

Soit le système linéaire suivant :



⇒ En notation complexe, on a :  $\underline{e}(t) = \underline{E}e^{j(\omega t)}$  où  $\underline{E} = Ee^{j\phi_e}$

$$\underline{s}(t) = \underline{S}e^{j(\omega t)} \text{ où } \underline{S} = Se^{j\phi_s}$$

⇒ Faire une étude fréquentielle du SL c'est étudier les variations de  $\underline{S}$  (et donc de S et  $\phi_s$ ) en fonction de  $\omega$ .

### 1. Fonction de transfert – Transmittance opérationnelle.

▪ La fonction de transfert du système linéaire est :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{S(\omega)}{E} e^{j(\phi_s - \phi_e)}$

▪ La transmittance opérationnelle du système linéaire est  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

▪ D'après l'équation (1),  $\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^{(k)}s}{dt^{(k)}} = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{(i)}e}{dt^{(i)}}$

⇒ En notation opérationnelle, on a donc :  $\sum_{k=0}^m b_k \cdot p^k \cdot S(p) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot p^i E(p)$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \cdot p^i}{\sum_{k=0}^m b_k \cdot p^k} \text{ et } \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \cdot (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^m b_k \cdot (j\omega)^k}$$

▪ **Remarque 1** : On peut ainsi facilement passer de l'équation différentielle d'un système linéaire à sa transmittance opérationnelle ou fonction de transfert : il suffit de changer le rôle de l'opérateur dérivation par la multiplication par p ( ou par j $\omega$ )

Equation différentielle	Transmittance opérationnelle	Fonction de transfert
e(t)	E(p)	$\underline{E}(j\omega)$
s(t)	S(p)	$\underline{S}(j\omega)$
$\frac{d^n}{dt^n}$	$p^n$	$(j\omega)^n$

- **Remarque 2 :** Connaissant la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ , on peut en déduire le signal de sortie :

$$\begin{cases} S(\omega) = |\underline{H}(\omega)|E(\omega) = H(\omega)E(\omega) \\ \phi_s(\omega) = \phi(\omega) - \phi_e = \arg(\underline{H}(j\omega)) - \phi_e \end{cases}$$

- Exemples de fonctions de transfert :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \text{Amplification complexe en tension.}$$

$$\frac{\underline{I}_s}{\underline{I}_e} = \text{Amplification complexe en courant.}$$

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{I}_e} = \text{Trans-impédance complexe.}$$

$$\frac{\underline{I}_s}{\underline{U}_e} = \text{Trans-admittance complexe.}$$

## 2. Représentations.

On cherche à représenter la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$

### a. Diagramme amplitude-phase.

- On trace  $H(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  en fonction de  $\omega$ .

### b. Diagramme plan-complexe/ diagramme de Nyquist.

- On trace l'ensemble des points P de coordonnées  $X = \text{Re}[\underline{H}(j\omega)]$  et  $Y = \text{Im}[\underline{H}(j\omega)]$  en faisant varier  $\omega$  de 0 à l'infini :  
On obtient une courbe orientée appelée diagramme amplitude-phase.
- On peut également tracer l'ensemble des points P de coordonnées polaires  $\rho = H(\omega)$  et  $\theta = \phi(\omega)$  en faisant varier  $\omega$  de 0 à l'infini : On obtient une courbe orientée appelée diagramme de Nyquist identique au diagramme amplitude-phase.

### c. Diagramme de Bode.

#### (i) Définition.

- Le gain en décibel de la fonction de transfert est défini par :  $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(H(\omega))$
- Le diagramme de Bode de la fonction de transfert est défini par les courbes représentatives de  $G_{dB}(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  en fonction de  $\log(\omega)$ .
- La pente d'une courbe dans le diagramme de Bode donnant  $G_{dB}$  est :  $p = \frac{\Delta G_{dB}}{\Delta \log(\omega)}$ , elle s'exprime en décibel par décades.

**(ii) Diagramme asymptotique de Bode.**

- Avant de tracer le diagramme de Bode à proprement dit, on trace le diagramme asymptotique de Bode en déterminant les asymptotes hautes fréquences et basses fréquences du gain et de la phase. On trace alors ces asymptotes en les arrêtant là où elles se coupent (ou, si elles sont parallèles, en une pulsation caractéristique du système).

- Remarque :** L'équation d'une droite dans un diagramme de Bode est de la forme :  $G_{dB} = a \cdot \log(\omega) + b$

Exemple : La droite d'équation  $G_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$  est la droite de pente +20dB/dec coupant l'axe des abscisses en  $\omega = \omega_o$ .

**(iii) Diagramme de Bode.**

- A partir du diagramme asymptotique on trace le diagramme de Bode : On trace alors la courbe représentative de  $G_{dB}$  et  $\phi$  (tracé qualitatif en général) et on calcule précisément  $G_{dB}$  et  $\phi$  pour les pulsations caractéristiques du système.
- Remarque : Lors du tracé du diagramme de Bode, la courbe peut s'éloigner considérablement des asymptotes notamment dans le cas d'un phénomène de résonance.

**EXERCICE :**

Etudier la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)} = j \frac{\omega}{\omega_o}$  à l'aide des différentes représentations.

Gain (ou module) :  $H(\omega) = \frac{\omega}{\omega_o}$

Phase :  $\phi = \frac{\pi}{2}$

Gain en décibel :  $G_{dB} = 20 \cdot \log(H(\omega)) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)$

Diagramme amplitude-phase :

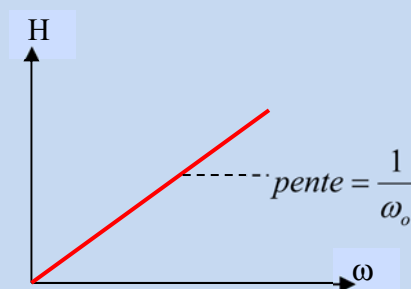




Diagramme plan-complexe / Diagramme de Nyquist :

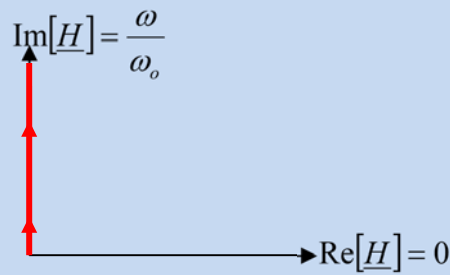
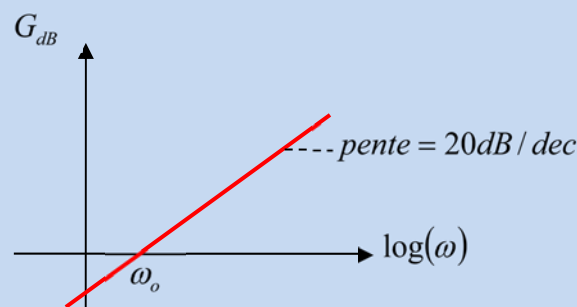


Diagramme de Bode :



**d. Décomposition d'une fonction de transfert en fonction de transfert élémentaires.**

- Soit le système linéaire de transmittance opérationnelle  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \cdot p^i}{\sum_{k=0}^m b_k \cdot p^k}$

⇒ Alors H(p) peut aussi s'écrire :  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\prod_i (p - z_i)}{\prod_k (p - z_k)}$

Sachant que les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont réels, on montre que les coefficients  $z_i$  et  $z_k$  sont réels ou avec leur conjugué. (par exemple, on aura :  $\prod_i (p - z_i) = (p - z_i)(p - z_i^*)$ )

⇒ En regroupant ces termes, on montre que H(p) peut s'écrire sous la forme d'un produit de transferts d'ordre 1 ou d'ordre 2 à coefficients réels :

$H(p) = \prod_k \underbrace{H_k(p)}_{\substack{\text{transferts d'ordre} \\ \text{1 et 2}}}$

⇒ Le gain et la phase correspondant se décomposent alors de la manière suivante :  $G = \sum_k G_k$  et  $\phi = \sum_k \phi_k$

e. Bande passante.

Soit un filtre de fonction de transfert :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = H(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

- La bande passante de ce filtre est l'ensemble des pulsation  $\omega$  tel sur  $H(\omega) \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$

Soit :  $G(\omega) \geq G_{\max} - 3dB$

- Les pulsations de coupures sont les pulsations  $\omega_c$  vérifiant  $H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$  soit  $G(\omega_c) = G_{\max} - 3dB$

### III. Filtres d'ordre 1.

#### 1. Filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre.

- La fonction de transfert de transfert d'un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre vaut :

$$\underline{H}_1(j\omega) = H_1(\omega)e^{j\phi_1(\omega)} = \frac{H_o}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}} \text{ où } H_o \text{ est une constante positive.}$$

- Transmittance opérationnelle :  $H_1(p) = \frac{H_o}{1 + \frac{p}{\omega_o}}$

- Gain (module de  $\underline{H}$ ) :  $H_1(\omega) = \frac{H_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$

- Phase :  $\tan(\phi_1) = -\frac{\omega}{\omega_o}$  et  $\cos(\phi_1) = H_1(\omega) / H_o > 0$  ;  $\sin(\phi_1) = -H_1(\omega) / H_o \frac{\omega}{\omega_o} < 0$

- Gain en décibel :  $G_{1dB} = 20 \cdot \log(H_1(\omega)) = 20 \cdot \log(H_o) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)$

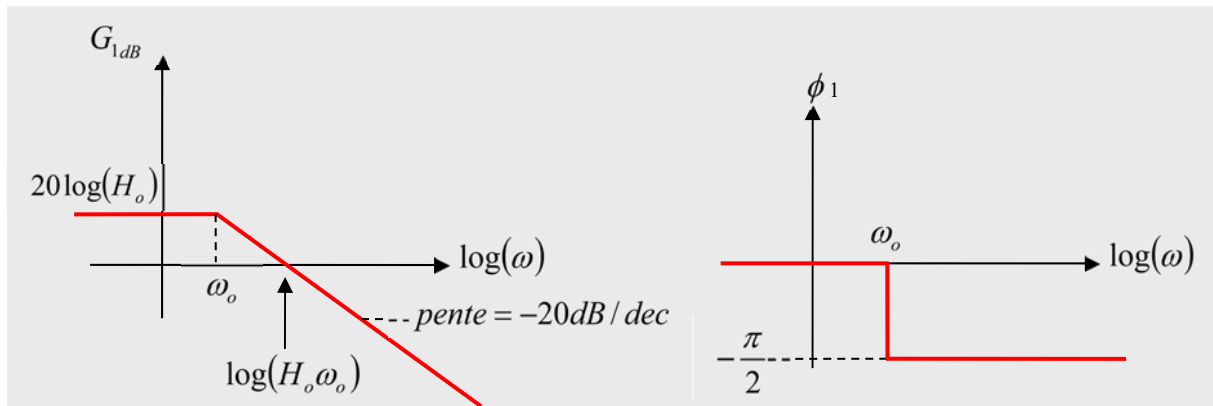
a. Diagramme asymptotique :

- HF :  $H_1(p) \underset{\infty}{\approx} \frac{H_o \omega_o}{p} \Rightarrow G_{1dB} \underset{\infty}{\approx} -20 \log\left(\frac{\omega}{H_o \omega_o}\right) :$

Droite de pente -20dB/dec coupant l'axe des abscisses en  $\omega = \omega_o H_o$

$$\Rightarrow \phi_1 \underset{\infty}{\approx} -\frac{\pi}{2}$$

- BF :  $H_1(p) \underset{0}{\approx} H_o \Rightarrow G_{1dB} \underset{0}{\approx} 20 \log(H_o) = Cste$  et  $\lim_{p \rightarrow 0} \phi_1 = 0$



**b. Bande passante :**

La valeur maximale de  $H_1(\omega)$  est  $H_{1\max} = H_o$  ( on note alors  $G_{1\max} = 20 \cdot \log(H_{1\max})$  )

$\Rightarrow$  Les pulsations de coupure vérifient :  $H_1(\omega_c) = \frac{H_{1\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{H_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_o}\right)^2}} = \frac{H_{1\max}}{\sqrt{2}} = \frac{H_o}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_o}\right)^2 = 2$

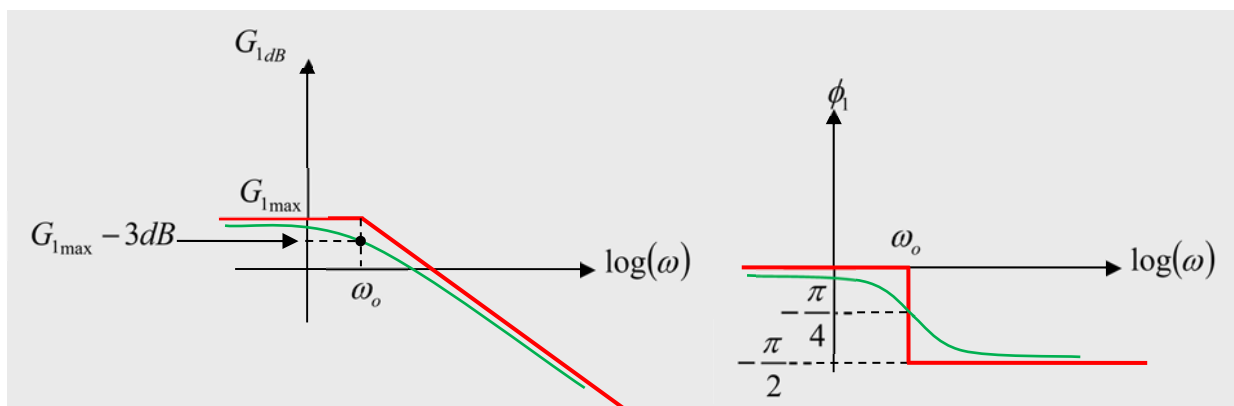
$\Rightarrow$  La seule solution positive est  $\omega_c = \omega_o$

$\Rightarrow$  Dans un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre la pulsation de coupure est égale à la pulsation propre.

Notons que pour  $\omega_c = \omega_o$ , la phase vaut  $-\frac{\pi}{4}$  :  $\tan(\phi_1(\omega_c)) = -\frac{\omega_c}{\omega_o} = -1$

**c. Diagramme de Bode :**

On trace qualitativement le diagramme de Bode est on indique les valeurs de  $G_{1dB}$  et  $\phi_1$  pour  $\omega = \omega_o$



## 2. Filtre passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre.

- La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre vaut :

$$\underline{H}_2(j\omega) = H_2(\omega)e^{j\phi_2(\omega)} = H_o \frac{j \frac{\omega}{\omega_o}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_o}} \text{ où } H_o \text{ est une constante positive.}$$

- Transmittance opérationnelle :  $H_2(p) = H_o \frac{\frac{p}{\omega_o}}{1 + \frac{p}{\omega_o}}$

⇒ Notons que l'on a :  $\underline{H}_2(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_o} \cdot \underline{H}_1(j\omega)$  et  $H_2(p) = \frac{p}{\omega_o} \cdot H_1(p)$

- Gain (module de  $\underline{H}$ ) :  $H_2(\omega) = H_o \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} = \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \cdot H_1(\omega)$

- Phase :  $\phi_2 = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) = \frac{\pi}{2} + \phi_1$

- Gain en décibel :  $G_{2dB} = 20 \cdot \log(H_2(\omega)) = 20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) + G_{1dB}$

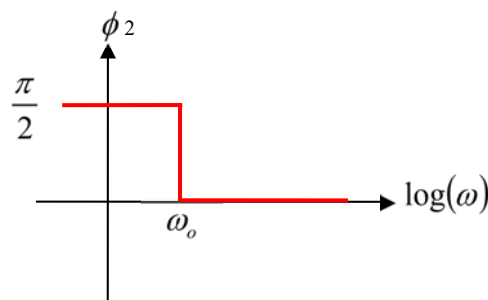
### a. Diagramme asymptotique :

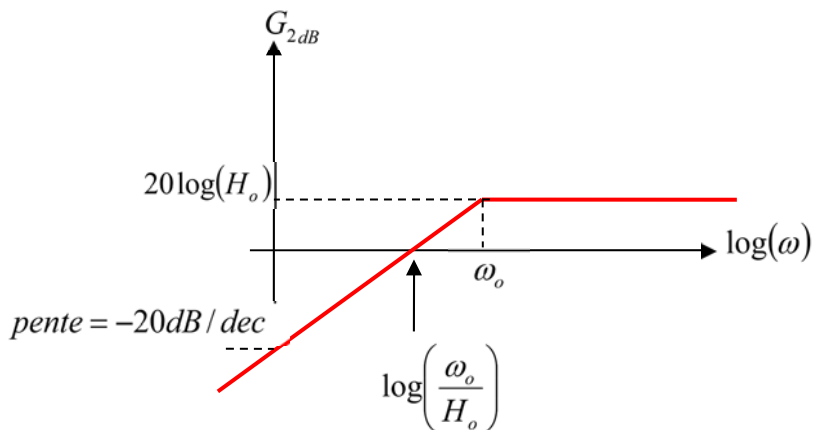
HF :  $H_2(p) \underset{\infty}{\approx} H_o \Rightarrow G_{2dB} \underset{\infty}{\approx} 20 \log(H_o) = cste :$

$\Rightarrow \lim_{\infty} \phi_2 = 0$

BF :  $H_2(p) \underset{0}{\approx} H_o \frac{p}{\omega_o} \Rightarrow G_{2dB} \underset{0}{\approx} 20 \log\left(\frac{H_o \omega}{\omega_o}\right) : \text{ droite de pente } 20 \text{ dB/dec coupant l'axe des abscisses en } \omega = \frac{\omega_o}{H_o}$

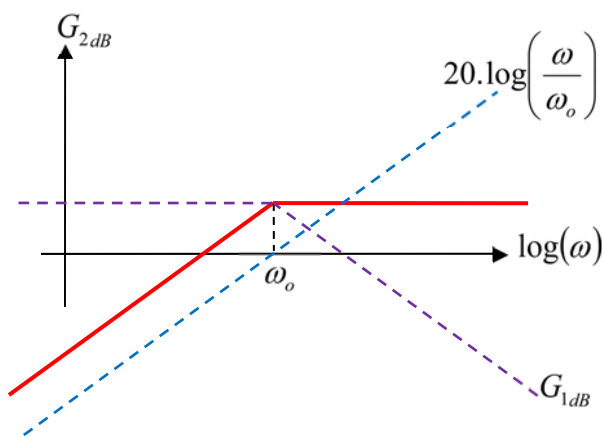
$\Rightarrow \phi_2 \underset{0}{\approx} \frac{\pi}{2}$



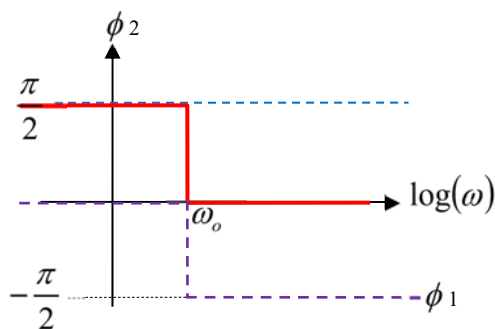


On peut établir les diagrammes asymptotiques en utilisant les diagrammes asymptotiques de Bode de  $H_1$  :

$$G_{2dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) + G_{1dB}$$



$$\phi_2 = \frac{\pi}{2} + \phi_1$$



**b. Bande passante :**

La valeur maximale de  $H_2(\omega)$  est  $H_{\max} = H_o$  ( on note alors  $G_{2_{\max}} = 20 \cdot \log(H_{2_{\max}})$  )

$$\Rightarrow \text{Les pulsations de coupure vérifient : } H_2(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{H_o \left( \frac{\omega_c}{\omega_o} \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega_c}{\omega_o} \right)^2}} = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{H_o}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + \left( \frac{\omega_c}{\omega_o} \right)^2 = 2 \left( \frac{\omega_c}{\omega_o} \right)^2$$

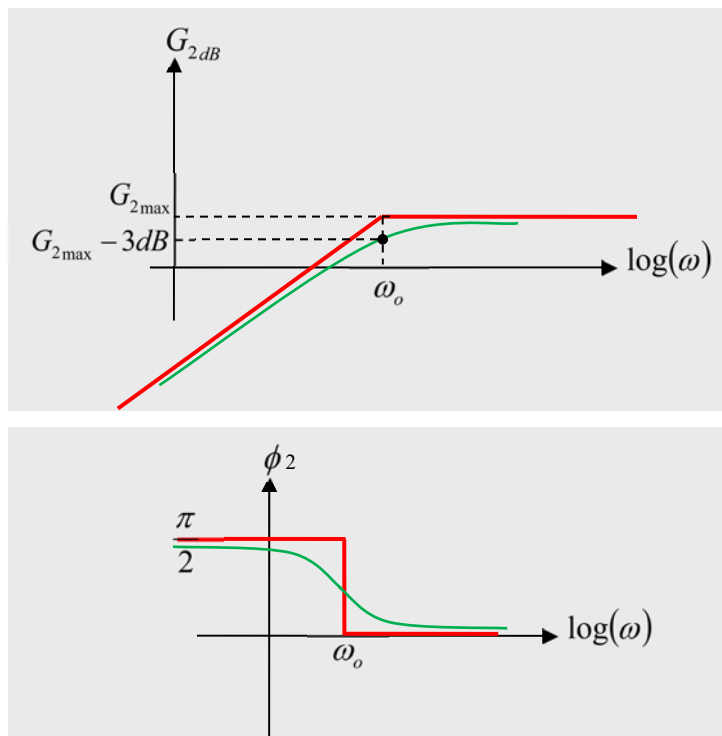
$\Rightarrow$  La seule solution positive est  $\omega_c = \omega_o$

$\Rightarrow$  Dans un filtre passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre la pulsation de coupure est égale à la pulsation propre.

Notons que pour  $\omega_c = \omega_o$ , la phase vaut  $\frac{\pi}{4}$  :  $\phi_2(\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(-\frac{\omega_c}{\omega_o}\right) = \frac{\pi}{4}$

### c. Diagramme de Bode :

On trace qualitativement le diagramme de Bode est on indique les valeurs de  $G_{2dB}$  et  $\phi_2$  pour  $\omega = \omega_o$



### 3. Filtre déphaseur.

- La fonction de transfert d'un filtre déphaseur du 1<sup>er</sup> ordre vaut :  $\underline{H}_3(j\omega) = H_3(\omega)e^{j\phi_3(\omega)} = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_o}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}}$

- Transmittance opérationnelle :  $H_3(p) = \frac{1 - \frac{p}{\omega_o}}{1 + \frac{p}{\omega_o}}$
- Gain (module de  $\underline{H}$ ) :  $H_3(\omega) = 1$  et donc le gain en décibel :  $G_{3dB} = 20 \cdot \log(H_3(\omega)) = 0$
- Phase :  $\phi_3 = -2 \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) = 2\phi_1$

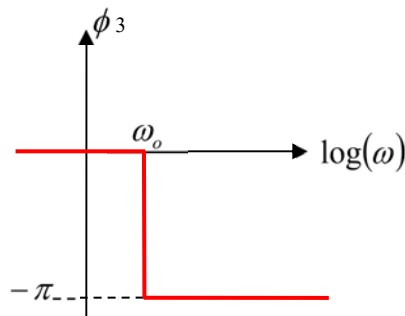
⇒ Ce filtre ne fait qu'introduire un déphasage entre le signal d'entrée et le signal de sortie.

⇒ D'où le nom filtre déphaseur.

#### a. Diagramme asymptotique :

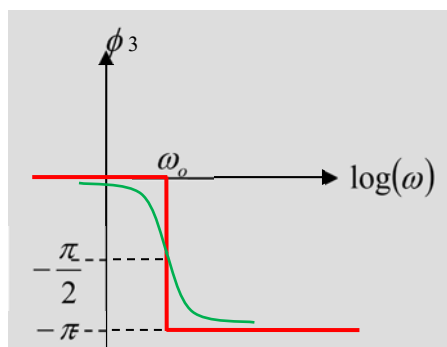
HF :  $H_3(p) \underset{\infty}{\approx} -1 \quad \Rightarrow \phi_3 \underset{\infty}{\approx} -\pi$

BF :  $H_3(p) \underset{0}{\approx} 1 \quad \Rightarrow \lim_0 \phi_3 = 0$



#### b. Diagramme de Bode :

On trace qualitativement le diagramme de Bode est on indique la valeur  $\phi_3$  pour  $\omega = \omega_o$  :



## IV. Filtre du second ordre.

### 1. Filtre passe-bas du second ordre.

- La transmittance opérationnelle d'un filtre passe-bas du 2<sup>nd</sup> ordre vaut :

$$H_4(p) = \frac{1}{1 + 2\sigma \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Où Q est le facteur de qualité du filtre,  $\sigma = \frac{1}{2Q}$  le coefficient d'amortissement et  $\omega_0$  la pulsation propre.

- Gain :**  $G_{4dB} = 20 \cdot \log(H_4) = -10 \log \left( \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 \right)$

- Phase :**  $\tan(\phi_4) = \frac{-\omega / \omega_0 Q}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

#### a. Cas général.

##### (i) Diagramme asymptotique de Bode :

$$H_4(p) \approx 1 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} (G_4) = 0 \Rightarrow \text{L'asymptote BF a pour équation : } G_4 = 0$$

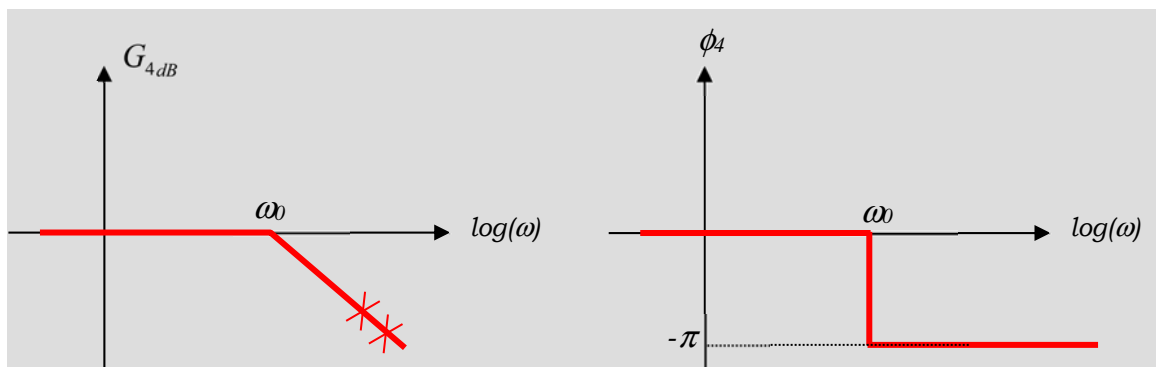
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (\phi_4) = 0 \Rightarrow \text{L'asymptote BF a pour équation : } \phi_4 = 0$$

$$H_4(p) \approx \frac{\omega_0^2}{p^2} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} (G_4) = -40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \Rightarrow \text{L'asymptote HF a pour équation : } G_4 = -40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$\Rightarrow$  Droite de pente  $-40\text{dB/dec}$  passant par  $(\omega_0, 0)$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\phi_4) = -\pi \Rightarrow \text{L'asymptote HF a pour équation : } \phi_4 = -\pi$$

D'où les diagrammes asymptotiques suivants :





**(ii) Diagramme de Bode.**

Pour le diagramme de Bode proprement dit notons les points suivants :

Plus  $\sigma$  est faible, plus l'atténuation après  $\omega_b$  sera « rapide ».

Inversement, au voisinage de  $\omega_o$ , pour un amortissement élevé, la pente est plutôt de  $-20dB/dec$ .

**(iii) Résonance.**

- Le module  $H_4(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$  est maximal lorsque son dénominateur est maximal (le numérateur étant constant).

$\Rightarrow$  En posant  $X = \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2$ , on en déduit qu'à la résonance,  $D(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$  est maximal

A la résonance, on a donc :  $\frac{dD}{dX} = 2(1 - X_{res}) + \frac{1}{Q^2} = 0$

$$\Rightarrow X_{res} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Sachant que  $X_{res}$  est positif, on en déduit :

Pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) on a résonance, la pulsation de résonance étant :  $\omega_{res} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \omega_o \sqrt{1 - 2\sigma^2} < \omega_b$

- On en déduit la valeur de  $H_4$  à la résonance :  $H_4(\omega_{res}) = H_{4\max} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2(1 - \sigma^2)}} > 1$
- Notons que le déphasage vaut  $-\pi/2$  pour  $\omega = \omega_b$  et non pour  $\omega_{res}$

**b. Etude d'un passe-bas du second ordre décomposable. ( $\sigma > 1$ )**

La fonction de transfert s'écrit alors :  $H_4(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_a}\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_b}\right)}$ .

**(i) Détermination de  $\omega_a$  et  $\omega_b$  :**

En comparant les dénominateurs des expressions de  $H_4$ , on obtient :

$$1 + 2\sigma \frac{p}{\omega_o} + \left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2 = 1 + p\left(\frac{1}{\omega_a} + \frac{1}{\omega_b}\right) + \frac{(p)^2}{\omega_a \omega_b}$$

On en déduit  $\omega_a$  et  $\omega_b$  :

$$\begin{cases} \omega_a = \sigma\omega_o - \omega_o \sqrt{\sigma^2 - 1} \\ \omega_b = \sigma\omega_o + \omega_o \sqrt{\sigma^2 - 1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Pour que ces pulsations soient définies, il faut que  $\sigma$  soit supérieur à 1.

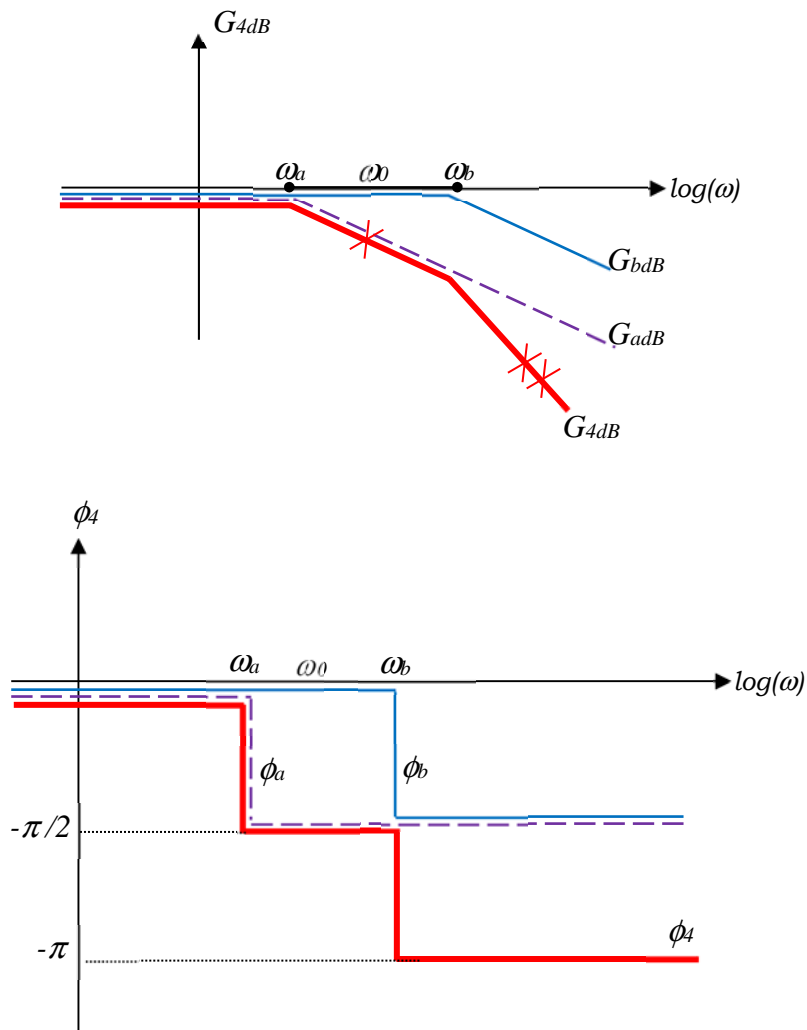
**(ii) Diagramme asymptotique de Bode.**

D'après ce qui suit,  $H_4(p)$  s'écrit :  $H_4(p) = H_a(p) \cdot H_b(p)$  où :  $H_a(p) = \frac{1}{(1 + \frac{p}{\omega_a})}$  et  $H_b(p) = \frac{1}{(1 + \frac{p}{\omega_b})}$

⇒ On retrouve les fonctions de transfert du premier ordre déjà étudiées.

Le gain s'écrit alors :  $G_{4dB} = G_{adB} + G_{bdB}$  et la phase :  $\phi_4 = \phi_a + \phi_b$  où  $G_{adB}$  ;  $G_{bdB}$  ;  $\phi_a$  et  $\phi_b$  sont les gains et les phases des fonctions de transfert  $H_a$  et  $H_b$ .

D'où les diagrammes asymptotiques suivants :



Ainsi, lorsque l'amortissement est suffisamment élevé ( $\sigma > 1$ ), la décomposition de  $H_4(p)$  en deux transferts du premier ordre permet de mettre en évidence une pente à  $-20dB/dec$  avant la pente à  $-40dB/dec$  : le filtre est moins « sélectif ».

**(iii) Bande passante.**

Sachant que  $\sigma > 1$ , on en déduit qu'il n'y a pas résonance. La valeur maximale de  $G_{4dB}$  est donc obtenue pour  $\omega = 0$ , on a alors :  $G_{4max} = G_{4dB}(\omega = 0) = 0$  et donc  $H_{4max} = 1$

La pulsation de coupure vérifie donc :  $G(\omega_c) = -3 \text{ dB} \Leftrightarrow |H| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

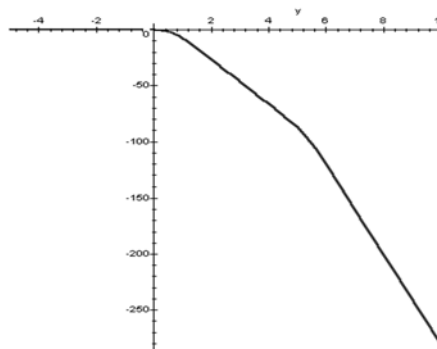
$\Rightarrow$  Après calculs, on trouve :  $\omega_c = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - 4\sigma^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{1 - 2\sigma^2 + 2\sigma^4}}$

Attention : la pulsation de coupure  $\omega_c$  n'est pas égale à  $\omega_0$  !!

**(iv) Cas d'un amortissement très élevé**

Dans le cas où  $\sigma \gg 1$ , on établit facilement que :  $\begin{cases} \omega_a = \omega_0 / 2\sigma \\ \omega_b = 2\sigma\omega_0 \end{cases}$  et  $\omega_c \approx \frac{\omega_0}{2\sigma} \approx \omega_a$

Ainsi, dans le cas où  $\sigma \gg 1$ , on trouve que  $\omega_c \approx \omega_a$ . Ce résultat était prévisible, car lorsque  $\sigma \gg 1$ , les deux premiers ordres sont très éloignés l'un de l'autre et ainsi, c'est le premier transfert du premier ordre ( $H_a$ ) qui dans ce cas là définit la bande passante.



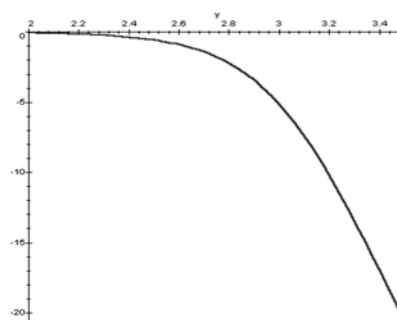
**c. Etude d'un passe-bas du second ordre non décomposable (  $\sigma < 1$  )**

Le diagramme asymptotique de Bode a été traité au paragraphe IV.1.a

**(i) Etude de la résonance et de la bande passante :**

Sachant qu'on a résonance pour  $\sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on aura deux cas :

-  $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sigma < 1$  : il n'y a pas résonance et  $G_{4\max} = 0 \Rightarrow$  le calcul de la bande passante s'effectue de la même façon que dans le cas décomposable.



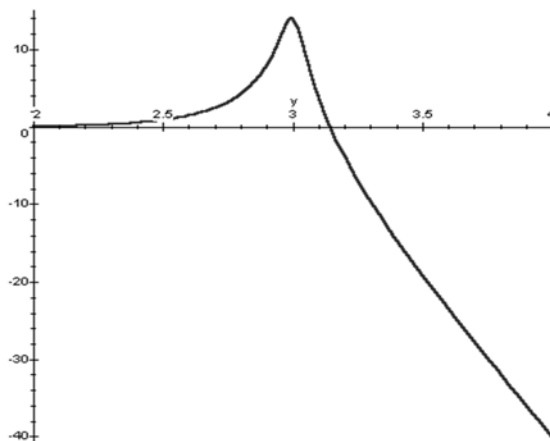
-  $0 < \sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$  : il y a résonance et  $G_{4max} > 0$  ( $H_{4max} > 1$ )

La pulsation de résonance vaut alors :  $\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\sigma^2} < \omega_0$

Pour calculer la bande passante, il faut calculer la nouvelle valeur de  $H_{4max}$  :  $H_{4max} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2(1-\sigma^2)}} > 1$

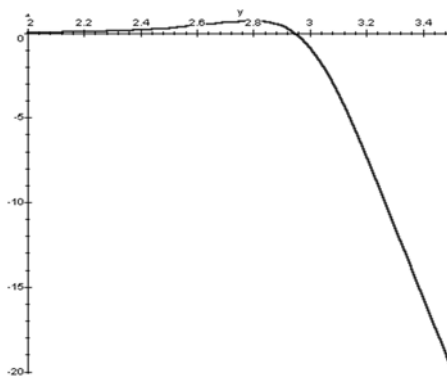
Lorsque  $\frac{H_{4max}}{\sqrt{2}} > 1$  ( $\sigma < 0,383$ ) on a deux pulsations de coupures :

$$\begin{cases} \omega_{c1} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\sigma^2 - 2\sigma\sqrt{1 - \sigma^2}} \\ \omega_{c2} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\sigma^2 + 2\sigma\sqrt{1 - \sigma^2}} \end{cases}$$



Lorsque  $\frac{H_{4max}}{\sqrt{2}} < 1$ , ( $\sigma > 0,383$ ) on a une seule pulsation de coupure :

$$\omega_{c2} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\sigma^2 + 2\sigma\sqrt{1 - \sigma^2}}$$



Attention : dans le cas de cette fonction de transfert, on n'a pas :  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

**(ii) Cas d'un très faible amortissement :**

Sachant que  $\sigma \ll 1$ , on en déduit les nouvelles expressions de  $\omega_{res}$  ;  $H_{4max}$  et des pulsations de coupure :

$$\omega_r \approx \omega_0$$

$$H_{4max} = \frac{1}{2\sigma} = Q$$

$$\begin{cases} \omega_{c1} = \omega_0(1 - \sigma) \\ \omega_{c2} = \omega_0(1 + \sigma) \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas particulier où  $\sigma \ll 1$ , on a :  $\Delta\omega = 2\sigma\omega_0$  c'est à dire :  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

**2. Filtre passe-bande du second ordre.**

- Fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre vaut :

$$\underline{H}_5(j\omega) = H_5(\omega)e^{j\phi_5(\omega)} = \frac{\frac{1}{Q}\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \frac{1}{Q}\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

- Module :  $H_5(\omega) = \frac{\frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}}$

- Gain en décibel :  $G_{5dB} = 20 \log \left( \frac{\frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \right) = -10 \log \left( 1 + Q^2 \left( \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \right)^2 \right)$

- Phase :  $\phi_5(\omega) = \arg(\underline{H}_5) = \arg \left( \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \right) = -\arctan \left( Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$

**a. Étude de la résonance.**

- $H_5(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)^2}} \Rightarrow H_5(\omega)$  est maximal quand le dénominateur est minimal.

$\Rightarrow H_5(\omega)$  est maximal quand  $\omega = \omega_0$

En remplaçant  $\omega$  par  $\omega_0$  dans l'expression de  $H_5(\omega)$ , on détermine  $H_{5\max} : H_{5\max} = 1$

- $\varphi_5(\omega) = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \Rightarrow \varphi_5(\omega_0) = 0$

**b. Diagramme asymptotique de Bode.**

Asymptote BF :

- $H_5(p) \underset{0}{\approx} \frac{p}{Q\omega_0} \Rightarrow G_5 \underset{0}{\approx} 20 \log\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$

$\Rightarrow$  Droite de pente 20 dB/dec coupant l'axe des abscisses pour  $\omega_1 = Q\omega_0$

$\Rightarrow \varphi_5(\omega) \underset{0}{\approx} \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  L'asymptote BF a pour équation :  $\varphi_5(\omega) = \frac{\pi}{2}$

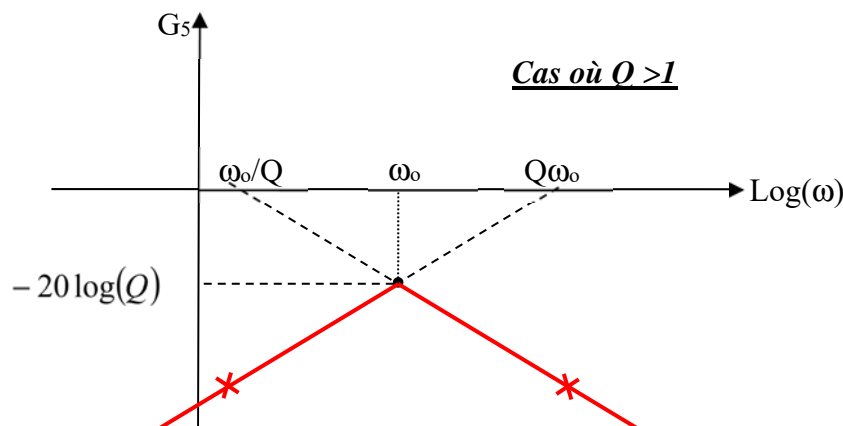
Asymptote HF :

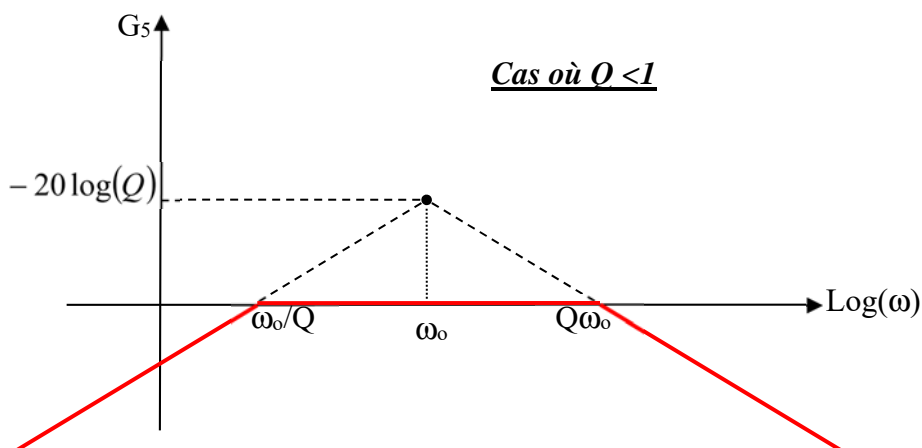
- $H_5(p) \underset{0}{\approx} \frac{\omega_0}{Qp} \Rightarrow G_5 = -20 \log\left(\frac{Q\omega}{\omega_0}\right)$

$\Rightarrow$  Droite de pente -20 dB/dec coupant l'axe des abscisses pour  $\omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}$

$\Rightarrow \varphi_5(\omega) \underset{\infty}{\approx} -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$  L'asymptote HF a pour équation :  $\varphi_5(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

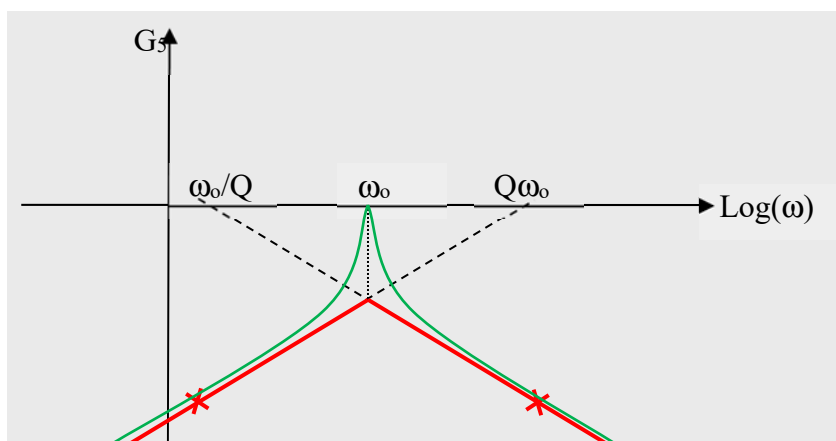
**Notons que les asymptote BF et HF du gain se coupent pour  $\omega = \omega_0$ , le gain étant alors égal à  $-20 \log(Q)$**



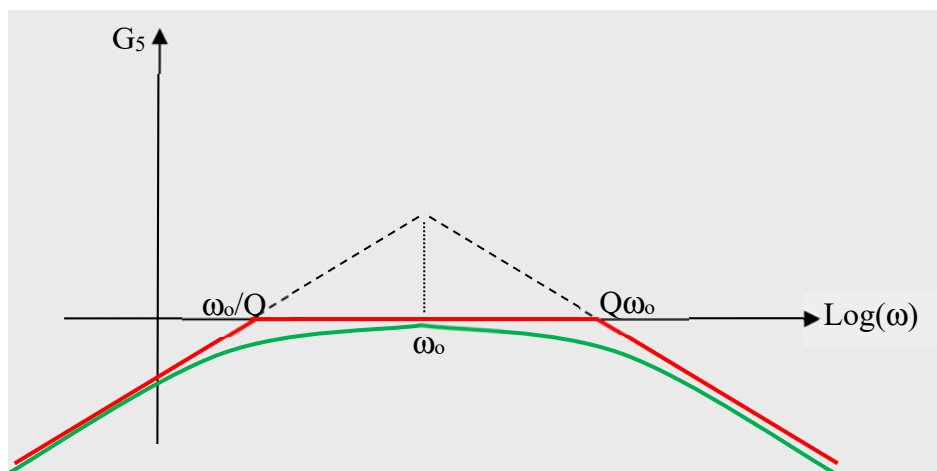


**c. Diagramme de Bode.**

- Le gain s'annule pour  $\omega = \omega_0$  et ceci quel que soit  $Q$  :  $G_5(\omega_0) = 0$
- Cas où  $Q \gg 1$  :  $\omega_1 = Q\omega_0 \gg \omega_0$  et  $\omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} \ll \omega_0$



- Cas où  $Q = 0.1$  ;  $\omega_1 = Q\omega_0 \gg \omega_0$  et  $\omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} \ll \omega_0$



**d. Etude de la bande passante.**

- Les pulsations de coupure vérifient :  $H_5(\omega_c) = \frac{H_{5\max}}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1+Q^2\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2 = 2 \Rightarrow Q^2\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow Q\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = \pm 1$$

$$\Rightarrow \omega^2 \pm \frac{\omega_0 \omega}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \pm \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1+4Q^2}$$

Parmi ces 4 solutions, il n'y en a que 2 qui sont positives :

$$\omega_{c-} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1+4Q^2} \quad \text{et} \quad \omega_{c+} = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1+4Q^2}$$

- On définit la largeur de la bande passante par  $\Delta\omega = \omega_{c+} - \omega_{c-}$  :  $\Delta\omega = \omega_{c+} - \omega_{c-} = \frac{\omega_0}{Q}$

**3. Filtre passe haut du second ordre.**

- La transmittance opérationnelle d'un filtre passe-haut du 2<sup>nd</sup> ordre vaut :

$$H_6(p) = \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1+2\sigma\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1+\frac{1}{Q}\frac{p}{\omega_0}+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Où Q est le facteur de qualité du filtre,  $\sigma = \frac{1}{2Q}$  le coefficient d'amortissement et  $\omega_0$  la pulsation propre.

- Notons que l'on a alors :

$$H_6(p) = \left(\frac{p}{\omega_0}\right) H_5(p) = \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 H_4(p) \quad \text{soit} \quad \underline{H}_6(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) \underline{H}_5(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 \underline{H}_4(j\omega)$$



▪ **Module :** 
$$H_6(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) H_5(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_4(\omega)$$

▪ **Gain :** 
$$G_{6dB} = 20 \cdot \log(H_6(\omega)) = 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right)$$

Et : 
$$G_{6dB} = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + G_{5dB} = 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + G_{4dB}$$

▪ **Phase :** 
$$\phi_6(\omega) = \pi - \text{Arc tan} \left( \frac{\omega / \omega_0 Q}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

Et : 
$$\phi_6(\omega) = \frac{\pi}{2} + \phi_5(\omega) = \pi + \phi_4(\omega)$$

a. **Cas général.**

(i) **Diagramme asymptotique de Bode :**

$H_6(p) \approx 1 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} (G_6) = 0 \Rightarrow$  L'asymptote HF a pour équation :  $G_6 = 0$

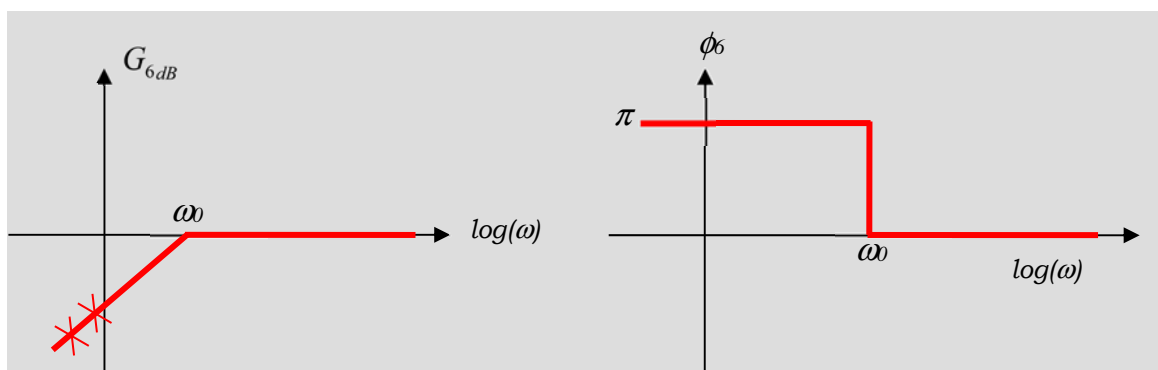
$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\phi_6) = 0 \Rightarrow$  L'asymptote HF a pour équation :  $\phi_6 = 0$

$H_6(p) \approx \frac{p^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} (G_6) = 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow$  L'asymptote BF a pour équation :  $G_6 = 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

$\Rightarrow$  Droite de pente 40dB/dec passant par  $(\omega_0, 0)$

$\lim_{\omega \rightarrow 0} (\phi_6) = \pi \Rightarrow$  L'asymptote BF a pour équation :  $\phi_6 = \pi$

D'où les diagrammes asymptotiques suivants :



**(ii) Diagramme de Bode.**

Pour le diagramme de Bode proprement dit notons les points suivants :

Plus  $\sigma$  est faible, plus l'atténuation avant  $\omega_b$  sera « rapide ».

Inversement, au voisinage de  $\omega_o$ , pour un amortissement élevé, la pente est plutôt de  $+20dB/dec$ .

**(iii) Résonance.**

Le module  $H_6(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$  s'écrit également :  $H_6(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}$  Ainsi,

$H_6(\omega)$  est maximal lorsque son dénominateur  $\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}$  est minimal (le numérateur étant constant).

⇒ En posant  $X = \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2$ , on en déduit qu'à la résonance,  $D(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$  est minimal

⇒ A la résonance, on a donc :  $\frac{dD}{dX} = 2(1 - X_{res}) + \frac{1}{Q^2} = 0$

⇒  $X_{res} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

Sachant que  $X_{res}$  est positif, on en déduit :

Pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) on a résonance, la pulsation de résonance étant :  $\omega_{res} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\sigma^2}} > \omega_0$

On en déduit la valeur de  $H_6$  à la résonance :  $H_6(\omega_{res}) = H_{6max} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{1 - \sigma^2}} > 1$

Notons que le déphasage vaut  $\pi/2$  pour  $\omega = \omega_b$  et non pour  $\omega_{res}$

**b. Etude d'un passe-haut du second ordre décomposable. ( $\sigma > 1$ )**

La fonction de transfert s'écrit alors :  $H_6(p) = \frac{\left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2}{\left(1 + \frac{p}{\omega_a}\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_b}\right)}$  .

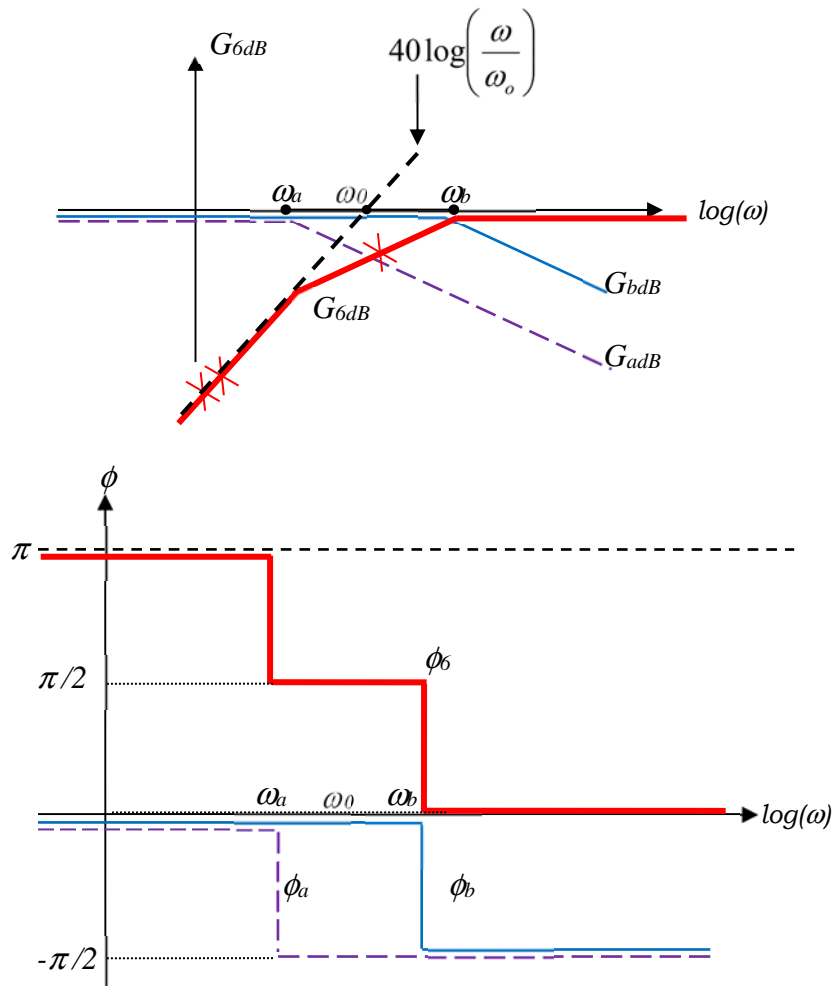
On rappelle que  $\begin{cases} \omega_a = \sigma\omega_0 - \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1} \\ \omega_b = \sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1} \end{cases}$

⇒ Pour que ces pulsations soient définies, il faut que  $\sigma$  soit supérieur à 1.

**(i) Diagramme de Bode.**

L'étude est identique à celle effectuée pour  $H_4(p)$  en ajoutant  $40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  au gain et en ajoutant un déphasage de  $\pi$ .

On obtient les diagrammes de Bode suivants :



Ainsi, lorsque l'amortissement est suffisamment élevé ( $\sigma > 1$ ), la décomposition de  $H_6(p)$  en deux transferts du premier ordre permet de mettre en évidence une pente à  $20\text{dB/dec}$  après la pente à  $40\text{dB/dec}$  : le filtre est moins « sélectif ».

**(ii) Bande passante.**

Sachant que  $\sigma > 1$ , on en déduit qu'il n'y a pas résonance. La valeur maximale de  $G_{6\text{dB}}$  est donc obtenue pour  $\omega \rightarrow \infty$ , on a alors :  $G_{6\text{max}} = G_{6\text{dB}}(\omega = \infty) = 0$  et donc  $H_{6\text{max}} = 1$

La pulsation de coupure vérifie donc :  $G_6(\omega_c) = -3 \text{ dB} \Leftrightarrow |H_6| = \frac{H_{6\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

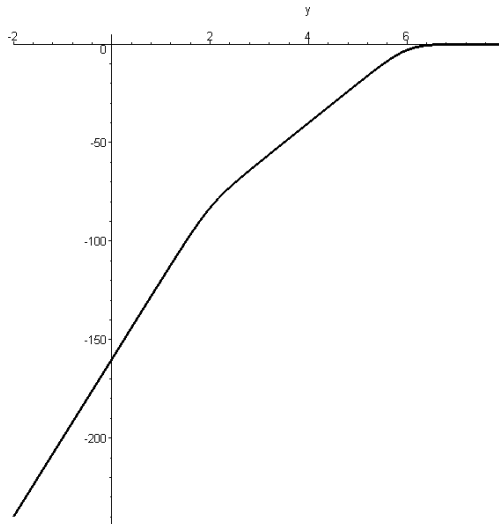
$\Rightarrow$  Après calculs, on trouve :  $\omega_c = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}\sqrt{2-4\sigma^2} + 2\sqrt{2}\sqrt{1-2\sigma^2} + 2\sigma^4}}$

Attention : la pulsation de coupure  $\omega_c$  n'est pas égale à  $\omega_0$  !!

**(iii) Cas d'un amortissement très élevé**

Dans le cas où  $\sigma \gg 1$ , on établit facilement que :  $\begin{cases} \omega_a = \omega_0 / 2\sigma \\ \omega_b = 2\sigma\omega_0 \end{cases}$  et  $\omega_c \approx 2\sigma\omega_0 \approx \omega_b$

Ainsi, dans le cas où  $\sigma \gg 1$ , on trouve que  $\omega_c \approx \omega_b$ . Ce résultat était prévisible, car lorsque  $\sigma \gg 1$ , les deux premiers ordres sont très éloignés l'un de l'autre et ainsi, c'est le deuxième transfert du premier ordre ( $H_b$ ) qui dans ce cas là définit la bande passante.



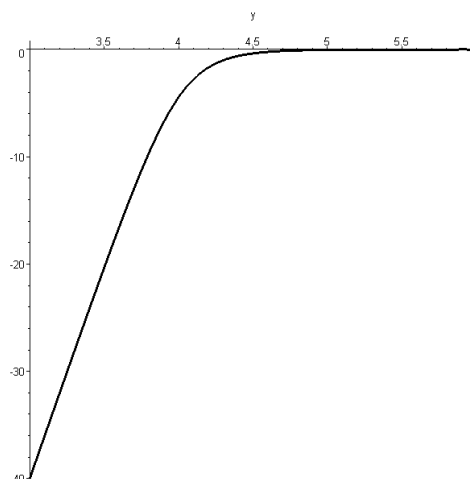
**c. Etude d'un passe-bas du second ordre non décomposable ( $\sigma < 1$ )**

Le diagramme asymptotique de Bode a été traité au paragraphe IV.3.a

**(i) Etude de la résonance et de la bande passante :**

Sachant qu'on a résonance pour  $\sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on aura deux cas :

- $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sigma < 1$  : il n'y a pas résonance et  $G_{6max} = 0 \Rightarrow$  le calcul de la bande passante s'effectue de la même façon que dans le cas décomposable.

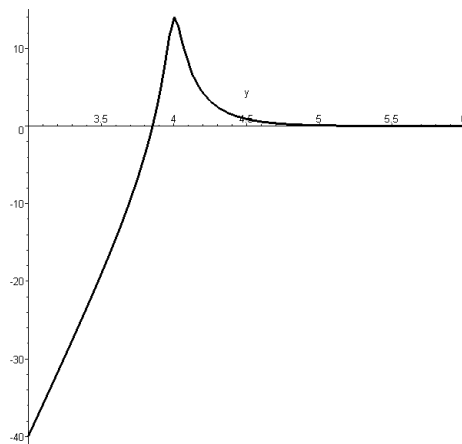


- $0 < \sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$  : il y a résonance et  $G_{6max} > 0$  ( $H_{6max} > 1$ )

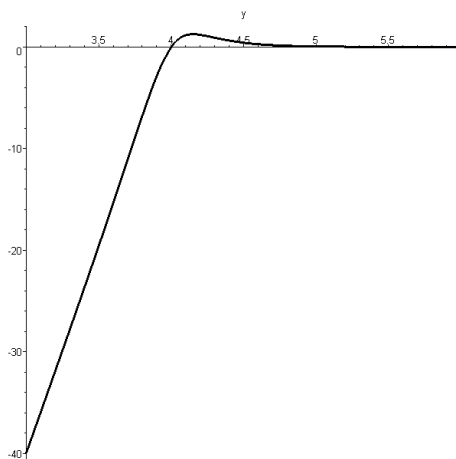
La pulsation de résonance vaut alors :  $\omega_{res} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\sigma^2}} > \omega_0$

Pour calculer la bande passante, il faut calculer la nouvelle valeur de  $H_{6max}$  :  $H_{6max} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}} > 1$

- Lorsque  $\frac{H_{6max}}{\sqrt{2}} > 1$  ( $0 < \sigma < 0,383$ ) on a deux pulsations de coupures : 
$$\begin{cases} \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\sigma^2-2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}}} \\ \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\sigma^2+2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}}} \end{cases}$$



- Lorsque  $\frac{H_{6max}}{\sqrt{2}} < 1$ , ( $1 > \sigma > 0,383$ ) on a une seule pulsation de coupure :  $\omega_{c2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\sigma^2+2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}}}$



Attention : dans le cas de cette fonction de transfert, on n'a pas :  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

### (ii) Cas d'un très faible amortissement :

Sachant que  $\sigma \ll 1$ , on en déduit les nouvelles expressions de  $\omega_{res}$  ;  $H_{6max}$  et des pulsations de coupure :

$$\omega_r \approx \omega_0$$

$$H_{\phi_{\max}} = \frac{1}{2\sigma} = Q$$

$$\begin{cases} \omega_{c1} = \omega_0(1 - \sigma) \\ \omega_{c2} = \omega_0(1 + \sigma) \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas particulier où  $\sigma \ll 1$ , on a :  $\Delta\omega = 2\sigma\omega_0$  c'est à dire :  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

