

Conexion ex 1 - fiche MC

Siège éjectable

Analyse qualitative

- Si les ressorts ne sont pas suffisamment étirés au moment du lâcher, l'ensemble oscille sinusoïdalement autour de la position d'équilibre l_{eq} . Les passagers ont la sensation d'être plus lourds quand $l > l_{eq}$ et plus légers quand $l < l_{eq}$. C'est au départ que la pesanteur apparente est la plus importante.
- Si les ressorts sont suffisamment étirés au moment du lâcher, l'ensemble monte avec un mouvement en première phase d'oscillateur harmonique autour de la position d'équilibre l_{eq} . Le décollerment du siège se produit lorsque le poids apparent s'annule c'est-à-dire lorsque la décélération est g . Ceci se produira pour des ressorts de longueur $l < l_{eq}$.

1. On notera M' la masse totale $M' = M + m$.

La longueur des ressorts à l'équilibre est telle que

$$M'g = 2k(l_{eq} - l_0) \text{ soit } l_{eq} = l_0 + \frac{M'g}{k_e} \text{ où } k_e = 2k \text{ est la}$$

constante de raideur d'un ressort unique équivalent.

Tant que la masse M ne décolle pas du plateau,

$$M' \frac{d^2 l(t)}{dt^2} = M'g - k_e(l(t) - l_0) \text{ (TRC appliqué au système}$$

{plateau + cube} dans le référentiel terrestre supposé galiléen).

$$\text{Or } 0 = M'g - k_e(l_{eq} - l_0)$$

Donc par différence et en posant $Z(t) = l(t) - l_{eq}$,

$$\boxed{\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0} \quad (1)$$

traduisant un mouvement oscillatoire de pulsation propre

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_e}{M'}}$... ou plutôt un début de mouvement harmonique avant un éventuel décollage de la masse M .

En étudiant ensuite la masse M dans le référentiel terrestre (masse M soumise à son poids et à l'action \mathbf{R} du plateau) et en lui appliquant le TRC :

$M\ddot{Z} = Mg - \|\mathbf{R}\|$ tant que la masse reste en contact avec le plateau. Ceci est vrai tant que

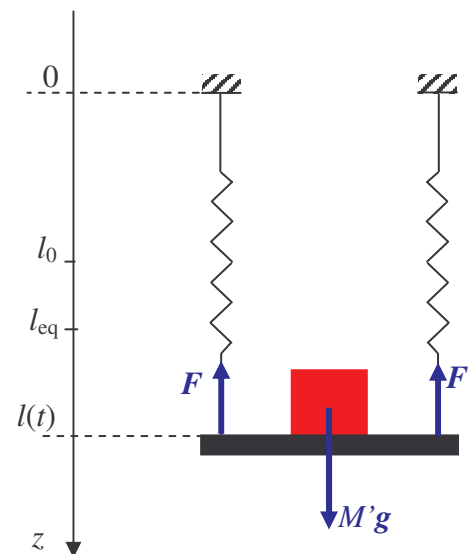
$$\frac{\|\mathbf{R}\|}{M} = g - \ddot{Z} > 0.$$

L'équation différentielle (1) a pour solution, en tenant compte de conditions initiales $Z(0) = l(0) - l_{eq} = l_{eq}$ et $\dot{Z}(0) = 0$: $Z(t) = l_{eq} \cos(\omega_0 t)$.

$$\text{Il vient alors } \boxed{\frac{\|\mathbf{R}\|}{M} = g + \omega_0^2 l_{eq} \cos(\omega_0 t)}.$$

Si $\omega_0^2 l_{eq} > g$, les passagers décollent au premier instant vérifiant $\frac{\|\mathbf{R}(t_1)\|}{M} = g + \omega_0^2 l_{eq} \cos(\omega_0 t_1) = 0$

$$\text{c'est-à-dire } \boxed{\cos(\omega_0 t_1) = -\frac{g}{\omega_0^2 l_{eq}} = \frac{-1}{1 + \alpha}} \text{ où } \alpha = \frac{k_e l_0}{M'g}.$$



On se trouve bien dans ce 2^e cas car $\omega_0^2 l_{eq} = \frac{k_e}{M'} \left(l_0 + \frac{M' g}{k_e} \right) = g + \frac{k_e l_0}{M'} > g$.

À l'instant t_1 , l'ensemble plateau-passagers se trouvent à la position

$$l(t_1) = l_{eq} + Z(t_1) = l_{eq} (1 + \cos(\omega_0 t_1)) = l_{eq} \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

On vérifie que $l(t_1) < l_{eq}$ ce qui est en accord avec l'analyse qualitative.

Commentaires possibles et attendus

- La masse des passagers joue un rôle : des passagers légers (masse M_1 donc masse totale $m + M_1$) donnent un coefficient α_1 supérieur au coefficient α_2 associé à des passagers plus lourds. La longueur des ressorts sera alors plus proche de l_{eq} pour des passagers légers qui décolleront donc plus tôt et plus proche de la position d'équilibre.
- Pour M' fixé, plus les ressorts sont « mous », plus α est petit, plus le décolllement se fait tard et loin de la position d'équilibre. Les « sensations » sont alors moins fortes !

2. L'accélération est maximale au départ car $\ddot{Z}(t) = -\omega_0^2 l_{eq} \cos(\omega_0 t)$ et vaut en norme

$$\omega_0^2 l_{eq} = \frac{k_e l_0}{M'} = g(1 + \alpha) \text{ au départ.}$$

Cette pesanteur apparente est donc de $6g$ lorsque $\alpha = 5$ soit $\frac{M' g}{k_e} = \frac{l_0}{5}$ c'est-à-dire $l_{eq} = 1,2l_0$.

3. Dimensionnement du problème

$l_0 = 20 \text{ m}$; $M = 150 \text{ kg}$; $m = 150 \text{ kg}$

donc $k = \frac{k_e}{2} = 375 \text{ N} \cdot \text{m}$ pour une accélération de $6g$ au départ.

On calcule $\omega_0 = 1,58 \text{ rad/s}$ et $\cos(\omega_0 t_1) = \frac{-1}{6}$ soit $t_1 = 1,1 \text{ s}$

