

CCMP 2007 - 1^{ère} épreuve de PHYSIQUE - Filière PC

- ✕ Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- ✕ Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations vectorielles : Vecteur $\rightarrow \vec{A}$; norme du vecteur $\vec{A} \rightarrow A$ (italique) ou $\|\vec{A}\|$; vecteur unitaire $\rightarrow \hat{a}$. Le vecteur unitaire correspondant à la coordonnée c est noté $\hat{c}$; par exemple $\hat{\theta}$ est le vecteur unitaire correspondant à la coordonnée θ en coordonnées cylindriques.

Dans toute l'épreuve, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique.

CORDE PESANTE ET VIBRANTE

Ce problème comporte sept parties, largement indépendantes.

Rappel d'éléments de cours :

- ✕ Le point O étant quelconque, le centre de masse G d'un système de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 vérifie :

$$(m_1 + m_2) \vec{OG} = m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2$$

- ✕ Le centre de masse G d'un système matériel filiforme dont la masse totale m_T est répartie le long d'une courbe (Γ) selon une densité linéique μ vérifie la relation :

$$m_T \vec{OG} = \int_{(\Gamma)} \mu(P) \vec{OP} d\ell_P$$

, où P est un point courant de (Γ) et $d\ell_P$ la portion élémentaire de (Γ) centrée en P .

- ✕ Le théorème du centre de masse s'applique à (Γ) sous la forme :

$$m_T \vec{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}}$$

, où $\vec{a}(G)$ est l'accélération de G dans un référentiel galiléen et $\vec{F}_{\text{ext}}$ la résultante des forces extérieures.

Dans tout le problème, l'objet de l'étude est une corde (AB) de longueur L , parfaitement flexible (sans raideur) et sans frottements internes, de section négligeable, homogène de masse totale m_T et de densité linéique uniforme μ . On étudiera les mouvements de la corde dans le repère (O, x, y, z) .

1 ÉTUDE CINÉMATIQUE D'UN MOUVEMENT BIDIRECTIONNEL

1.1 Première expérience

La corde (AB) est posée le long de l'axe (Ox) d'une table horizontale (Fig. 1). On soulève l'extrémité B avec une vitesse verticale constante $\vec{V}_0 = v_0 \hat{z}$, la corde se déplaçant dans le plan vertical (O, x, z) , avec le vecteur unitaire $\hat{z}$ orienté vers le haut (Fig. 2). À l'instant t , l'ordonnée de B est donc $z = v_0 t$. On admettra que tous les points de la corde qui sont en contact avec la table sont au repos et on conviendra

que la corde est coudée en angle droit au point C de la corde situé sur la table, à l'aplomb du point B (ce qui revient à négliger la courbure en C).

On note G_1 la position du centre de masse G de la corde tant que cette dernière est en partie sur la table.

□ 1 - Établir que, tant que la corde touche la table, l'ordonnée de son centre de masse G_1 est :

$$z(G_1) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{L}$$

□ 2 - En déduire que la composante verticale de l'accélération $\vec{a}(G_1)$ du centre de masse de la corde est constante et donner son expression en fonction de v_0 et de L .

Lorsque la corde est entièrement verticale en contact avec la table (nouvel instant initial), on abaisse le point B avec la vitesse $-\vec{V}_0$ jusqu'à ce que la corde se retrouve sur l'axe (Ox) de la table. On note G_2 la position du centre de masse G de la corde tant que cette dernière n'est pas complètement sur la table.

□ 3 - Quelle est l'expression de l'accélération instantanée $\vec{a}(G_2)$ du centre de masse G_2 de la corde ?

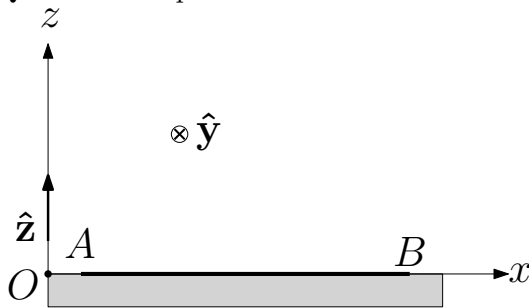


Figure 1 – Corde posée sur la table

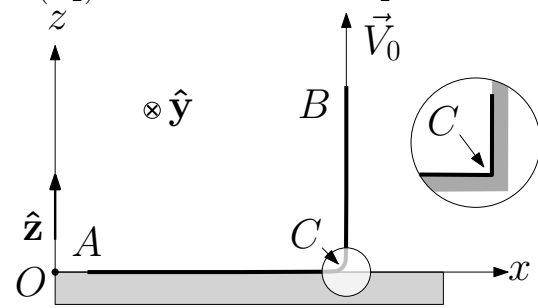


Figure 2 – Corde tirée vers le haut

□ 4 - Justifier sans calcul l'égalité des accélérations $\vec{a}(G_1)$ et $\vec{a}(G_2)$. Quelle est, selon ce modèle, l'accélération en C ?

1.2 Seconde expérience

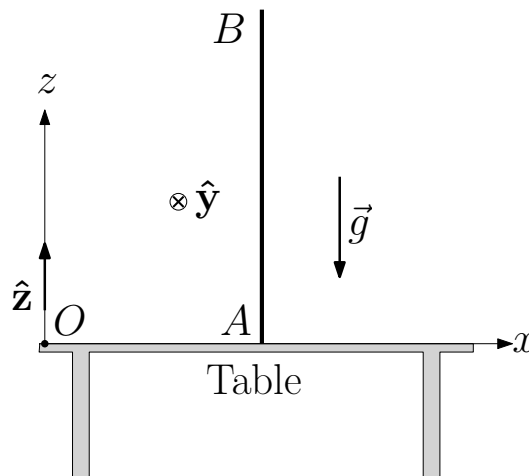


Figure 3 – Chute libre de la corde sur un table

La corde est verticale, en contact avec la table au point A . On la lâche sans vitesse initiale (Fig. 3). On admet que le mouvement de B est uniformément accéléré, d'accélération $\vec{g} = -g\hat{z}$ (accélération de la pesanteur). On admet toujours que les points de la corde sont au repos dès qu'ils touchent la table.

□ 5 - Exprimer le temps de chute τ de la corde en fonction de L et de g . Calculer τ pour $L = 24 \times 10^{-1}$ m et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

□ 6 - Déterminer l'accélération instantanée $\vec{a}(G)$ du centre de masse de la corde en fonction de g , τ et du temps t .

□ 7 - Représenter graphiquement l'évolution temporelle de $a(G)$ pendant la chute. Justifier qualitativement la présence d'un minimum de vitesse, $v_{\min}$ pendant la chute. Exprimer, en fonction de τ , l'instant t_0 où la vitesse du centre de masse passe par $v_{\min}$. Calculer t_0 pour $L = 24 \times 10^{-1}$ m et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. Exprimer $v_{\min}$ en fonction de L et de τ . Calculer $v_{\min}$ avec les valeurs numériques précédentes.

2 ÉTUDE DYNAMIQUE D'UNE CHUTE VERTICALE

La table est ici le plateau d'une balance électronique. On duplique la seconde expérience de la partie 1 : corde verticale, vitesse initiale nulle et mouvement de B uniformément accéléré.



Figure 4 – Chute libre de la corde sur une balance

On appelle « poids apparent » de la corde sur la balance, la force, notée $\vec{P}_a$, dont le module est donné par l'indication de la balance¹.

□ 8 - Justifier que pour l'usage habituel d'une balance - où un objet est posé sur une balance -, le poids apparent est égal au poids de l'objet pesé. Montrer que, pour la seconde expérience, le poids apparent s'exprime à l'instant t par :

$$\vec{P}_a = 3m(t)\vec{g}$$

, où $m(t)$ est la masse de la corde posée sur la balance à l'instant t .

□ 9 - À quel instant t_1 de la chute de la corde la balance indique-t-elle le poids total de la corde ? Comment expliquer l'égalité $t_1 = t_0$ (t_0 a été défini à la question 7) ?

□ 10 - La corde est verticale, en contact en A avec le plateau de la balance. L'expérimentateur retient la corde avec une force $\vec{F}(t)$ telle que la vitesse de B soit constante, égale à v_0 . Montrer que :

$$\vec{F}(t) = -\mu(L - v_0 t)\vec{g}$$

□ 11 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la corde complète, montrer que, pendant toute la chute, le poids apparent de la corde est supérieur au poids réel de la partie de la corde effectivement posée sur le plateau. Exprimer la différence P_0 entre le poids apparent et le poids réel en fonction de μ et de v_0 et montrer qu'elle est constante.

3 CHUTE BIDIRECTIONNELLE DE LA CORDE

La corde (AB) est à présent posée le long de l'axe (Ox) de la table horizontale de la Fig. 1. Cette corde glisse sans frottement sur la table et l'on étudie sa chute dans le champ de pesanteur, d'in-

1. à l'équilibre de la balance, le poids apparent mesuré est donc la force exercée par la corde sur la balance

tensité g . On se place dans le référentiel galiléen lié à la table et on utilise le repère (O, x, z) , avec l'axe (Oz) orienté vers le bas. La Fig. 5 précise quelques données non répétées dans cet énoncé. À l'instant initial, la corde est horizontale sur la table, sa vitesse est notée V_0 . L'extrémité A est en O et l'extrémité B affleure le point C . On pose $\alpha = \sqrt{\frac{g}{L}}$. On note z la longueur de la partie de corde qui a quitté la table (Fig. 5).

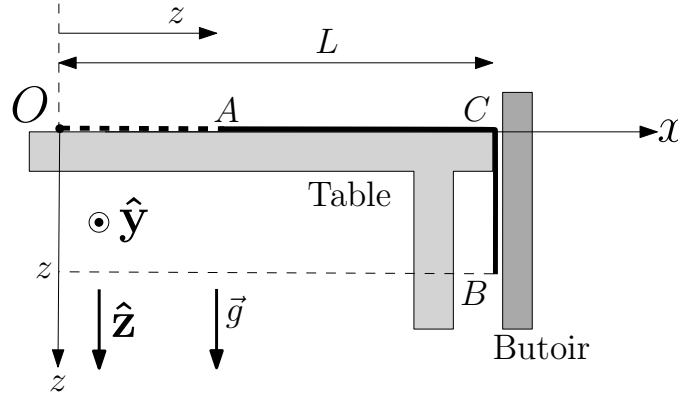


Figure 5 – Chute d'une corde (AB) de longueur L dans le plan vertical (x, z) . La longueur de la partie verticale CB est $z(z > 0)$. La corde occupe initialement le segment OC , avec $OC = L$. Le butoir garantit que le mouvement de la partie CB de la corde est bien vertical.

- 12 - Que vaut, pendant la chute de la corde, l'énergie cinétique E_T de la corde ainsi que son énergie potentielle E_p ? En déduire l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
- 13 - Établir la relation, valable pendant la chute de la partie verticale :

$$z(t) = \frac{V_0}{\alpha} \text{sh}(\alpha t)$$

Comparer cette loi horaire $z(t)$ avec celle qui est obtenue pour un point matériel M de même masse m_T lâché du point C avec la même vitesse initiale V_0 (On pourra utiliser l'annexe).

4 VIBRATIONS DE LA CORDE HORIZONTALE FIXÉE AUX DEUX EXTRÉMITÉS

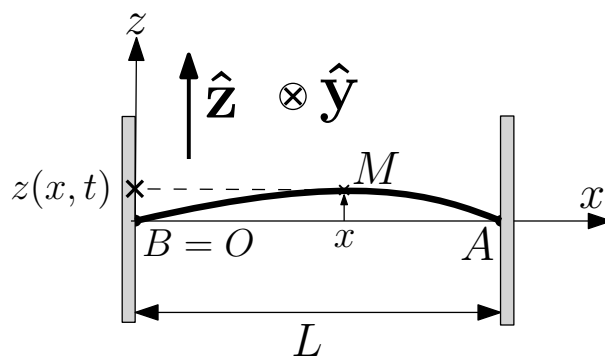


Figure 6 – Vibrations de la corde horizontale fixée à ses deux extrémités

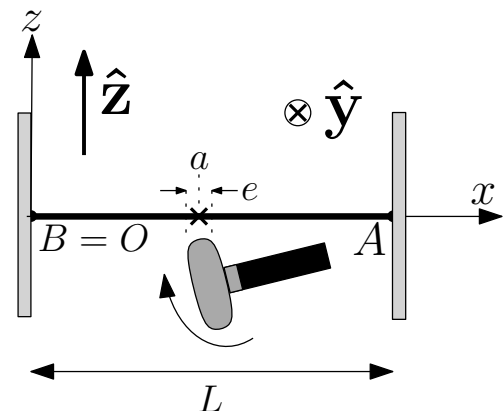


Figure 7 – Corde frappée à $t = 0$

La corde est maintenant horizontale, fixée en ses deux extrémités A et B (Fig. 6).

L'axe des z est orienté vers le haut et l'origine est à l'extrémité B : les points O et B coïncident. L'axe (Ox) est dans un plan horizontal. La tension de la corde au repos a pour norme T . La position d'un point

M de la corde au repos est repérée par sa cote x dans un référentiel galiléen lié à B .

La corde vibre et le point M , de cote x à l'équilibre, se déplace transversalement. Ce déplacement, noté $z(x, t)$, est fonction de z et du temps t .

4.1 Modes propres de vibrations

- 14 - Montrer, avec des hypothèses supplémentaires que l'on précisera, que $z(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert.
- 15 - Déterminer les modes propres de vibration de la corde.
- 16 - Donner la forme générale de $z(x, t)$ pour des conditions initiales quelconques.

4.2 Corde frappée

On se place dans les mêmes hypothèses que précédemment. Initialement, la corde est au repos dans sa situation d'équilibre. A $t = 0$, un marteau de largeur e frappe la corde à l'abscisse $a \gg e$, communiquant aux points de la corde avec lesquels il est en contact au moment du choc une vitesse $u\vec{e}_z$ (à $t = 0^+$). On admettra qu'à $t = 0^+$, la corde reste encore non déformée (Fig. 7).

- 17 - Écrire les conditions initiales $z(x, 0)$ et $\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0)$.

Compte tenu des conditions limites ($z(0, t) = z(L, t) = 0$), on cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_{0n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{nc\pi t}{L} + \phi_n\right)$$

, où c est la célérité de l'onde.

- 18 - Déterminer les constantes ϕ_n .

On suppose que $e \ll L$. Considérons la fonction $V(x)$, de période $2L$, impaire, coïncidant avec $\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0)$ sur l'intervalle $[0, L]$:

$$V(x) = \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0), \text{ pour } x \in [0, L]$$

- 19 - Rappeler l'expression générale du développement en série de Fourier d'une fonction de x impaire $2L$ - périodique.
- 20 - En vous aidant de l'annexe, exprimer les coefficients de Fourier de la fonction $V(x)$. En déduire les expressions des coefficients z_{0n} .
- 21 - Montrer que l'on peut supprimer des harmoniques en choisissant judicieusement un paramètre. Comment supprimer l'harmonique de rang $n = 7$ dissonant ?

5 VIBRATIONS DE LA CORDE HORIZONTALE LIÉE A UNE TABLE D'HARMONIE

L'étude d'une corde dont les deux extrémités sont fixes ne permet pas de décrire rigoureusement un instrument à corde. En effet, la puissance sonore rayonnée par la corde elle-même est trop faible pour être perçue : c'est le couplage de la corde avec la table d'harmonie de l'instrument, au niveau des extrémités de la corde qui permet de produire une puissance sonore importante. Il faut donc tenir compte du mouvement des extrémités de la corde. On se placera dans les mêmes hypothèses que précédemment.

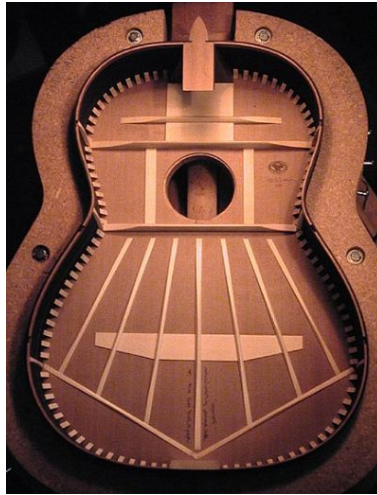


Figure 8 – Table d'harmonie d'une guitare classique

5.1 Première modélisation : liaison élastique avec la table d'harmonie

On considère que la corde est fixée en $x = 0$ à un ressort de raideur k' : le ressort est au repos quand l'extrémité de la corde est à l'élongation $z(0, t) = 0$. On suppose que l'autre extrémité de la corde est immobile : $z(L, t) = 0$ (voir Fig. 9).

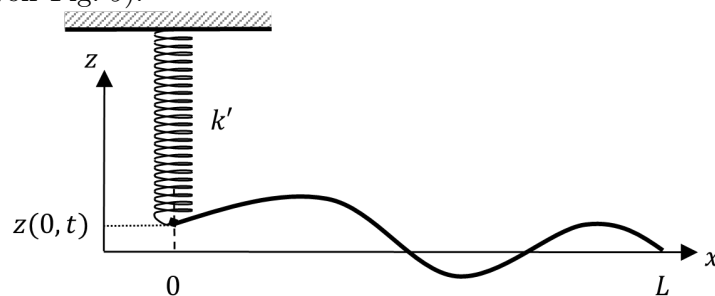


Figure 9 – Liaison élastique de la corde avec la table d'harmonie

On étudie les modes propres de la corde en cherchant les solutions sous la forme :

$$z(x, t) = Z(x) \cdot \cos(\omega t)$$

- 22 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $Z(x)$. On posera : $k = \frac{\omega}{c}$.
- 23 - A l'aide de la condition en $x = L$, exprimer $Z(x)$ en fonction de k , L et x .
- 24 - A l'aide de la condition en $x = 0$, établir une relation entre $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=0}$ et $z(0, t)$.
- 25 - En déduire que k vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète k_n . Établir cette même équation vérifiée par les pulsations propres ω_n .
- 26 - Par une représentation graphique appropriée, comparer ω_n à $n\omega_1$ avec $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité élastique ?

5.2 Deuxième modélisation : liaison massique avec la table d'harmonie

Nous adoptons maintenant un modèle simplifié en considérant que l'extrémité mobile de la corde est liée à une masse M_0 en $x = 0$ (Fig. 10). Cette masse peut se déplacer librement le long de l'axe Oz . On néglige les effets de la pesanteur sur la masse M_0 . Comme précédemment, les solutions de l'équation d'onde sont cherchées sous la forme $z(x, t) = Z(x) \cdot \cos(\omega t)$.

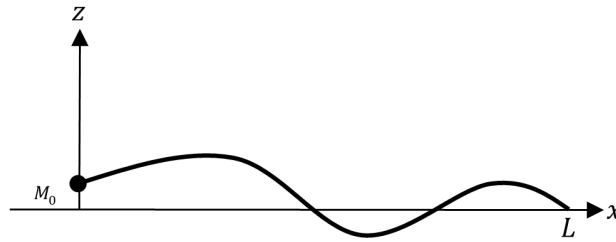


Figure 10 – Liaison massique de la corde avec la table d'harmonie

- 27 - A l'aide de la condition en $x = 0$, établir une nouvelle relation entre $\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=0}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\bigg|_{x=0}$
- 28 - En déduire que k vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète k_n . Établir cette même équation vérifiée par les pulsations propres ω_n .
- 29 - Par une représentation graphique appropriée, comparer ω_n à $n\omega_1$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité massique ?

6 VIBRATIONS DE LA CORDE VERTICALE FIXÉE AUX DEUX EXTRÉMITÉS

La corde est à nouveau verticale, fixée en ses deux extrémités A et B (Fig. 11 et 12).

L'axe des z est maintenant orienté vers le bas et l'origine est maintenant à l'extrémité B : les points O et B coïncident. L'axe (Ox) est dans un plan horizontal. La tension de la corde au point A , $T(A)$ est très grande devant le poids de la corde :

$$T(A) \gg m_T g$$

La position d'un point M de la corde au repos est repérée par sa cote z dans un référentiel galiléen lié à B .

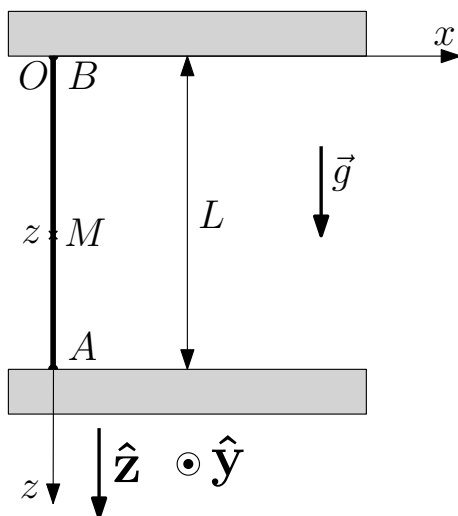


Figure 11 – Corde tendue fixée à ses deux extrémités

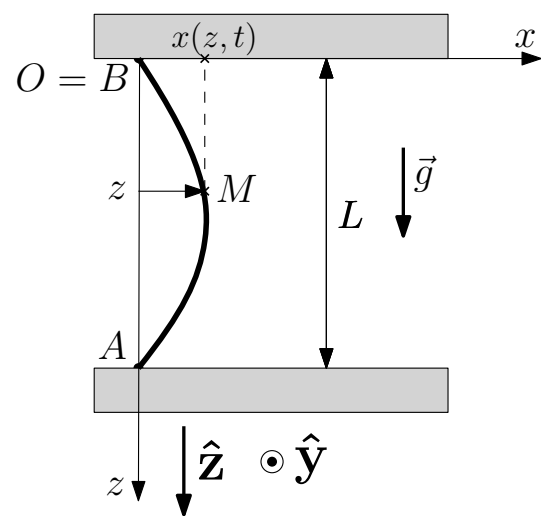


Figure 12 – Vibrations de la corde fixée à ses deux extrémités

6.1 Position d'équilibre

- 30 - Définir ce qu'est la tension $T(M)$ de la corde en un point M . Exprimer $T(M)$ en fonction de $T(A)$, $m_T g$ et $\mu g z$. En déduire qu'à l'équilibre $T(M)$ est pratiquement constante le long de la corde.

6.2 Oscillations libres

□ 31 - La corde vibre et le point M , de cote z à l'équilibre, se déplace transversalement. Ce déplacement, noté $x(z, t)$, est fonction de z et du temps t . Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, déterminer l'équation des ondes suivie par la fonction $x(z, t)$. Exprimer la célérité c des ondes en fonction de $T(A)$ et de la masse linéique μ . Calculer c pour $\mu = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ et $T(A) = 1 \text{ N}$.

□ 32 - À l'instant initial, la forme de la corde est donnée par $x(z, 0) = a \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$, où a est une constante positive. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer la fonction d'onde stationnaire $x(z, t)$ sous la forme $x(z, t) = X(z)A(t)$.

□ 33 - À l'instant initial, la corde est excitée selon deux modes propres :

$$x(z, 0) = a \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) + b \sin\left(4\pi \frac{z}{L}\right),$$

où a et b sont des constantes positives. Les vitesses initiales de tous les points de la corde sont nulles. Déterminer avec le minimum de calculs la nouvelle fonction d'onde $x(z, t)$.

7 VIBRATIONS DE LA CORDE FIXÉE À UNE EXTRÉMITÉ

Désormais, l'extrémité B est fixe, l'extrémité A est libre (Fig. 13 et 14).

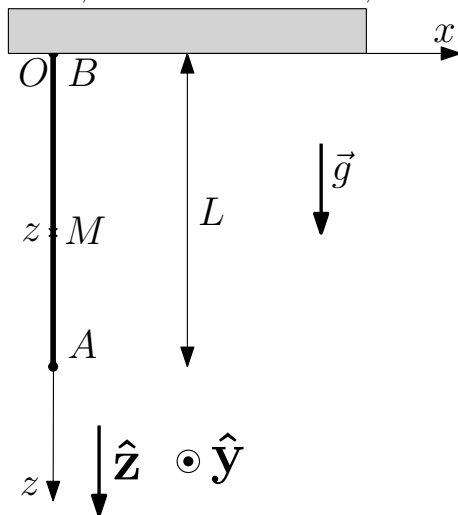


Figure 13 – Corde tendue à une extrémité et libre à l'autre

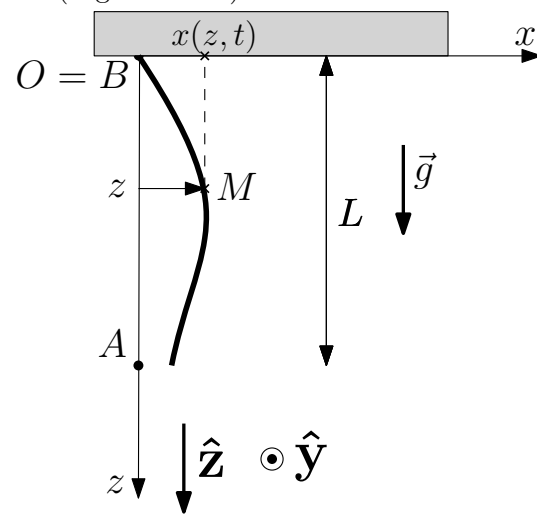


Figure 14 – Vibration de la corde tendue à une extrémité et libre à l'autre

7.1 Position d'équilibre

□ 34 - La corde est en équilibre. Montrer que la tension de la corde au point M est donnée par :

$$T(z) = \mu g(L - z)$$

7.2 Oscillations libres

□ 35 - La corde vibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément dz de corde à la cote z , montrer que la fonction d'onde vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g \frac{\partial x}{\partial z} \quad (1)$$

□ 36 - Que devient l'équation d'onde si l'on tient compte de la force de frottement visqueux :

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = -\alpha \frac{\partial x}{\partial t} \hat{x}$$

agissant sur l'élément de corde dz , $\alpha > 0$ étant la constante de frottement ?

□ 37 - On cherche une solution à l'équation d'onde au voisinage du point de fixation ($z \ll L$). Montrer qu'une onde sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude complexe :

$$\underline{x}(z, t) = \underline{x}_0 \exp[j(\omega t - kz)]$$

, où k est une constante réelle ne peut se propager que pour une certaine valeur α_0 de la constante de frottement, que l'on exprimera en fonction de μ , g et L ($j^2 = -1$). Commenter.

□ 38 - Donner, pour $\alpha = \alpha_0$, les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g de l'onde. Y a-t-il dispersion ?

On néglige maintenant le terme de frottement et on cherche une solution à l'équation (1) dans la région $z \ll L$ sous la forme :

$$\underline{x}(z, t) = \underline{a} \exp[j(\omega t - \underline{k}z)]$$

, avec $\underline{k} = k_1 + jk_2$ complexe (k_1 et k_2 étant réels).

□ 39 - Exprimer k_2 . Commenter.

□ 40 - Exprimer k_1 . Commenter. Tracer l'allure de $k_1(\omega)$. On posera : $\omega_0^2 = \frac{g}{4L}$. En déduire que la corde se comporte comme un filtre passe-haut.

□ 41 - Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Conclure. Que devient un paquet d'onde envoyé en $z = 0$ lorsqu'il se propage le long de la corde ?

□ 42 - Montrer que la puissance mécanique moyenne qui traverse la corde à la cote z dans le sens des z croissants est proportionnelle à la tension $T(z)$ et au carré de l'amplitude du mouvement de la corde. En déduire que l'amplitude du mouvement augmente avec z dans cette portion de la corde.

7.3 Oscillations forcées

Le point B , lié à un vibreur, subit des déplacements transversaux de la forme :

$$x_B(t) = X_0 \cos(\omega t)$$

On cherche les solutions sous forme d'onde stationnaire :

$$x(z, t) = X(z) \cos(\omega t)$$

□ 43 - En négligeant les frottements, établir l'équation différentielle vérifiée par $X(z)$.

On ne se placera pas dans le cas où $z \ll L$

□ 44 - On pose $u = \sqrt{L - z}$ et $F(u) = X(z)$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par F est de la forme :

$$\frac{d^2 F}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dF}{du} + \frac{4}{a} F(u) = 0$$

où a est une constante que l'on précisera.

□ 45 - En vous aidant de l'annexe, déterminer les trois premières fréquences de résonance de la corde en prenant $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $L = 2 \text{ m}$.

ANNEXES

Développement limité

Développement limité de $\sinh(x)$ à l'ordre 6 :

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

Décomposition en série de Fourier

Soit la fonction $f(t)$ représentée Fig. 15. Dans l'hypothèse où $\Delta t \ll t_0$, la décomposition en série de Fourier de $f(t)$ donne :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4a\Delta t}{T} \sin\left(n\frac{2\pi t_0}{T}\right) \sin\left(n\frac{2\pi t}{T}\right)$$

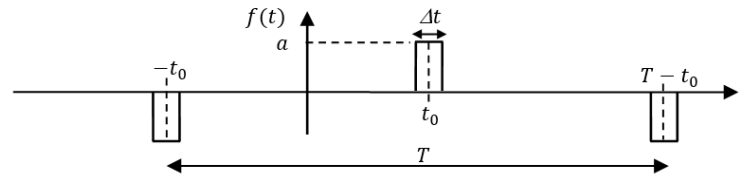


Figure 15 – Fonction $f(t)$, T périodique

Fonctions de Bessel

Soit l'équation différentielle :

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (m^2 x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

Alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de Bessel :

$$y(x) = AJ_\nu(mx) + BY_\nu(mx)$$

J_ν étant les fonction de Bessel de première espèce (définies en zéro) et Y_ν étant les fonctions de Bessel de deuxième espèce (non définies en zéro).

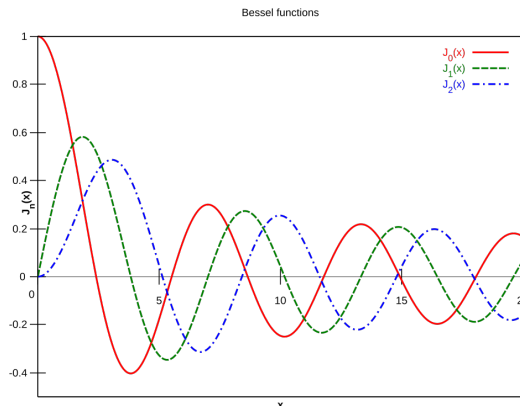


Figure 16

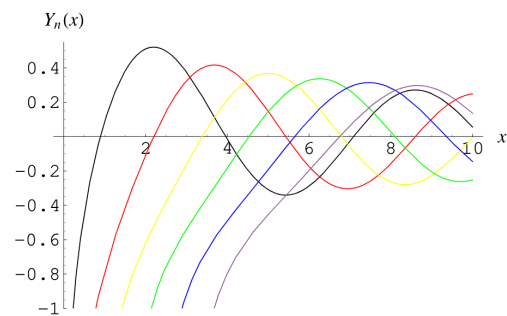


Figure 17

Ordre n	Zéros de $J_n(x)$			Zéros de $Y_n(x)$		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
0	2.404826	5.520078	8.653728	0.893577	3.957679	7.086051
1	3.831706	7.015587	10.173468	2.197142	5.429681	8.596006
2	5.135622	8.417244	11.619841	3.384242	6.793807	10.023477

Table 1 – Premiers zéros positifs ($k=1, 2, 3$) des fonctions de Bessel J_n et Y_n pour $n = 0, 1, 2$

FIN DU PROBLÈME
FIN DE L'ÉPREUVE