

Composition de Physique – C – (U)

(durée : 6 heures)

Transport électronique à l'échelle mésoscopique

I Mesure des fluctuations du courant électrique

- Q1. Une source de courant idéale a une résistance interne parallèle infinie.
Un A.O. idéal a des courants d'entrée i_{p+} et i_{p-} nuls ainsi qu'une tension de décalage en sortie nulle.
- Q2. La rétroaction sur l'entrée inverseuse assure a priori le régime linéaire sauf dépassement en sortie de la tension de saturation.
- Q3. En écrivant avec le théorème de Millman :

$$v_- = 0 = \frac{s/Z_2 + e/Z_1}{1/Z_2 + 1/Z_1}$$

Avec : $H(j\omega) = -Z_2/Z_1$, on obtient la fonction de transfert proposée avec :

$$g = -R_2/R_1, \omega_{c,i} = 1/R_i C_i.$$

Le filtre est un passe bande du second ordre en regardant le comportement aux limites.

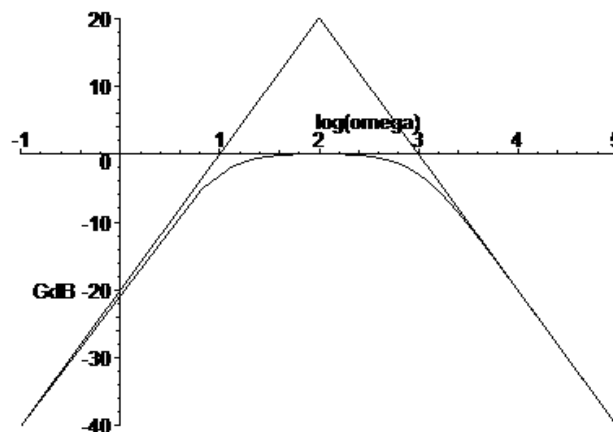
Q4. $\frac{\omega_{c,1}}{\omega_{c,2}} = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} = |g| \frac{C_2}{C_1} \ll 1$

- Q5. En développant la fonction de transfert et en négligeant le terme de la question précédente il vient :

$$H(j\omega) \cong \frac{g}{1 - j\left(\frac{\omega_{c,1}}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_{c,2}}\right)} = \frac{H_{max}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

dont le gain maximum est $H_{max} = |g|$ pour $\omega_0 = (\omega_{c,1}\omega_{c,2})^{1/2}$.

- Q6. Pentas de $\pm 20\text{dB/décade}$;
La courbe est tracée pour $g = 1$, $\omega_{c,1} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_{c,2} = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$ ($\omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$).



- Q7. Avec une loi des nœuds ou le théorème de Millman :

$$e = \frac{I + \delta i}{\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_1}}$$

et converti pour la composante harmonique à la pulsation ω :

$$\underline{e}(\omega) = R(\underline{I}(\omega) + \underline{\delta i}(\omega)) \frac{1 + jR_1 C_1 \omega}{1 + jC_1(R + R_1)\omega}$$

Q8. I est un courant continu : $\underline{I}(0) = I$ et $\underline{I}(\omega_n) = 0 \forall n \neq 0$.

Q9. La valeur moyenne nulle de $\delta i(t) = 0$ implique $\underline{i}_{n=0} = \langle \delta i \rangle = 0$.

Q10. Pour $n = 0$ on obtient $\underline{e}_0 = RI$ et pour $n \neq 0$:

$$\underline{e}_n = R \frac{1 + jR_1 C_1 \omega_n}{1 + jC_1(R + R_1)\omega_n} \underline{i}_n$$

Q11. Avec $R_1 \gg R$, l'expression précédente devient : $\underline{e}_n = R \underline{i}_n \forall n$.

Q12. $\underline{s}_n = \underline{H}(j\omega_n) \times \underline{e}_n = R \underline{H}(j\omega_n) \times \underline{i}_n$
Pour $n = 0$: $\underline{s}_0 = 0$ car $\underline{H}(0) = 0$

Q13. $\overline{s(t)} = s_0 = 0$

$$\Delta s^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (s - \overline{s})^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\underline{s}_n|^2$$

Q14. La somme est paire en n et on enlève $n = 0$:

$$\Delta s^2 = (gR)^2 \frac{S_{ii}}{2T} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega_{c1} T}{2\pi n}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{2\pi n}{\omega_{c2} T}\right)^2\right)}$$

Puis avec le formulaire :

$$\Delta s^2 = (gR)^2 \frac{S_{ii}}{T} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega_{c2} T}{2\pi} - \frac{\omega_{c1} T}{2\pi} \right) = (gR)^2 S_{ii} \Delta f$$

Q15. S_{ii} s'exprime en A^2s .

La B.P. arbitrairement grande donnera une mesure de la variance arbitrairement grande, ce qui n'est pas réaliste ne serait-ce que par la saturation de l'A.O. Les puissances mises en jeu seraient aussi arbitrairement grandes, ce qui est irréaliste.

Q16. C'est la modélisation de bruit blanc qu'il faut remettre en cause, il faudrait utiliser une densité spectrale de bruit analogue à un profil de densité spectrale (éventuellement carré pour simplifier) $S_{ii}(\omega)$ centré sur une fréquence ω_0 .

Q17. $\Delta s^2 = p I$ avec $p = (8 - 2)10^{-8} / (70 - 15)10^{-6} = 1.1 \cdot 10^{-3} V^2 A^{-1}$,
 $F = \frac{p}{(gR)^2 \Delta f 2e} = 0.45$

Q18. Sans capacité C_1 le filtre devient un passe bas de pulsation de coupure ω_{c2} et de gain $H(0) = g$.

Alors le courant I continu à l'entrée donnerait $e_0 = RI$ et $s_0 = ge_0 = gRI = 13 V$ par exemple avec $I = 40 \mu A$ (milieu de la plage expérimentale), donc saturation de l'A.O. en sortie.

II Modèle de Drude

Q19. L'électron qui n'a subi aucune collision à t n'en subit pas entre t et $t + dt$:

$$P(t + dt) = P(t) \times \left(1 - \frac{dt}{\tau_e}\right)$$

$$dP = - \frac{P dt}{\tau_e}$$

Q20. Avec $P(0) = 1$, $P(t) = e^{-t/\tau}$.

Q21. $dP/dt = -\rho(t)$ pour la définition de $\rho(t)$ et $dP/dt = -e^{-t/\tau}/\tau$ d'après la question précédente.

Mesure du temps de relaxation τ_e

Q22. Avec la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{V}_n = \vec{V}_n(0) - \frac{e\vec{E}}{m_e}t$$

Q23. $\langle \vec{V}_n \rangle = \int_0^{+\infty} \vec{V}_n(t) \rho(t) dt = \vec{V}_n(0) \times 1 - \frac{eE}{m_e} \int_0^{\infty} t \frac{e^{-t/\tau_e}}{\tau_e} dt = \vec{V}_n(0) - \frac{eE}{m_e} \tau_e$

Pour les N électrons, il faut considérer la moyenne :

$$\langle \vec{V}_n(0) \rangle_N = \mathbf{0}, \text{ et } \langle \vec{V} \rangle = -e\tau_e/m_e \vec{E}$$

Q24. On définit le vecteur $\vec{j}_e = n_e(-e) \langle \vec{V} \rangle = (e^2 n_e \tau_e / m_e) \vec{E}$, soit $\sigma = e^2 n_e \tau_e / m_e$.

Q25. $R = L/(\sigma S) = L m_e / e^2 n_e \tau_e S$.

Q26. $n_e = 1 \times \mu N_A / M = 5.90 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

Q27. $\tau_e = 6.95 \cdot 10^{-16} \text{ s}$.

Nature des collisions et libre parcours moyen

Q28. Trajectoire de mouvement brownien avec des vitesses initiales croissantes et des accélérations constantes donc des segments paraboliques d'axe $\vec{E}$ de plus en plus longs.

Q29. $\langle V_{n+1}^2 \rangle = \langle (V_n(0) - (eE/m_e)t)^2 \rangle$
 $= \langle V_n(0)^2 \rangle + (e^2 E^2 / m_e^2) \langle t^2 \rangle - 2 \langle V_n(0) \bullet eE t / m_e \rangle$
 $= \langle V_n^2 \rangle + (e^2 E^2 / m_e^2) 2 \tau_e^2 + 0.$

En utilisant le formulaire pour le calcul de $\langle t^2 \rangle$, la projection de $\vec{V}_n(0)$ sur $\vec{E}$ est nulle en moyenne.

Q30. $N(x) = x / (\tau_e |\langle \vec{V} \rangle|)$; $|\langle \vec{V} \rangle|$ représente le mouvement de dérive dans la direction x .

Q31. A chaque choc l'énergie est conservée :
 $\langle V_{N(x)}^2 \rangle = \langle V_0^2 \rangle + N(x) 2(e^2 E^2 \tau_e^2 / m_e^2)$, et $\langle \vec{V} \rangle = \mathbf{0}$
 donc $u(x) = (2x(e^2 U^2 / L^2 m_e^2) (\tau_e / |\langle \vec{V} \rangle|))^{1/2}$.

Avec l'égalité : $\frac{1}{2} m_e u^2(x) = 3k_B T_e(x) / 2$ on obtient : $T_e(x) = 2eUx / 3k_B L$.

Q32. $\Delta T_e = 2eU / 3k_B = 77.3 \text{ K}$.

Valeur trop importante car en considérant le réseau il devrait y avoir des échanges négligés en postulant la conservation de l' E_c des électrons au cours du choc ce qui aboutit à des électrons découplés du solide à $T_i = 0.3 \text{ K}$.

Q33. $u = (3k_B T_0 / m_e)^{1/2} = 3.64 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$.

$$|\langle \vec{V} \rangle| = e\tau_e / m_e |\vec{E}| = e\tau_e U / m_e L = 1.34 \text{ ms}^{-1},$$

L'agitation thermique est prépondérante même à cette température très basse.

Q34. Le libre parcours moyen est la distance parcourue par un électron en moyenne entre deux chocs, cette distance est parcourue à la vitesse de norme moyenne u pendant un intervalle de temps moyen τ_e .

Q35. $l_e = 2.53 \cdot 10^{-12}$.

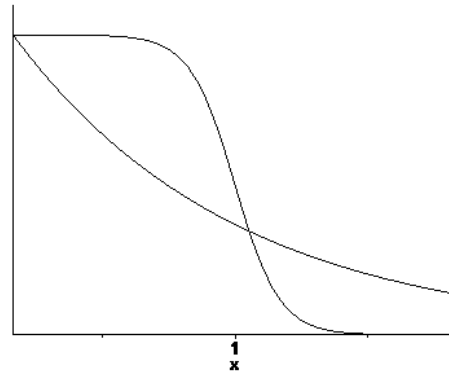
Pour que les raisonnements statistiques soient valables il faut que l_e soit très inférieure aux dimensions transverses du fil, c'est correct de ce point de vue mais elle est aussi très inférieure à la dimension atomique cela pose problème en physique classique.

Q36. Dans l'hypothèse (H1), la source cède son énergie aux électrons qui « chauffent » de plus en plus ! Dans l'hypothèse (H2), la source cède son énergie au thermostat qui maintient T_0 .

Distribution de Fermi-Dirac

Q37. Voir les représentations classiques

$$f_{MB} \approx \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \quad \text{et} \quad f_{FD} \approx \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x - x_F}{a}\right)}$$



Q38. Lorsque $T_e \rightarrow 0$, la distribution f_{MB} tend vers pic de Dirac en $x = v^2 = 0$ (toutes les particules immobiles), alors que f_{FD} tend vers un signal crête de valeur uniforme $\frac{2}{n_e} \left(\frac{m_e}{h}\right)^3$ pour tout $x = v^2 < x_F = v_F^2$ et de valeur nulle pour toute vitesse supérieure à v_F .

Dans la distribution de Boltzmann tous les électrons auraient le même état de vitesse nulle et le principe d'exclusion de Pauli l'interdit, les électrons sont des fermions.

Q39. Lorsque $T_e \rightarrow 0$, on écrit que la normalisation de la distribution f_{MD} : $d^3v = 4\pi v^2 dv$ et

$$1 = \int f_{FD} 4\pi v^2 dv = 4\pi \int_0^{v_F} \left(\frac{2}{n_e} \left(\frac{m_e}{h}\right)^3\right) v^2 dv$$

et on aboutit au résultat de l'énoncé.

Q40. L'application numérique donne $v_F = 1.39 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$ et avec $v_F = u$ ce qui majore u , $l_e = v_F \tau_e = 9.66 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Cette valeur est toujours bien inférieure aux dimensions du fil mais un peu supérieure aux dimensions atomiques ce qui est plus réaliste, le traitement quantique s'impose.

III Modèle des canaux élémentaires de conduction

Résistance d'un canal de conduction

Q41. $\tau = h/eU$

Q42. Pendant le temps T il arrive $N = T/\tau$ électrons, il en passe une proportion D donc/
 $\langle n \rangle = DT/\tau = DTeU/h$.

Q43. $I = \langle n \rangle e/T = De^2 U/h$ soit une résistance associée $R(D) = U/I = h/De^2$.

Q44. $R_K = h/e^2 = 2.59 \cdot 10^4 \Omega$.

Q45. Avec une transmission $D = 1$, les électrons ne « sentent » plus le diffuseur, il ne devrait plus y avoir de résistance on devrait obtenir $R_K = 0$.

Q46. En comptant les passages successifs à travers le plan diffuseur de tous les électrons avec un nombre croissant d'allers-retours :

$$D_{12} = D_1 D_2 [1 + (1 - D_2)(1 - D_1) + (1 - D_2)^2(1 - D_1)^2 + (1 - D_2)^3(1 - D_1)^3 + \dots + (1 - D_2)^n(1 - D_1)^n + \dots],$$

La série géométrique converge :

$$D_{12} = \frac{D_1 D_2}{1 - (1 - D_1)(1 - D_2)} = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2 - D_1 D_2}$$

, ce qui est le résultat proposé.

Q47. Pour une association en série, on doit avoir :

$$R_d(D_{12}) = R_d(D_1) + R_d(D_2) \text{ ou } r(D_{12}) = r(D_1) + r(D_2)$$

Or à partir de la relation (4) on constate l'identité :

$$\left(\frac{1}{D_{12}} - 1\right) = \left(\frac{1}{D_1} - 1\right) + \left(\frac{1}{D_2} - 1\right)$$

, donc la fonction $r(D) = 1/D - 1$ satisfait la relation d'association des résistance en série et permet d'avoir $r(1) = 0$ comme attendu à la question Q.45.

Q48. $R(D) = R_d(D) + 2 R_c$ soit $R_c = h/2e^2 = R_K/2$.

Q49. Par récurrence on a $1/D_{12} = 2/D - 1$,

on pose $1/D_{1n} = n/D - (n - 1)$ alors par la relation (4) :

$$1/D_{1n+1} = 1/D_{1n} + 1/D - 1 = (n + 1)/D - n$$

Donc :

$$\frac{1}{D_{1M}} = \frac{M}{D} - (M - 1) \quad \text{ou} \quad D_{1M} = \frac{D}{M(1 - D) + D}$$

Q50. $M = L\lambda$, alors en remplaçant :

$$D(L) = \frac{1}{\lambda L \left(\frac{1}{D} - 1\right) + 1} = \frac{1}{L/l_0 + 1} \cong \frac{l_0}{L}$$

si $l_0 = D/(1 - D)\lambda \ll L$.

Q51. On identifie :

$$R(D(L)) = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau_e} \frac{L}{s_0} = R_K \left(\frac{1 - D(L)}{D(L)}\right) = \frac{h}{e^2} \frac{1 - l_0/L}{l_0/L} \cong \frac{h}{e^2} \frac{L}{l_0}$$

A.N. $s_0 = 3.3 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$.

Q52. Le nombre de canaux $N_{canaux} = s / s_0 = 80 \cdot 10^3$ environ.

Q53. $M = L\lambda = 3.32 \cdot 10^3$

Q54. D'après la question Q50. $D = l_e \lambda / (1 + l_e \lambda) = 0.78$.

Fluctuations de courant au sein d'un canal de conduction

Q55. On doit choisir n électrons dans N électrons, le nombre de configurations est donné dans le formulaire : $\binom{N}{n}$

Q56. On multiplie la probabilité de transmission pour les n électrons, par la probabilité de réflexion pour les $N - n$ et par le nombre de complexions :

$$P_T(n) = D^n (1 - D)^{N-n} \binom{N}{n}$$

Q57. $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$

Alors : $\langle n \rangle = \sum_{n=0}^N n D^n (1-D)^{N-n} \binom{N}{n} = DN$, par le formulaire (et par définition de D aussi),
 $\langle n^2 \rangle = \sum n^2 \dots = DN(DN + (1-D))$ par le formulaire,
 On combine et :

$$\langle \Delta n^2 \rangle = DN(1-D)$$

Q58. A partir de $I = ne/T$, $\langle I \rangle = \langle n \rangle e/T = DNe/T$; $I^2 = n^2 e^2/T^2$ et $\langle I^2 \rangle = \langle n^2 \rangle e^2/T^2$ donc :

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \frac{e^2}{T^2} \langle \Delta n^2 \rangle = \frac{e^2}{T^2} DN(1-D) = \langle I \rangle \frac{e}{T} (1-D)$$

Q59. $S_{ii} = 2 \langle I \rangle e(1-D)$ et $F = (1-D) = 0.22$.

Il manque un facteur 2 par rapport à la valeur expérimentale de Q.17.

Q60. Association en série de M générateurs de Norton : $\Delta I(L) = \Sigma \Delta I_n / M$ et $R(L) = M R(D)$.

Q61.

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_n \Delta I_n^2 \rangle &= M \langle \Delta I_n^2 \rangle + 2 \Sigma_n \Sigma_m \langle \Delta I_n I_m \rangle = M \langle \Delta I_n^2 \rangle \\ \langle \Sigma_n \Delta I_n \rangle &= M \langle \Delta I_n \rangle = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle \Delta I^2(L) \rangle = \frac{1}{M^2} \times M \langle \Delta I_n^2 \rangle = \frac{\langle \Delta I_n^2 \rangle}{M} = \frac{S_{ii} \Delta f}{M}$$

On garde pour chaque dipôle élémentaire :

$$\langle \Delta I_n^2 \rangle = \langle \Delta I^2 \rangle = \langle I \rangle \frac{e}{T} (1-D)$$

et pour la distance L le facteur de Fano est simplement divisé par M :

$$F(L) = (1-D)/M = (1 - l_0/L)/\lambda_0 L.$$

Q62. Dans une association en // le courant moyen total est le produit par N_{canaux} du courant de Norton moyen précédent ce qui intervient au numérateur et au dénominateur du facteur de Fano.

Q63. $F(L) = 6.6 \cdot 10^{-5}$, bien trop petit par rapport à la valeur expérimentale de la question Q17.

IV Conduction thermique dans un fil mésoscopique

Loi de Wiedemann-Franz

Q64. Il faut noter que la fonction f proposée ici est une distribution de Fermi-Dirac à une dimension. La parité de la fonction f traduit l'isotropie des vitesses dans les deux directions $+x$ et $-x$. (La figure 8 peut induire en erreur.)

Q65. Comptage classique de particules passant à travers une surface donnée dans un temps donné :

$$\delta N^+(v) = n_e f(v, T_e(x_e - l_e/2)) sv \delta t dv$$

$$\text{et } \delta N^-(v) = n_e f(v, T_e(x_e + l_e/2)) sv \delta t dv.$$

Q66. $\delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 [\delta N^+(v) - \delta N^-(v)]$

$$\begin{aligned}
 \text{Q67. } \delta\phi_{th} &= \frac{1}{s} \frac{\delta E_c}{\delta t} = \frac{1}{2} m_e n_e v^3 [f(v, T_e(x - l_e/2)) - f(v, T_e(x + l_e/2))] dv \\
 &= \frac{1}{2} m_e n_e v^3 \left(\frac{\partial f}{\partial T_e} \right) [T_e(x - l_e/2) - T_e(x + l_e/2)] dv \\
 &= \frac{1}{2} m_e n_e v^3 \left(\frac{\partial f}{\partial T_e} \right) \left[- \left(\frac{dT_e}{dx} \right) l_e \right] dv = - \frac{1}{2} m_e n_e l_e \left(\frac{dT_e}{dx} \right) \left(\frac{\partial f v^3}{\partial T_e} \right) dv
 \end{aligned}$$

Q68. Sous la forme précédente l'intégration sur toutes les vitesses donne la forme proposée dans l'énoncé avec $A = -\frac{1}{2} m_e n_e l_e$.

Q69. Le flux surfacique de chaleur ou le vecteur densité de courant thermique sont la même chose ; on utilise le résultat du formulaire :

$$j_q = \varphi_{th} = - \frac{1}{2} \frac{m_e n_e l_e}{v_F} \frac{\partial}{\partial T_e} \left[\frac{v_F^4}{4} + \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k T_e(x)}{m_e} \right)^2 \right] \left(\frac{dT_e}{dx} \right) = - \frac{m_e n_e l_e \pi^2}{v_F} \left(\frac{k}{m_e} \right)^2 T_e(x) \left(\frac{dT_e}{dx} \right)$$

Cette expression est de la forme de la loi de Fourier avec une conductivité κ qui dépend de T_e (ce qui n'est pas prévu par la loi de Fourier !).

Q70. Le simple rapport de la valeur de κ précédente divisé par σ donne bien la forme de $\mathcal{L}$ proposée, on peut noter la valeur de $\mathcal{L} = 2.45 \cdot 10^{-8}$ SI.

Conduction thermique au sein du fil mésoscopique – Fluctuations de courant

Q71. $dP_J = \sigma E^2 s dx$ et avec $E = U/L$, $dP_J = \sigma (U^2/L^2) s dx$.

Q72. En régime permanent, et pendant dt :

$$CdT_e = 0 = [-\phi_{th}(x + dx) + \phi_{th}(x)] s dt + dP_J dt$$

Soit :

$$0 = \sigma L \left[T_e(x + dx) \left(\frac{dT_e}{dx} \right)_{x+dx} - T_e(x) \left(\frac{dT_e}{dx} \right)_x \right] s + \sigma \frac{U^2}{L^2} s dx$$

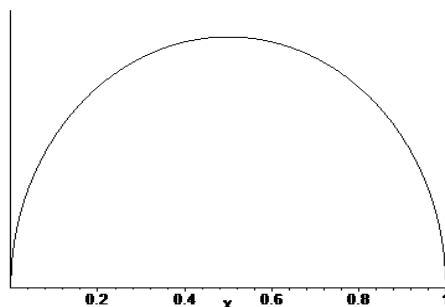
(Attention à L et L !).

Ou encore l'équation différentielle :

$$L \left[\frac{d}{dx} \left(T_e \frac{dT_e}{dx} \right) \right] + \frac{U^2}{L^2} = 0$$

Q73. Après intégration :

$$T_e^2(x) = T_0^2 - \frac{U^2}{L} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right)$$



Q74. La figure est une forme de cloche symétrique par rapport à $X = x / L = \frac{1}{2}$.

Q75. $T_M = \sqrt{T_0^2 + \frac{U^2}{4L}}$, vu la faible valeur de L on trouve $T_M = 32$ K. Ce qui n'est pas réaliste.

Q76. $P_{sub\ max} = \alpha T_M^4 L = 2.86 \cdot 10^{-9}$ W. (α est un coefficient linéique !)

Q77. Si $P_{sub\ max} \ll P_{J\ totale} = RP^2 = U^2/R$, on pourra négliger ce terme.

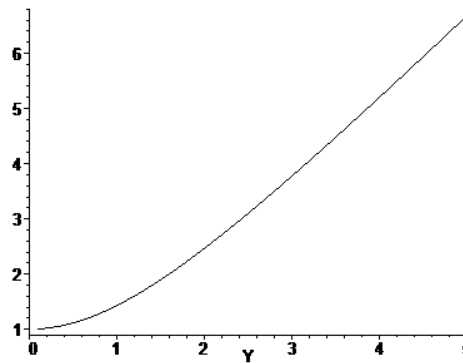
Ici ce sera pour $U \gg 9.7 \cdot 10^{-4}$ V, soit des intensité $I \gg U/R = 2.95 \cdot 10^{-6}$ A,
or celles-ci étaient de l'ordre de $40 \cdot 10^{-6}$ A dans la partie I, c'est donc possible.

Q78.

$$S_{ii} = \frac{4kT_0}{R} \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{U^2}{LT_0^2}} X(1-X) dX = \frac{4kT_0}{R} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}Y} + \frac{\sqrt{3}Y}{4\pi} \right) \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} Y \right) \right]$$

où on a remplacé L par son expression et posé $Y = eU/kT_0$.

Q79. La fonction est monotone croissante sans histoire ...



Q80. Pour $Y \rightarrow \infty$, $S_{ii} \approx \frac{4kT_0}{R} \frac{\sqrt{3}Y}{4\pi} \frac{\pi}{2}$ et le facteur de Fano $F \approx \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.43$

Q81. Cette valeur est très voisine de la valeur expérimentale de la question Q17.

V Environnement électromagnétique et comportement à très basse tension.

Ordre de grandeur de la capacité électrostatique entre les contacts

Q82. Dans le plan $z = 0$, les lignes équipotentielles sont des droites radiales issues de O et les lignes de champs des demi cercles de centre O, orientées dans le sens horaires pour $\theta > 0$ et dans le sens trigonométrique pour $\theta < 0$.

Q83. Avec la relation $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$ on obtient pour $\theta > 0$: $E_\theta = -U/\pi r$ et $E_r = 0$.
Le théorème de Coulomb appliqué à la surface $\theta = 0^+$ avec le vide donne :

$$\Sigma^+ = -\epsilon_0 E_\theta = -\frac{\epsilon_0 U}{\pi r}$$

de même pour l'autre face $\theta = 0^-$ on aura

$$\Sigma^- = -\epsilon_0 \epsilon_r E_\theta = -\frac{\epsilon_0 \epsilon_r U}{\pi r}$$

Q84. On calcule la charge totale de la plaque $\theta = 0$:

$$Q(0) = -\frac{(\epsilon_0 + \epsilon_0 \epsilon_r)U}{\pi} \int W \frac{dr}{r}$$

Ce qui donne

$$Q(0) = -\frac{(\epsilon_0 + \epsilon_0 \epsilon_r)UW}{\pi} \ln \left(\frac{2W}{L} \right)$$

La charge de la seconde plaque :

$$Q(\pi) = \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_0 \epsilon_r) U W}{\pi} \ln \left(\frac{2W}{L} \right)$$

on a donc un condensateur de capacité

$$C = \frac{Q(\pi)}{U} = \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_0 \epsilon_r) W}{\pi} \ln \left(\frac{2W}{L} \right)$$

$$C = Q(\pi)/U = \epsilon_0(\epsilon_r + 1)(W/\pi) \ln(2W/L).$$

Q85. Numériquement $C = 9.55 \cdot 10^{-15}$ F.

Comportement à très basse tension

Q86. $u(t) = R i_R(t)$ avec $i_R(t) = I + \delta i - i_C$ en valeur moyenne en régime permanent $\langle i_C(t) \rangle = 0$ sinon le condensateur se chargerait donc la relation en valeur moyenne donnera $U = RI$.

Q87. Il reste alors de la relation : $\delta u(t) = R \delta i(t) - R i_C(t)$ et $i_C(t) = C du/dt$ ce qui donnera pour la composante de rang n :

$$\underline{u}_n = R \underline{i}_n - RC j \omega_n \underline{u}_n.$$

$$\text{Ou } \underline{u}_n = \frac{R}{1 + jRC \omega_n} \underline{i}_n.$$

Q88. $P_{Joule} = ui = (U + \sum_n \underline{u}_n e^{j\omega_n t})(I + \sum_n \underline{i}_n e^{j\omega_n t}) = UI + \sum_n (U \underline{i}_n + I \underline{u}_n) e^{j\omega_n t} + \sum_n \sum_m \underline{u}_n \underline{i}_m e^{j(\omega_n + \omega_m)t}$.
Alors on identifie :

$$p_{0,n} = RI \left(1 + \frac{1}{1 + jRC \omega_n} \right) \underline{i}_n \quad \text{et} \quad p_{n,m} = \frac{R}{1 + jRC \omega_n} \underline{i}_n \underline{i}_m.$$

Q89. En valeur moyenne la première somme est nul puisqu'il s'agit d'une somme de termes périodiques de moyenne nulle.

Pour la seconde somme il en sera de même pour tous les termes périodiques de pulsation $\omega = \omega_n + \omega_m \neq 0$, il ne restera que la somme des termes en $p_{n,-n}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (p_{n,-n} + p_{-n,n}) = \sum \left(\frac{R \underline{i}_n \underline{i}_{-n}}{1 + jRC \omega_n} + \frac{R \underline{i}_{-n} \underline{i}_n}{1 - jRC \omega_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \underline{i}_n^2}{1 + R^2 C^2 \omega_n^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Q90. } \Delta P &= 2 \sum \text{Re}(p_{n,-n}) = 2R \sum \left(\frac{\underline{i}_n^2}{1 + n^2 R^2 C^2 \omega^2} \right) = \frac{2RS_{ii}}{2T} \sum \frac{1}{1 + n^2 R^2 C^2 \omega^2} \\ &= \frac{2RS_{ii}}{2T} \frac{\pi}{2RC\omega} = \frac{S_{ii}}{4C} \end{aligned}$$

En utilisant encore le formulaire pour le calcul de la somme.

Q91. ΔP devrait être nul effectivement sauf si on peut montrer qu'il est très inférieur à P_{Joule} , ce qui correspond à $S_{ii}/4C \ll RP^2$.

On avait déjà négligé les pertes par conduction thermique avec le support dans la partie IV.

Q92. L'approximation précédente devient $I \gg 2eF/4RC = I^* = 1.1 \cdot 10^{-8}$ A mais les intensités employées dans l'expérience de la figure 3 sont nettement supérieures à I^* .
