

TP13 : Diffraction de Fraunhofer

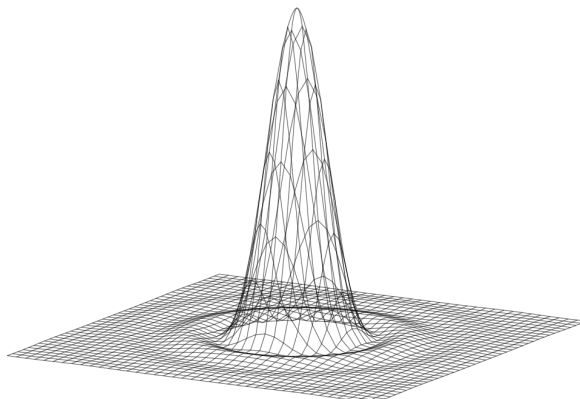


Figure 1 – Figure d’Airy

1 Calculs d’incertitudes

Incertitude sur la mesure de longueur avec un appareil à graduations

1. Mesure d’une position

- ✘ **Concerne** : les règles, les bancs prismatiques, les rapporteurs, les verniers linéaires (vernier Michelson, pied à coulisse, Palmer), les verniers angulaires (Goniomètre), les thermomètres à colonne, tube Pitot...
- ✘ On note x la grandeur repérée et on note q la résolution de l’appareil à graduations, alors ^a :

$$u_x = u_{lec} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

☞ Ne pas oublier l’incertitude d’encadrement, elle est souvent très grande devant cette incertitude.

2. Mesure d’un écart

- ✘ **Concerne** : les mesures de longueurs à l’aide d’une règle, la mesure de longueur sur un banc, mesure d’une longueur à l’aide d’un vernier linéaire (vernier Michelson), mesure d’un écart angulaire sur un vernier angulaire (Goniomètre)...
- ✘ On note X l’écart mesuré, x_1 et x_2 les deux grandeurs repérées correspondantes et on note q la résolution de l’appareil à graduations :

$$X = x_2 - x_1 \Rightarrow u_X = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$$

Avec :

$$u_{x_1} = u_{x_2} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$$

D’où :

$$u_X = \sqrt{2} \times u_{x_1} = \frac{q}{\sqrt{6}}$$

^a. Cette incertitude est une incertitude de lecture, l’incertitude constructeur étant négligée

2 Diffraction de Fraunhofer

Qu'est ce que la diffraction de Fraunhofer ?

- ✗ Pour être dans les conditions de Fraunhofer, il faut que la pupille soit éclairée par une OPPM(+) et il faut étudier la figure de diffraction à l'infini, c'est à dire ne considérer uniquement les OPPM(+) après la pupille.

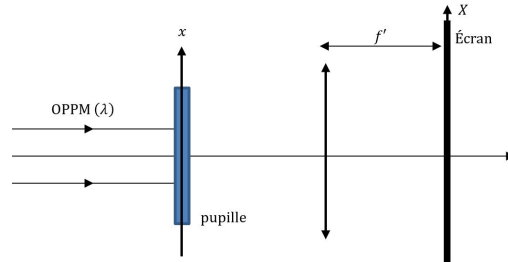


Figure 2 – Montage de base pour la diffraction de Fraunhofer

- ✗ La figure ci-dessous représente la figure de diffraction d'une ouverture carrée, éclairée sous incidence normale, observée à différentes distance de la pupille : la figure de diffraction de Fraunhofer apparaît quand l'écran est suffisamment éloigné. Une fois les conditions de Fraunhofer établies, la figure de diffraction n'est plus modifiée dans sa structure quand on éloigne l'écran : elle augmente uniquement de taille.



Figure 3 – Diffraction par une pupille carrée

- ✗ Si on note $t(x, y)$, la transmittance de la pupille ^a, alors l'éclairement observé sur l'écran ^b est donné par la relation ^c :

$$\frac{I(\sigma_x, \sigma_y)}{I(0, 0)} = \left| \frac{T(\sigma_x, \sigma, y)}{T(0, 0)} \right|^2$$

où :

$$\begin{aligned} T(\sigma_x, \sigma_y) &= TF[t(x, y)] \\ \sin(\theta_x) &= \sigma_x \lambda \\ \sin(\theta_y) &= \sigma_y \lambda \end{aligned}$$

Avec :

$$\tan(\theta_x) = \frac{X}{D} \text{ et } \tan(\theta_y) = \frac{Y}{D}$$

D étant la distance de la pupille à l'écran ^d.

- Les coordonnées (x, y) sont les coordonnées d'un point P de la pupille
- Les coordonnées (X, Y) sont les coordonnées d'un point M de l'écran
- Si l'incidence n'est pas normale, mais fait un angle α avec l'axe optique (dans le plan (Oxz) alors il faut multiplier la transmittance $t(x, y)$ par $\exp(jk \sin \alpha x)$
- Si on utilise une lentille, pour observer à l'infini, alors il suffit de remplacer D par f' dans les formules

Conditions de Fraunhofer

- ✗ On travaille en lumière monochromatique : un laser convient parfaitement.
- ✗ Conditions de Fraunhofer en amont de la pupille : il faut envoyer une OPPM sur la pupille.
 - Un laser (sans objectif de microscope) convient parfaitement : le placer le plus proche possible de la pupille.
 - Un laser avec objectif de microscope convient également : dans ce cas là on peut soit placer la sortie de l'objectif dans le plan focal d'un lentille de grande focale (voir télescope-laser) soit placer l'écran suffisamment loin de la pupille de façon à ce que les rayons lumineux qui arrivent effectivement sur la pupille soient ceux qui sont proches de l'axe.
- ✗ Conditions de Fraunhofer en sortie : il faut que l'écran soit placé suffisamment loin de la pupille ($D \gg \frac{(L^*)^2}{8\lambda}$), où L^* est une distance caractéristique de la pupille. On peut également utiliser une lentille convergente et observer la figure de diffraction dans le plan focal de la lentille.

Étude de la figure de diffraction avec la caméra Caliens

- ✗ Toujours vérifier que la caméra ne sature pas. Si ce n'est pas le cas deux solutions :
 - Mettre l'objectif de microscope afin de diminuer l'intensité et éloigner au maximum la pupille du LASER.
 - Placer devant le laser, deux polariseurs faisant entre eux un angle α que l'on réglera en fonction de l'éclairement désiré (Loi de Malus : $I(\alpha) = I_0 \cos^2 \alpha$).
- ✗ Moyen simple pour vérifier que la pupille est éclairée correctement : la figure de diffraction affichée doit être symétrique (ou du moins doit respecter les symétries de la pupille).
- ✗ Si l'image est bruitée et/ou instable utiliser le filtrage et/ou le moyennage dans les paramètres du logiciel.

3 Diffraction par une fente fine (Avec caméra Caliens)

3.1 Principe de la mesure

Le but ici est de déterminer **la largeur d'une fente fine**. On éclaire la pupille sous incidence **normale** et on regarde la figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer.

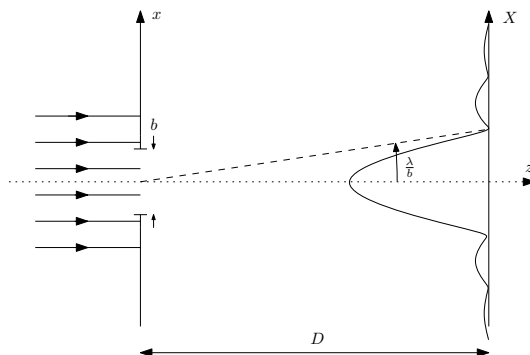


Figure 4 – Diffraction par une fente fine

Données

✘ Transmittance de la pupille : $t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{b}\right)$

✘ Eclairement sur l'écran :

$$I(X) = I(0)\text{sinc}^2\left(\frac{\pi b X}{\lambda D}\right)$$

car : $\sin(\theta_x) \approx \frac{X}{D}$ et $\sin(\theta_x) = \sigma_x \lambda$

Ce qu'il faut connaître

✘ L'angle de θ_x de la demie-largeur de la tache centrale :

$$\theta_x = \frac{\lambda}{b}$$

L'éclairement obtenu est l'éclairement classique dû à une fente fine. La grandeur caractéristique de cet éclairement est la largeur de la frange centrale (distance entre les premières annulations du sinus cardinal) : $\frac{2D\lambda}{b}$.

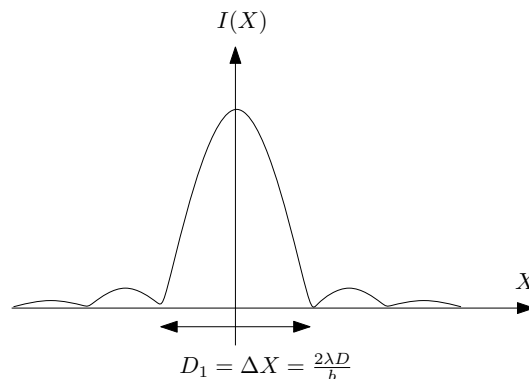


Figure 5 – Grandeur caractéristique de l'éclairement obtenu

3.2 Mesures

✘ on mesure la largeur D_1 du sinus cardinal : $D_1 = \frac{2\lambda D}{b}$ ainsi que la distance D .

✘ Incertitudes sur les mesures de D_1 et D : voir encadré.

✘ Incertitude sur la longueur d'onde : négligée en général.

✘ D'où : $b = \frac{2\lambda D}{D_1}$ et $\frac{u_b}{b} = \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_{D_1}}{D_1}\right)^2}$.

✘ Les conditions de Fraunhofer après la fente sont vérifiées si $D \gg \frac{(a)^2}{8\lambda}$.

3.3 Cas d'une ouverture circulaire

✘ Pour la diffraction par un **trou circulaire** de rayon R , le protocole est le même :

☛ La figure observée sur l'écran est appelée figure d'Airy.

- Elle est constituée d'une tache centrale (tache d'Airy) de rayon angulaire :

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{2R}$$

et d'anneaux (appelés anneaux d'Airy).

- Le diamètre sur l'écran de la tache d'Airy est donc :

$$\Delta X = \frac{2 \times 1.22\lambda D}{2R}$$

- On en déduit le rayon du trou :

$$R = \frac{1.22\lambda D}{\Delta X}$$

- On détermine également son incertitude :

$$\frac{u_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta X}}{\Delta X}\right)^2}$$

- Les conditions de Fraunhofer après la pupille circulaire sont vérifiées si $D \gg \frac{(2R)^2}{8\lambda}$.

3.4 Diffraction par un cheveu : théorème de Babinet

- ✗ Pour la mesure de diffraction par un cheveu, on utilise le théorème de Babinet : la figure de diffraction obtenue avec un cheveu de diamètre b est la même que celle obtenue avec une fente fine de largeur b (sauf en ce qui concerne l'éclairement au niveau de l'image géométrique) :

- On mesure la taille ΔX de la tache centrale de diffraction obtenue sur un écran placé à la distance D du cheveu.
- On en déduit le diamètre du cheveu :

$$\Delta X = \frac{2\lambda D}{b} \Rightarrow b = \frac{2\lambda D}{\Delta X}$$

- On détermine également son incertitude :

$$\frac{u_b}{b} = \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta X}}{\Delta X}\right)^2}$$

3.5 Exemple d'images obtenues en TP

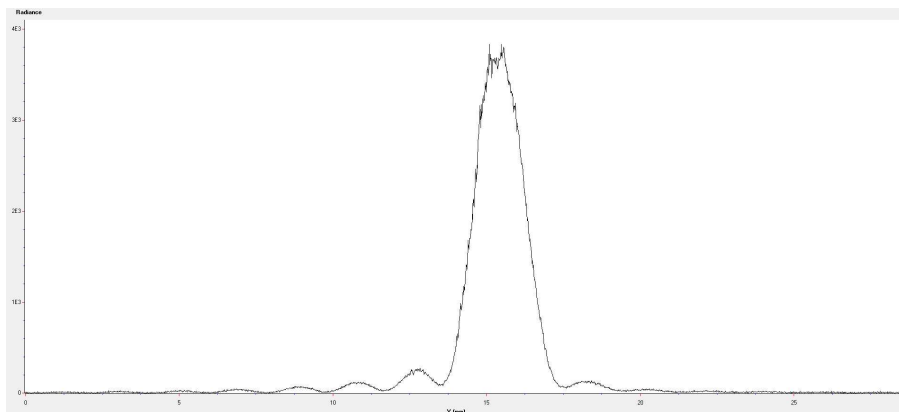


Figure 6 – Exemple de figure obtenue pour une fente fine avec le logiciel CALIENS : la figure manque un peu de symétrie et elle est légèrement bruitée, mais elle autorise la prise de mesure

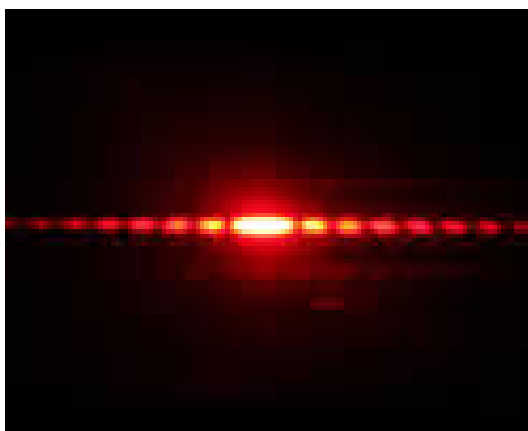


Figure 7 – Diffraction par une fente

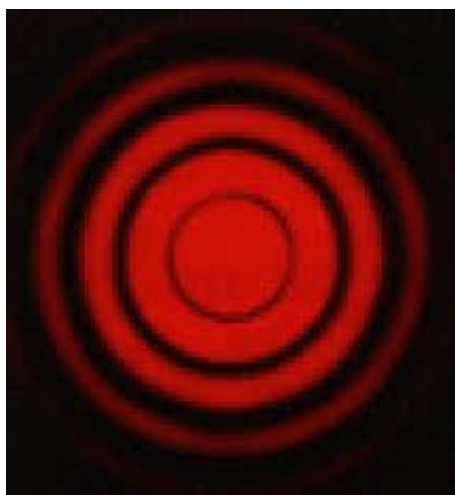


Figure 8 – Diffraction par une ouverture circulaire

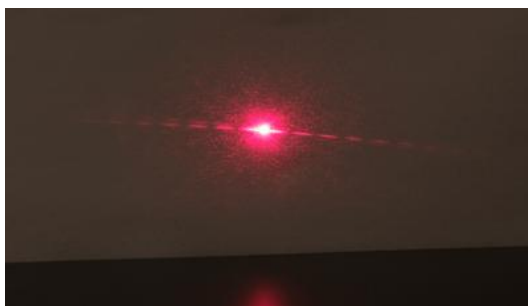


Figure 9 – Diffraction par un cheveu

A faire

- ✘ Choisir une pupille avec une fente fine, un trou circulaire ou un cheveu.
- ✘ Obtenir la figure de diffraction avec la caméra Caliens dans les conditions de Fraunhofer.
- ✘ Déterminer b (ou R), faire un calcul d'incertitude.

4 Diffraction par des fentes de Young (Avec Caméra Caliens)

4.1 Principe

Le but ici est de déterminer **la distance entre les fentes ainsi que la largeur d'une fente**. On éclaire la pupille sous incidence **normale** et on regarde la figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer .

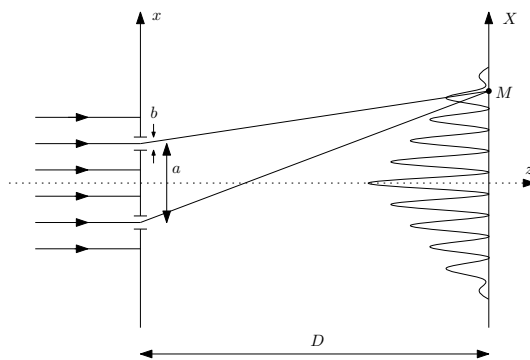


Figure 10 – Diffraction par une fente fine

Ce qu'il faut connaître

L'éclairement obtenu est l'éclairement classique dû à des fentes de Young. Les grandeurs caractéristiques de cet éclairement sont :

- ✗ La formule de Fresnel :

$$I(x) = 2I_0(1 + \cos \phi)$$

Avec :

$$\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

Ici I_0 dépend de x à cause de la largeur des fentes

- ✗ L'interfrange (ou la période du cosinus) : $i = \frac{\lambda D}{a}$.
- ✗ La largeur de la frange centrale (distance entre les premières annulations du sinus cardinal) : $\frac{2D\lambda}{b}$.

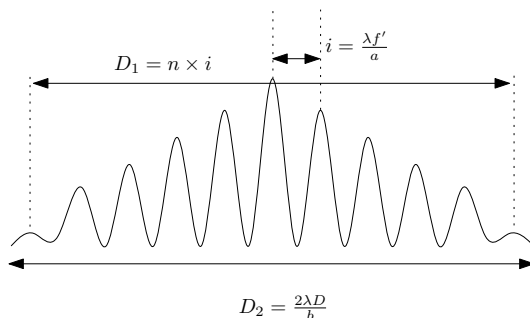


Figure 11 – Les deux grandeurs caractéristiques de l'éclairement obtenu

Données

✘ Transmittance de la pupille : $t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{b}\right) \otimes \left(\delta\left(x - \frac{a}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{a}{2}\right)\right)$

✘ Éclairement sur l'écran :

$$I(X) = 2I(0)\text{sinc}^2\left(\frac{\pi bX}{\lambda D}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi aX}{\lambda D}\right)\right)$$

4.2 Mesures

✘ On mesure les distances suivantes :

• La distance D_1 entre n interfranges : $D_1 = ni = \frac{8\lambda D}{a}$

• La largeur D_2 du sinus cardinal : $D_2 = \frac{2\lambda D}{b}$.

✘ Incertitudes sur les mesures de D_1 , D_2 et D : voir encadré.

✘ Incertitude sur la longueur d'onde : négligée en général.

✘ D'où :

• $a = \frac{n\lambda D}{D_1}$ et $\frac{u_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_{D_1}}{D_1}\right)^2}$.

• $b = \frac{2\lambda D}{D_2}$ et $\frac{u_b}{b} = \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_{D_2}}{D_2}\right)^2}$.

4.3 Cas des trous de Young

✘ Le dispositif des trous de Young comprend deux ouvertures circulaires, distantes de a , de rayon R .

✘ Sachant que la figure d'interférences est maintenant modulée par une figure d'Airy, on doit donc mesurer l'interfrange et la diamètre de la tache d'Airy pour remonter aux valeurs de a et R .

4.4 Exemple de figures de diffraction obtenues en TP

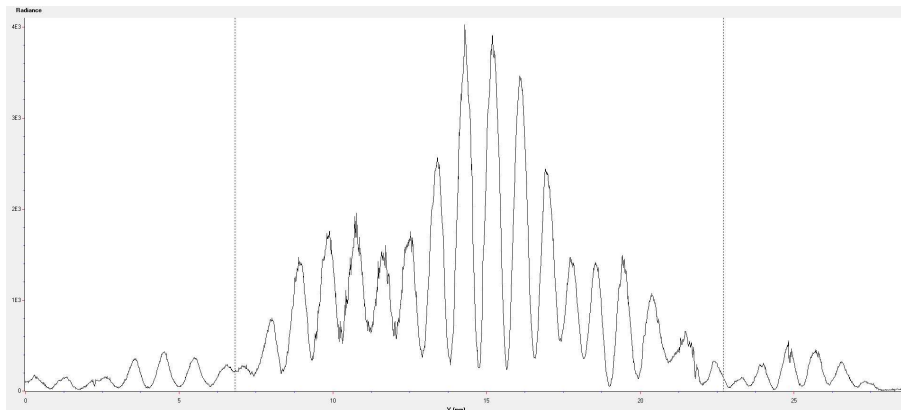


Figure 12 – Exemple de figure obtenue pour des fentes de Young avec le logiciel CALIENS : la figure manque de symétrie et elle est légèrement bruitée, mais surtout le sinus cardinal n'en n'est pas un... On distingue par contre assez clairement l'interfrange et les bords du sinus cardinal pour pouvoir faire des mesures

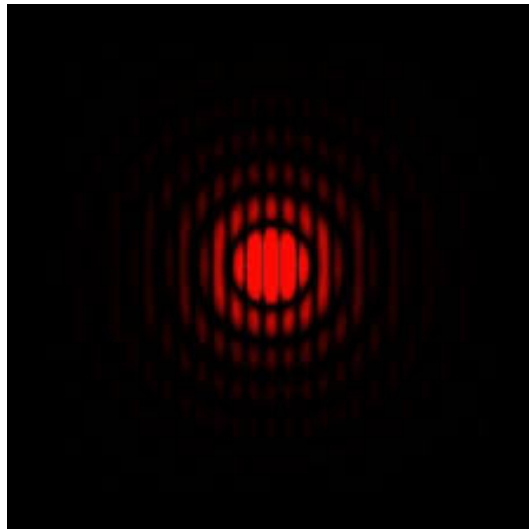


Figure 13 – Diffraction par des trous de young

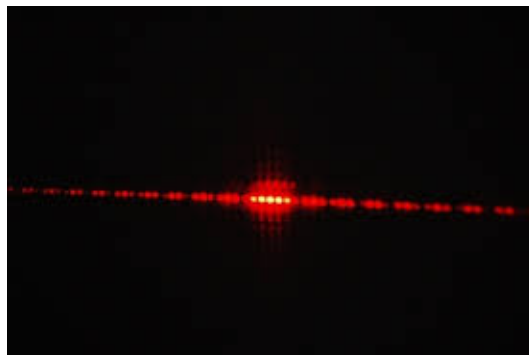


Figure 14 – Diffraction par des fentes de Young

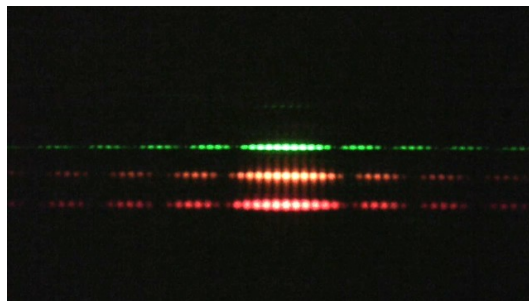


Figure 15 – Variation de la figure de diffraction en fonction de λ

A faire

- Choisir une pupille avec des fentes de Young ou des trous de Young.
- Obtenir la figure de diffraction avec la caméra Caliens dans les conditions de Fraunhofer.
- Déterminer a et b (ou a et R), faire un calcul d'incertitude.

5 Diffraction par un réseau de fentes

5.1 Principe

Le but ici est de déterminer le **pas du réseau**. On éclaire le réseau sous incidence **normale** et on regarde la figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer :

- ✘ Soit on place l'écran dans le plan focal d'un lentille convergente.
- ✘ Soit on place l'écran, à une distance D suffisamment grande pour pouvoir considérer que l'onde après la pupille est une onde plane $\left(D \gg \frac{a^2}{8\lambda}\right)$.

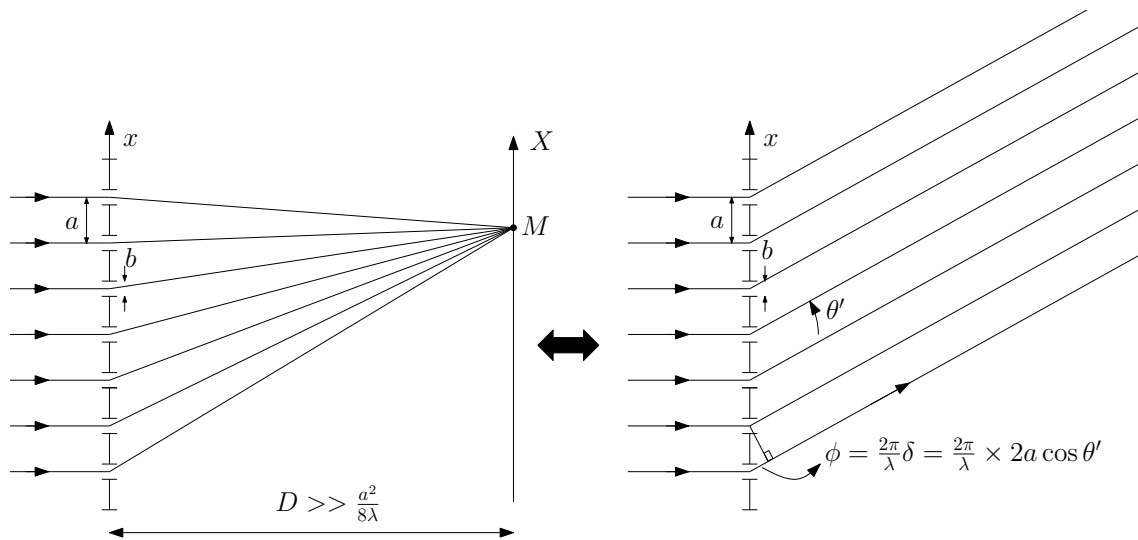


Figure 16 – Diffraction par un réseau de fentes

Attention : en général des angles ne sont pas petits devant 1!! On utilisera donc $\sin \theta' = \sigma \lambda$ mais pas $\sin \theta' \approx \theta' \approx \frac{X}{D}$.

Ce qu'il faut connaître

- ✘ La différence de marche entre deux rayons successifs pour un réseau éclairé sous incidence θ quelconque :

$$\delta = a(\sin \theta' - \sin \theta)$$

p est l'ordre du réseau.

- ✘ Position des maxima de diffraction pour un réseau éclairé sous incidence quelconque :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \Rightarrow \sin \theta' - \sin \theta = \frac{p}{\lambda}$$

- ✘ Influence de la largeur des fentes : L'amplitude des pics principaux est modulée par la fonction sinus cardinal provenant de la diffraction par une pupille de largeur b . La première annulation du sinus cardinal est pour :

$$\sin \theta'_b = \frac{\lambda}{b}$$

Données

- ✘ Soit $N = \frac{L}{a} + 1 = 2N' + 1$ le nombre total de traits du réseau, sa transmittance s'écrit alors :

$$t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{b}\right) \otimes \sum_{k=-N'}^{k=N'} \delta(x - ka)$$

- ✘ L'éclairement sur l'écran vaut donc :

$$I(\theta') = \frac{I(0)}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin \theta'}{\lambda}\right) \times \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi a \sin \theta'}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin \theta'}{\lambda}\right)}$$

Avec $\sin \theta' \approx \tan \theta' \approx \theta' \approx \frac{X}{D}$

- ✘ La figure de diffraction présente des pics principaux pour $\sigma_k = \frac{k}{a}$ et donc $\sin \theta'_k = \frac{k\lambda}{a}$.
On rappelle que l'on trouve ce résultat par différentes approches ^a :

- Soit on raisonne avec la fonction réseau $f(\phi) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$, en considérant

que les maxima principaux sont obtenus lorsque $\sin \phi/2 = 0 \Rightarrow \phi = 2k\pi$ avec $\phi = 2\pi a \sigma$.

- Soit on détermine directement le déphasage entre deux rayons lumineux successifs : $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta')$ et on considère que sur les maxima principaux, les rayons lumineux qui interfèrent sont en phase : $\phi = 2\pi k$. Ce qui nous donne bien $\sin \theta'_k = \frac{k\lambda}{a}$.

^a. Voir OP3

5.2 Mesures : méthode 1

- ✘ On mesure la position des différents ordres X_k (voir figure 17).

- ✘ Connaissant la distance D , on en déduit $\sin \theta_k = \frac{X_k}{\sqrt{D^2 + X_k^2}}$.

- ✘ Sachant que $\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{a}$, on trace $\sin \theta_k$ en fonction de k (voir figure 18) : on obtient une droite de pente $p = \frac{\lambda}{a}$.

- ✘ Connaissant la longueur d'onde, on en déduit $a = \frac{\lambda}{p}$.

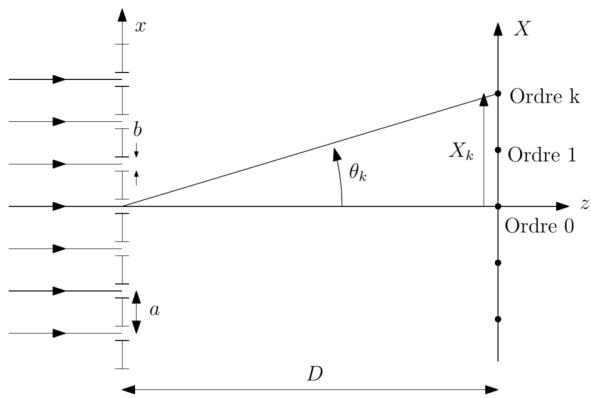


Figure 17 – Mesures

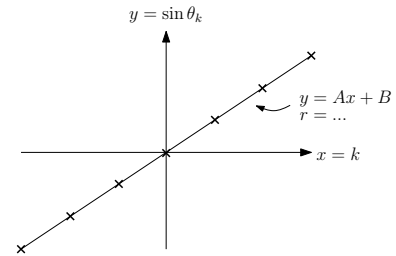


Figure 18 – Résultat régression linéaire

k	X_k	θ_k	$\sin \theta_k$
...

- ✘ L'incertitude sur la pente peut être obtenue grâce au logiciel de régression linéaire qui propose un calcul d'incertitude d'origine statistique. En effet, le résultat de la régression linéaire sera de la forme :

$$y = Ax + B \text{ avec } y = \sin \theta_k ; x = k ; A = p = \frac{\lambda}{a}$$

L'incertitude type $u_A = u_p$ sur A étant donnée.

- ✘ En négligeant l'incertitude sur la longueur d'onde, on obtient $u_a = \frac{\lambda}{p^2} u_p$.

5.3 Mesure : méthode 2

- ✘ On mesure la position des différents ordres X_k (voir figure 17).

- ✘ Sachant que $\sin \theta_k = \frac{X_k}{\sqrt{X_k^2 + D^2}} = \left(\frac{k\lambda}{a}\right)$, on en déduit la relation directe entre a et X_k :

$$a = \frac{k\lambda}{X_k} \sqrt{D^2 + X_k^2}$$

- ✘ On effectue le calcul de a pour les différents ordres qui apparaissent (N_0) : on obtient un ensemble de N_0 valeurs de a (notées a_k). On peut alors déterminer :

- ☛ La valeur de a égale à la moyenne des valeurs mesurées :

$$a = \frac{\sum_{\text{ordre } k} a_k}{N_0}$$

- ☛ L'incertitude type sur a en faisant un calcul d'incertitude de type A :

$$u_a = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sqrt{\frac{1}{N_0 - 1} \sum_{\text{ordre } k} (a - a_k)^2}$$

5.4 Mesure : méthode 3

- ✘ On mesure la position des différents ordres X_k (voir figure 17).

- ✘ Sachant que $\sin \theta_k = \frac{X_k}{\sqrt{X_k^2 + D^2}} = \left(\frac{k\lambda}{a}\right)$, on en déduit la relation directe entre a et X_k :

$$a = \frac{k\lambda}{X_k} \sqrt{D^2 + X_k^2}$$

- ✘ Pour le calcul de l'incertitude type sur a :
- ☛ On estime les incertitudes types sur D et X_k .
 - ☛ On calcule l'incertitude type de a par la méthode différentielle :

$$2 \log a = 2 \log k + 2 \log \lambda - 2 \log X_k + \log (X_k^2 + D^2)$$

$$2 \frac{da}{a} = 0 + 0 - 2 \frac{dX_k}{X_k} + \frac{2DdD + 2X_k dX_k}{X_k^2 + D^2}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{-2D^2}{X_k^2 + D^2} \frac{dX_k}{X_k} + \frac{2D^2}{X_k^2 + D^2} \frac{dD}{D}$$

$$\frac{u_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{-2D^2}{X_k^2 + D^2} \frac{u_{X_k}}{X_k}\right)^2 + \left(\frac{2D^2}{X_k^2 + D^2} \frac{u_D}{D}\right)^2}$$

- ✘ Notons enfin que l'on peut déterminer l'ordre de grandeur de b en comptant le nombre de pics principaux : Pour N_0 pics principaux présents (ordre maximal $k_{max} = \frac{N_0 - 1}{2}$), on aura :

$$\sin \theta_{k_{max}} = \frac{N_0 - 1}{2} \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{b} \Rightarrow b = \frac{2a}{N_0 - 1}$$

- ✘ Pour une détermination précise de b , il faut utiliser une caméra Caliens.
- ✘ Exemple de figure de diffraction obtenue en TP :

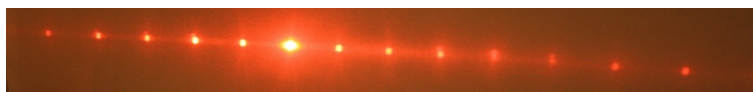


Figure 19 – Diffraction par un réseau

A faire

- ✘ Obtenir la figure de diffraction par un réseau, dans les conditions de Fraunhofer, soit par projection sur un mur, soit par projection sur un écran.
- ✘ Déterminer a , faire un calcul d'incertitude.

6 Diffraction par un réseau sinusoidal

Le but ici est de déterminer le pas du réseau sinusoidal, i.e. la période du cosinus intervenant dans la transmittance de la pupille (p). On éclaire la pupille sous incidence **normale** et on regarde la figure de diffraction dans les conditions de Fraunhofer .

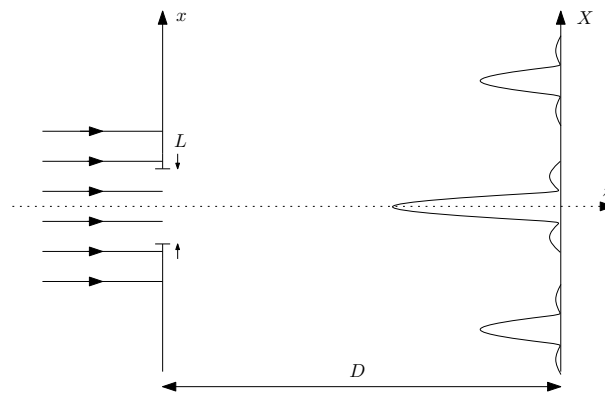


Figure 20 – Diffraction par un réseau sinusoidal de largeur L

Sachant qu'ici, on n'observe que les ordres +1 et -1, on pourra considérer les angles comme petits devant 1.

Données

- ✘ La transmittance de la pupille est :

$$t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{L}\right) \left(1 + m \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right)\right)$$

Avec $m < 1$.

- ✘ Pour la transformée de Fourier de la transmittance :

$$T(\sigma) = L \text{sinc}(\pi L \sigma) \otimes \left(\delta(\sigma) + \frac{m}{2} \delta(\sigma - 1/p) + \frac{m}{2} \delta(\sigma + 1/p)\right)$$

$$\Rightarrow T(\sigma) = L \left[\text{sinc}(\pi L \sigma) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left(\pi L \left(\sigma - \frac{1}{p}\right)\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left(\pi L \left(\sigma + \frac{1}{p}\right)\right) \right]$$

- ✘ Pour $T(0)$: $T(0) = L(1 + m \text{sinc}(\pi L/p))$.
- ✘ Pour l'éclairement, sachant que les trois pics sont très éloignés les uns des autres, et, sachant que $\sigma = \frac{\theta}{\lambda} = \frac{X}{\lambda D}$:

$$I(X) = \frac{I(0)}{\left(1 + m \text{sinc}\left(\frac{\pi L}{p}\right)\right)^2} \left[\text{sinc}^2\left(X \frac{\pi L X}{\lambda f'}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\pi L \left(\frac{X}{\lambda D} - \frac{1}{p}\right)\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\pi L \left(\frac{X}{\lambda D} + \frac{1}{p}\right)\right) \right]$$

L'éclairement obtenu est représenté figure 21. On obtient 3 pics de diffraction dont deux ayant une position dépendant de la longueur d'onde : les ordres 1 et -1 sont dispersifs.

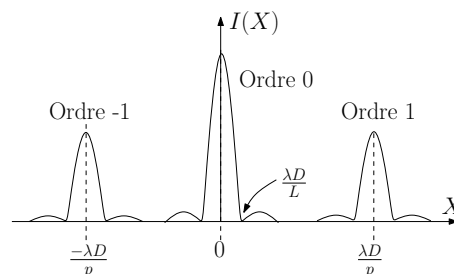


Figure 21 – allure de l'éclairement d'un réseau sinusoidal

✘ Mesures :

- ☛ On mesure les positions X_1 et X_{-1} des pics d'ordres 1 et -1.
- ☛ On en déduit deux mesures pour p :

$$p_{-1} = \frac{-\lambda D}{X_{-1}} \text{ et } p_1 = \frac{-\lambda D}{X_1}$$

- ☛ La valeur mesurée pour p est donc :

$$p = \frac{p_1 + p_{-1}}{2}$$

- ☛ L'incertitude sur p est donc :

$$u_p^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{p_1 - p_{-1}}{2} \right)^2$$

- ☛ Ordre de grandeur : pour les réseaux sinusoidaux "OVIO" $p = 200 \text{ mm}^{-1}$.

✘ Exemple de figure de diffraction obtenue en TP



Figure 22 – Diffraction par une mire sinusoidale

A faire

- ✘ Obtenir la figure de diffraction par un réseau sinusoidal, dans les conditions de Fraunhofer, soit par projection sur un mur, soit par projection sur un écran.
- ✘ Déterminer p , faire un calcul d'incertitude.

7 Diffraction par un régle

Le but de la manipulation est de déterminer le pas $p = \frac{1}{a}$ du régle. Ce pas p est connu il vaut 1 trait par mm ou 1/2 trait par mm : il est donc très faible par rapport aux réseaux de fentes utilisés en optique (la distance a entre deux traits étant elle très élevée devant les longueurs d'ondes utilisées).

Cette particularité du régle impose le protocole suivant : Le régle doit être éclairé sous incidence rasante comme indiqué figure 23 afin d'éclairer un maximum de traits. Dans toute la suite on considère les angles non orientés.

Le protocole est le suivant :

- ✘ Eclairer un mur (ou un écran) situé assez loin (conditions de Fraunhofer).
- ✘ Repérer la tache sur le mur formée par le LASER : ce sera pour la suite l'origine du repère (Ox).
- ✘ Placer le régle sur le chemin du LASER et l'éclairer de la manière la plus rasante possible : sur le mur apparaissent clairement les différents ordres de diffraction.

- ✘ Repérer l'ordre 0 correspondant à l'ordre de plus lumineux : on note x_0 son abscisse.
- ✘ Repérer ensuite les différents ordres et noter leurs abscisses également.

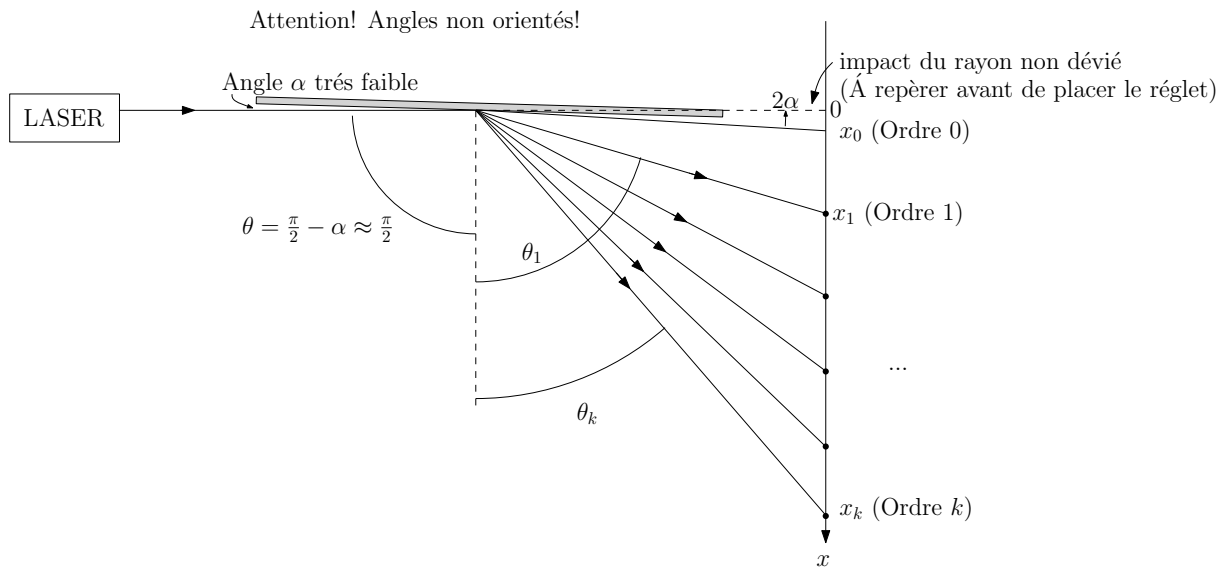


Figure 23 – Mesure du pas d'un réglet

- ✘ La formule des réseaux appliquée au réglet donne :

$$\sin \theta_k - \sin \theta = \frac{k\lambda}{a}$$

- ✘ Sachant que :

$$\begin{cases} \pi = 2\theta + 2\alpha \\ \tan 2\alpha = \tan(\pi - 2\theta) = \frac{x_0}{D} \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_k + \alpha\right) = \tan(\pi - \theta - \theta_k) = \frac{x_k}{D} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \tan(2\theta) = -\frac{x_0}{D} \\ \tan(\theta + \theta_k) = -\frac{x_k}{D} \end{cases}$$

Soit, en considérant que $\theta \approx \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \tan(\theta_k) = \frac{D}{x_k} \Rightarrow \sin \theta_k = \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + D^2}} \\ \sin \theta_k - 1 = \frac{k\lambda}{a} \Rightarrow a = \frac{k\lambda}{\sin \theta_k - 1} \end{cases}$$

- ✘ Mesures (méthode 1) :

- ☛ On mesure x_k et D .
- ☛ On en déduit $\sin \theta_k$.
- ☛ On effectue une régression linéaire en traçant $y = \sin \theta_k$ en fonction de $x = k$. On obtient une droite de pente $p = \frac{\lambda}{a}$. Le logiciel de régression nous donne également u_p .
- ☛ On en déduit $a = \frac{\lambda}{p}$ et $u_a = \frac{\lambda}{p^2} u_p$.

✘ Mesures (méthode 2) :

☛ On mesure x_k et D .

☛ On en déduit $a = \frac{k\lambda}{\sin \theta_k - 1}$.

☛ On effectue le calcul de a pour les différents ordres qui apparaissent (N_0) : on obtient un ensemble de N_0 valeurs de a (notées a_k). On peut alors déterminer :

✓ La valeur de a égale à la moyenne des valeurs mesurées :

$$a = \frac{\sum_{\text{ordre } k} a_k}{N_0}$$

✓ L'incertitude type sur a en faisant un calcul d'incertitude de type A :

$$u_a = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sqrt{\frac{1}{N_0 - 1} \sum_{\text{ordre } k} (a - a_k)^2}$$

✘ Mesures (méthode 3) :

☛ On mesure x_k et D .

☛ On en déduit $a = \frac{k\lambda}{\sin \theta_k - 1} = \frac{k\lambda \sqrt{x_k^2 + D^2}}{x_k^2 - \sqrt{x_k^2 + D^2}}$.

☛ Pour le calcul de l'incertitude type sur a :

✓ On estime les incertitudes types sur D et X_k .

✓ On calcule l'incertitude type de a par la méthode différentielle :

$$\log a = \log k + \log \lambda - \frac{1}{2} \log (x_k^2 + D^2) - \log \left(x_k - \sqrt{x_k^2 + D^2} \right)$$

$$\frac{da}{a} = \frac{x_k dx_k + D dD}{x_k^2 + D^2} - \frac{d \left(x_k - \sqrt{x_k^2 + D^2} \right)}{\left(x_k - \sqrt{x_k^2 + D^2} \right)}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{x_k dx_k + D dD}{x_k^2 + D^2} - \frac{\left(dx_k - \frac{1}{2} \frac{2x_k dx_k + 2D dD}{\sqrt{x_k^2 + D^2}} \right)}{\left(x_k - \sqrt{x_k^2 + D^2} \right)}$$

Soit, après calculs et en regroupant les termes en dx_k et dD :

$$\frac{da}{a} = \frac{x_k + \sqrt{x_k^2 + D^2}}{x_k^2 + D^2} dx_k + \frac{D x_k}{(x_k^2 + D^2) (x_k - \sqrt{x_k^2 + D^2})} dD$$

D'où :

$$\frac{u_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{x_k + \sqrt{x_k^2 + D^2}}{x_k^2 + D^2} u_{x_k} \right)^2 + \left(\frac{D x_k}{(x_k^2 + D^2) (x_k - \sqrt{x_k^2 + D^2})} u_D \right)^2}$$

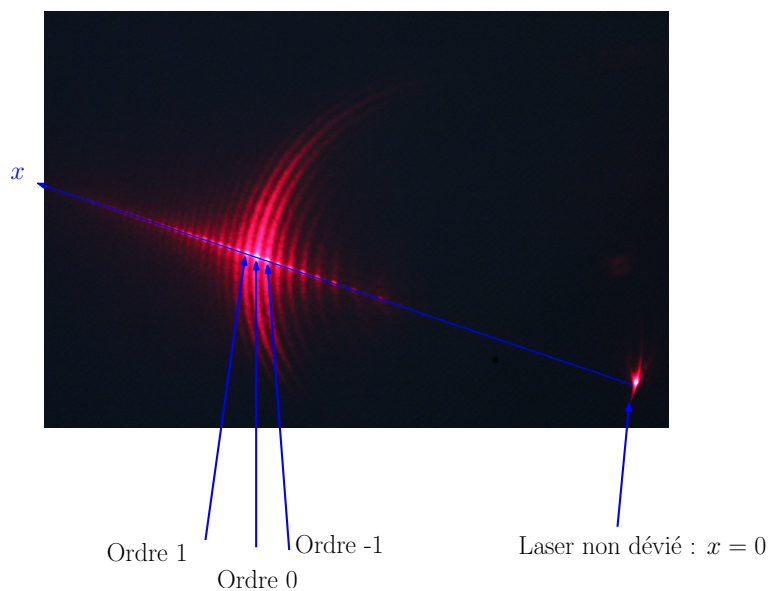


Figure 24 – Exemple de figure de diffraction obtenue avec un réglet éclairé sous incidence rasante

A faire

- ✗ Obtenir la figure de diffraction par un réglet, dans les conditions de Fraunhofer, par projection sur un mur.
- ✗ Déterminer a , faire un calcul d'incertitude.

8 Diffraction par un CD

Le but de la manipulation est de mesurer le pas d'un CD et de remonter à sa capacité de stockage. Pour cela on utilise le CD comme réseau de diffraction par réflexion comme indiqué figure 25.

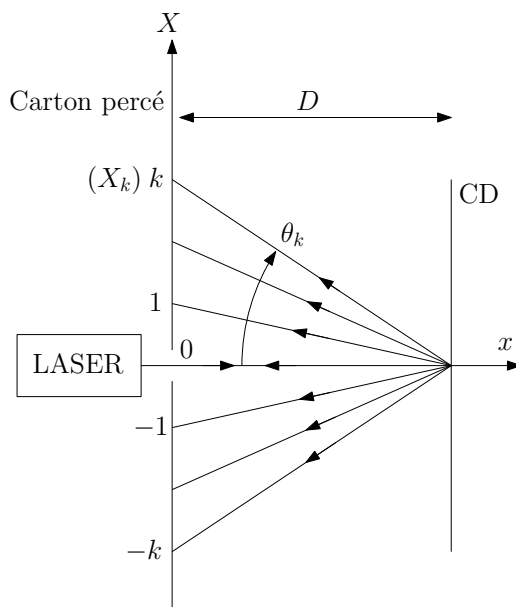


Figure 25 – Mesure du pas d'un CD

✘ La formule des réseaux appliquée au CD, éclairé sous incidence normale donne :

$$\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{a}$$

a étant la distance entre deux traits.

✘ On veillera à se placer dans les conditions de Fraunhofer.

✘ Mesures (Méthode 1) :

☛ On mesure X_k , on en déduit $\sin \theta_k = \frac{X_k}{\sqrt{X_k^2 + D^2}}$.

☛ On trace $y = \sin \theta_k$ en fonction de k : on obtient une droite de pente $p = \frac{\lambda}{a}$. Le logiciel de régression linéaire donne aussi u_p .

☛ On en déduit : $a = \frac{\lambda}{p}$ et $u_a = \frac{\lambda}{p^2} u_p$.

☛ Ordre de grandeur $a \approx 1.5 \mu\text{m}$.

✘ Mesures (Méthode 2) :

☛ On mesure X_k , on en déduit $\sin \theta_k = \frac{X_k}{\sqrt{X_k^2 + D^2}}$.

☛ On en déduit $a = \frac{k\lambda}{\sin \theta_k} = \frac{k\lambda \sqrt{X_k^2 + D^2}}{X_k}$

☛ On effectue le calcul de a pour les différents ordres qui apparaissent (N_0) : on obtient un ensemble de N_0 valeurs de a (notées a_k). On peut alors déterminer :

✓ La valeur de a égale à la moyenne des valeurs mesurées :

$$a = \frac{\sum_{\text{ordre } k} a_k}{N_0}$$

✓ L'incertitude type sur a en faisant un calcul d'incertitude de type A :

$$u_a = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sqrt{\frac{1}{N_0 - 1} \sum_{\text{ordre } k} (a - a_k)^2}$$

✘ Mesures (Méthode 3) :

☛ On mesure X_k , on en déduit $\sin \theta_k = \frac{X_k}{\sqrt{X_k^2 + D^2}}$.

☛ On en déduit $a = \frac{k\lambda}{\sin \theta_k} = \frac{k\lambda \sqrt{X_k^2 + D^2}}{X_k}$

☛ Pour le calcul de l'incertitude type sur a :

✓ On estime les incertitudes types sur D et X_k .

✓ On calcule l'incertitude type de a par la méthode différentielle :

$$2 \log a = 2 \log k + 2 \log \lambda - 2 \log X_k + \log (X_k^2 + D^2)$$

$$2 \frac{da}{a} = 0 + 0 - 2 \frac{dX_k}{X_k} + \frac{2DdD + 2X_k dX_k}{X_k^2 + D^2}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{-2D^2}{X_k^2 + D^2} \frac{dX_k}{X_k} + \frac{2D^2}{X_k^2 + D^2} \frac{dD}{D}$$

$$\frac{u_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{-2D^2}{X_k^2 + D^2} \frac{u_{X_k}}{X_k} \right)^2 + \left(\frac{2D^2}{X_k^2 + D^2} \frac{u_D}{D} \right)^2}$$

✘ **Capacité du CD** : On mesure les rayons extrêmes du CD : $R_1 = 2.2$ cm et $R_2 = 5.8$ cm.

La surface de stockage du CD est $s = \pi (R_2^2 - R_1^2) \approx 9.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

En considérant qu'une donnée est stockée sur une surface a^2 , le CD peut stocker $N = \frac{S}{a^2} = 4 \times 10^9 =$

$$\frac{4 \times 10^9}{8} = 500 \text{ Mo.}$$

A faire

- ✘ Obtenir la figure de diffraction par un CD, dans les conditions de Fraunhofer, soit par projection sur un mur, soit par projection sur un écran.
- ✘ Déterminer a , faire un calcul d'incertitude.