

Forger les métaux grâce à l'induction électromagnétique X 2023 PC A

Merci de signaler les erreurs à pchoche2020@gmail.com ou severine@menssch.fr

1- Rayonnement de l'acier chauffé et température de couleur

1.1 Modèle du corps noir

Q1 L'irradiance spectrale $L^0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$ peut s'écrire :

$$L^0(\lambda, T) = 2\pi \frac{(k_B T)^5}{h^4 c^3} f(x)$$

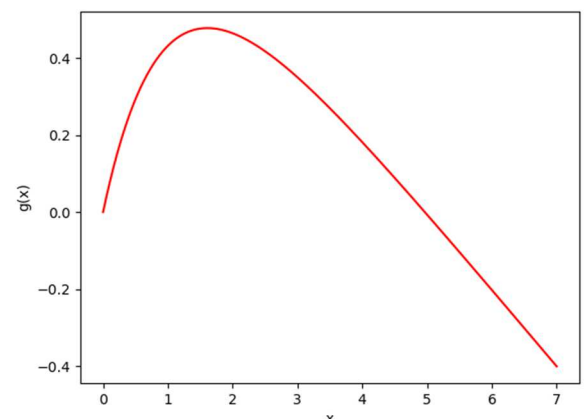
en posant : $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ et $f(x) = \frac{x^5}{\exp(x) - 1}$

On note que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

De plus : $f'(x) = \frac{5x^4(\exp(x) - 1) - x^5 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2}$

Soit : $f'(x) = \frac{5x^4 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2} \left(1 - \exp(-x) - \frac{x}{5}\right)$

Cette dérivée est du signe de $g(x) = 1 - \exp(-x) - \frac{x}{5}$, représentée ci-contre. Au voisinage de 0, $g(x)$ est équivalente à $\frac{4x}{5}$. Lorsque x tend vers l'infini, elle est équivalente à $-\frac{x}{5}$ et tend vers $-\infty$. La dérivée de $g(x)$ s'annule en $x = \ln(5)$. $g(x)$ est ainsi croissante sur $[0, \ln(5)]$, atteint sa valeur maximale $\frac{4 - \ln(5)}{5} > 0$, puis décroît et tend vers $-\infty$.



$g(x)$ a donc un unique zéro réel positif en x solution de : $\exp(-x) = 1 - \frac{x}{5}$

Soit d'après l'énoncé : $x \simeq 5$

On vérifie d'ailleurs que : $\exp(-5) \approx 7.10^{-3} \ll 1$

Ainsi, l'irradiance spectrale est maximale à la longueur d'onde $\lambda_{\max} \approx \frac{hc}{5k_B T}$. Cependant :

$$\frac{hc}{5k_B} \approx 2,9.10^{-3} K.m$$

On retrouve donc la **loi de Wien** :

$$\lambda_{\max} T \approx 2,9.10^{-3} K.m$$

Q2 La puissance surfacique rayonnée se déduit de l'irradiance spectrale intégrée sur l'ensemble du spectre électromagnétique : $P_{ray} = \int_0^\infty L^0(\lambda, T) d\lambda$

On pose de nouveau $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, qui varie de ∞ à 0 lorsque λ varie de 0 à ∞ :

$$P_{ray} = \int_\infty^0 2\pi \frac{(k_B T)^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{\exp(x) - 1} d\left(\frac{hc}{k_B T x}\right)$$

Soit :

$$P_{ray} = \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx$$

Cependant : $\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$ d'où : $P_{ray} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} T^4$

On retrouve la **loi de Stefan-Boltzmann** :

$$P_{ray} = \sigma_0 T^4$$

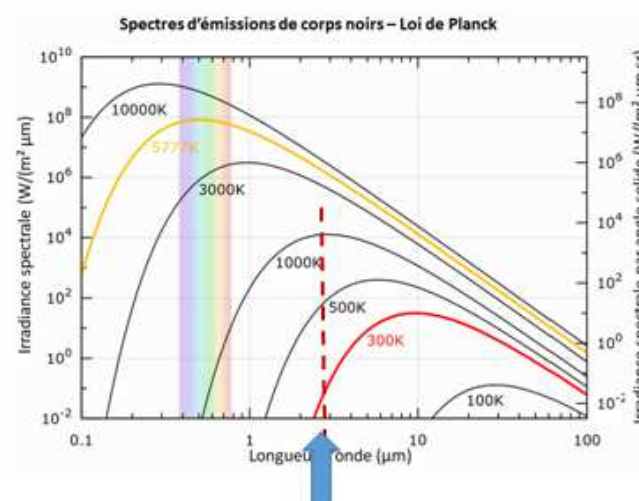
en posant

$$\sigma_0 = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2}$$

Q3 D'après la **loi de Wien (Q2)**, le maximum d'irradiance spectrale d'un corps noir à 1000 K est à la longueur d'onde :

$$\lambda_{\max} \approx 3\mu m$$

en accord avec la **figure 2**.



Cette longueur d'onde est dans le proche infrarouge.

Une fraction de 98% de la puissance totale rayonnée par ce corps noir provient de l'intervalle de longueur d'onde $[1,5\mu\text{m}, 24\mu\text{m}]$. La contribution du domaine visible représente donc moins de 2 %. Elle est en fait nettement inférieure. On peut en proposer une borne supérieure. Dans le domaine visible, on peut considérer, à la température considérée, $\frac{\lambda}{\lambda_{\text{max}}} \ll 1$, d'où une

expression approchée de l'irradiance : $L^0(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)$

En notant $\lambda_v = 400\text{nm}$ et $\lambda_r = 750\text{nm}$: $L^0(\lambda, T) \leq \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda_r k_B T}\right)$ sur $[\lambda_v, \lambda_r]$

Ainsi :
$$\int_{\lambda_v}^{\lambda_r} L^0(\lambda, T) d\lambda \leq \frac{2\pi hc^2}{5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda_r k_B T}\right) \left(\frac{1}{\lambda_v^4} - \frac{1}{\lambda_r^4}\right)$$

On rapporte cette puissance surfacique à celle donnée par la loi de Stefan, d'où une fraction r_v de rayonnement dans le domaine visible qui vérifie :

$$r_v \leq 3 \left(\frac{hc}{\pi k_B T \lambda_v} \right)^4 \exp\left(-\frac{hc}{\lambda_r k_B T}\right) \left(1 - \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_r}\right)^4\right)$$

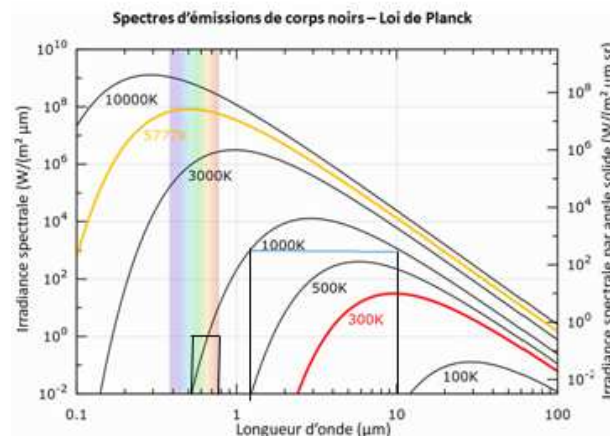
Soit en reportant $\lambda_{\text{max}} = \frac{hc}{5k_B T}$: $r_v \leq 3 \left(\frac{5\lambda_{\text{max}}}{\pi \lambda_v} \right)^4 \exp\left(-\frac{5\lambda_{\text{max}}}{\lambda_r}\right) \left(1 - \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_r}\right)^4\right)$

AN

$$r_v < 1,2 \cdot 10^{-4}$$

On peut aussi s'appuyer sur la **figure 2** pour majorer la fraction de rayonnement dans le domaine visible par :

$$\frac{10^0 \text{W.m}^{-2} \cdot \mu\text{m}^{-1} \times 0,3\mu\text{m}}{10^3 \text{W.m}^{-2} \cdot \mu\text{m}^{-1} \times 9\mu\text{m}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$$



Q4 D'après les résultats de **Q3**, la contribution du domaine visible au rayonnement d'un corps noir à 1000 K est faible. De plus, la contribution du rouge domine par rapport à celle du jaune et on devrait donc observer un corps « **rouge sombre** ».

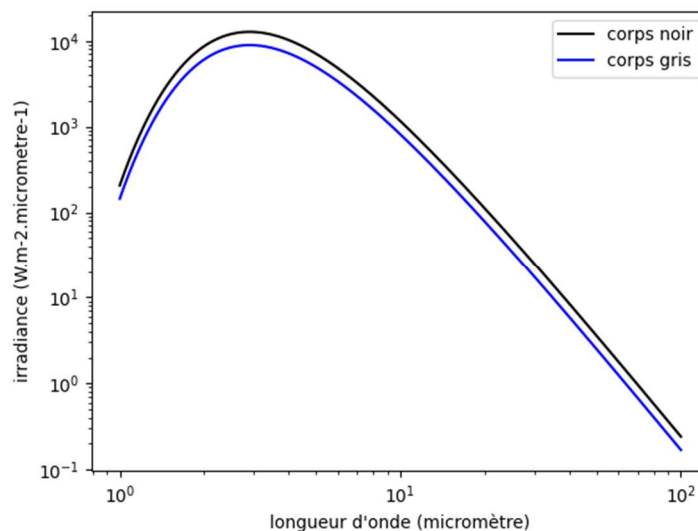
La couleur rouge-orangée du début de l'énoncé est devenue « jaune-orangée », ce qui semble être une coquille (la couleur rouge-orangée réapparaît à la fin de cette partie.

1.2 Modèle du corps gris

Q5 Dans le premier modèle, l'émissivité est indépendante de la longueur d'onde. $L(\lambda, T) = \varepsilon L^0(\lambda, T)$ admet un maximum à la même longueur d'onde que dans le cas du corps noir. La **loi de Wien est donc inchangée**.

Par contre, **la loi de Stefan** s'applique en remplaçant la constante de Stefan par $\varepsilon \sigma_0$.

Avec l'échelle logarithmique retenue, le spectre est décalé verticalement de $\log_{10} \varepsilon_{\text{acier}} \simeq -0,15$



Ce premier modèle ne permet pas de rendre compte de la couleur rouge orangée observée.

Q6 Dans le deuxième modèle, l'émissivité dépend de la température. Le maximum d'irradiance est ainsi observé à la longueur d'onde :

$$\lambda'_{\max} \simeq \frac{5}{a - bT} \lambda_{\max}$$

A 1000K :

$$\lambda'_{\max} \simeq 3,4 \mu\text{m}$$

Il s'agit peut-être de réécrire la loi de Planck en remplaçant T par $\frac{a-bT}{a}T$, ce qui permettrait de retrouver la « loi de Wien modifiée ». Dans ce cas, on reprend la méthode de **Q2**, mais on

obtient une puissance surfacique rayonnée : $P_{\text{ray}} = \sigma_0 \left(\frac{a-bT}{a} T \right)^4$ (ce qui revient en fait à considérer une émissivité $\left(\frac{a-bT}{a} \right)^4$).

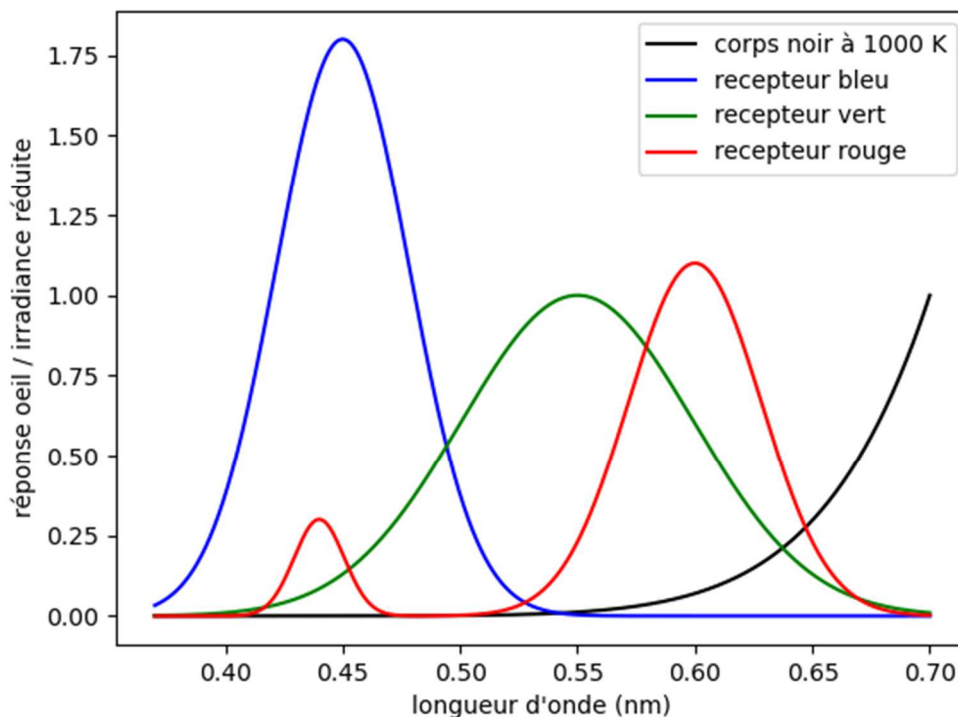
Le sujet propose une « loi de Wien modifiée », mais l'effet sur la loi de Stefan n'est pas très explicite !

Ces changements ne permettent pas d'expliquer la couleur observée par la longueur d'onde du maximum d'irradiance donnée par la loi de Wien (corrigée ou non). Il faut aussi prendre en compte la perception de l'œil.

1.3 La température de couleur, l'outil du forgeron

Q7 Dans le cas d'un corps noir à 1000 K, $x = \frac{hc}{\lambda k_B T} > 20$ sur le domaine visible et on peut donc retenir l'expression approchée : $L^0(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)$

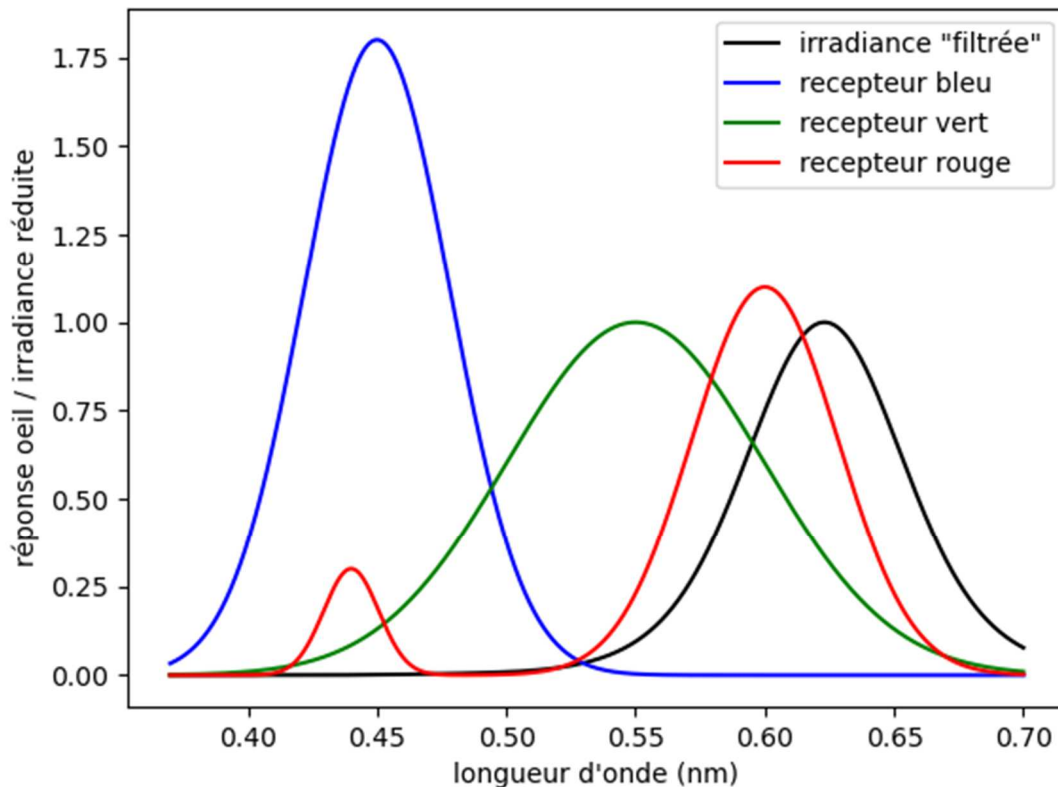
On représente l'allure de $\frac{L^0(\lambda, T)}{L^0(\lambda_r = 700\text{nm}, T)}$ et les fonctions colorimétriques de l'œil.



D'après la figure précédente, les cônes verts et rouges sont excités par le rayonnement du corps noir à 1000 K, alors que les récepteurs bleus ne le sont pratiquement pas du tout. On s'attend

donc à une couleur perçue résultant d'une synthèse additive de vert et de rouge. Il faut cependant évaluer le spectre « filtré » par les trois types de cône pour identifier la longueur d'onde d'irradiance « apparente » maximale.

On obtient ainsi l'allure de « l'irradiance filtrée », c'est-à-dire en pondérant par la fonction colorimétrique totale des trois types de cône. On représente le résultat de cette pondération en rapportant à la valeur maximale ainsi obtenue sur l'intervalle [400 nm, 700 nm]. On fait apparaître un maximum d'irradiance à 630 nm, plutôt dans le rouge, mais avec une distribution spectrale compatible avec la couleur « rouge-orangée » perçue selon l'énoncé.



On n'a pas « intégré le spectre émis », mais « simplement » pondéré par les fonctions colorimétriques.

2. Problème électromagnétique

2.1 Inducteur placé au-dessus d'une plaque semi-infinie

Q8 Dans le conducteur ohmique, le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique (loi d'Ohm locale) :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

σ est la conductivité du milieu.

Qu'entend-on par « détailler la constante » ?

On peut déduire ses dimensions de la loi d'Ohm locale, en exprimant les dimensions du champ électrique à partir de celles d'une énergie (potentielle électrique) :

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \frac{[J]}{[E]} \\ &= \frac{IL^{-2}}{\left(\frac{ML^2T^{-2}}{ITL}\right)} \\ &= I^2M^{-1}L^{-3}T^3 \end{aligned}$$

L'unité usuelle de la conductivité est le $\Omega^{-1}m^{-1}$ ou $S.m^{-1}$.

Q9 Le « système » désigne ici le milieu homogène occupant un demi-espace et les conditions aux limites imposés à sa surface par le champ magnétique inducteur.

Ce système est invariant par toute translation selon x et y et on s'attend donc à un champ magnétique de la forme $\vec{B}(z, t)$.

Pour qu'un tel champ magnétique soit solution de l'équation de Maxwell-Thomson, il faut que sa composante selon z soit uniforme. Or, elle est nulle à la surface du conducteur, donc elle est uniformément nulle dans le conducteur.

Le plan (Mxz) est un plan de symétrie du milieu et des conditions aux limites sur le champ magnétique. On s'attend donc à un champ magnétique en M appartenant à ce plan, donc à $B_y = 0$ (ce que confirme plus directement la résolution de l'équation de **Q11** avec les conditions aux limites retenues).

On considère donc un champ magnétique : $\vec{B}(M, t) = B(z, t)\vec{u}_x$

En reportant cette expression dans l'équation de Maxwell-Ampère, dans laquelle la densité de courant est écrite $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, on en déduit que le champ électrique est de la forme :

$$E(z, t)\vec{u}_y$$

Q10 On se place en régime sinusoïdal et on écrit la représentation complexe du champ magnétique sous la forme : $\underline{B}(z)\exp(-j\alpha t)\vec{u}_x$

On déduit successivement de la définition du laplacien vecteur, de l'équation de Maxwell-Thomson, de celle de Maxwell-Ampère, de la loi d'Ohm locale et de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta B} &= \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) \\ &= -\mu_0\mu_r \vec{\text{rot}} \vec{J} \\ &= -\mu_0\mu_r \sigma \vec{\text{rot}} \vec{E} \\ &= \mu_0\mu_r \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Soit :

$$\vec{\Delta B} = \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

analogue à une équation de diffusion.

On y reporte $\underline{B}(z) \exp(-j\omega t) \vec{u}_x$. Après projection selon $\vec{u}_x$ et simplification par $\exp(-j\omega t)$:

$$\frac{d^2 \underline{B}}{dz^2} = -j\mu_0 \mu_r \sigma \omega \underline{B}(z)$$

Q11 On note :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \sigma \omega}}$$

l'épaisseur de peau.

L'équation différentielle de **Q10** se réécrit ainsi :

$$\frac{d^2 \underline{B}}{dz^2} = \left(\frac{1-j}{\delta} \right)^2 \underline{B}(z)$$

Elle a pour solution générale : $\underline{B}(z) = \underline{\alpha} \exp\left((1-j)\frac{z}{\delta}\right) + \underline{\beta} \exp\left(-(1-j)\frac{z}{\delta}\right)$

Cependant, $|\underline{B}(z)|$ doit rester borné lorsque $z \rightarrow \infty$, ce qui impose : $\underline{\alpha} = 0$

La condition aux limites $\underline{B}(z=0) = B_s$ conduit alors à : $\underline{\beta} = B_s$

Ainsi :

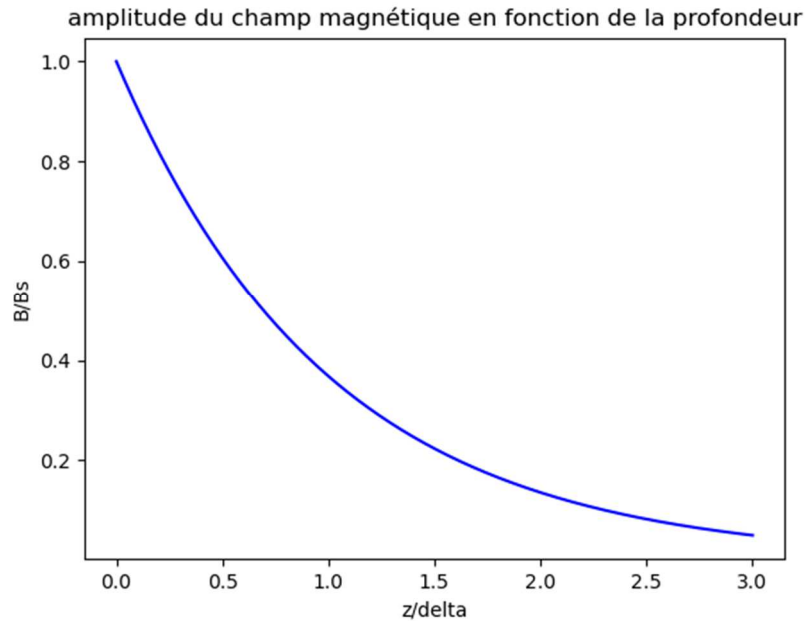
$$\underline{B}(z) = B_s \exp\left(-(1-j)\frac{z}{\delta}\right)$$

Le champ magnétique dans l'acier a donc pour représentation complexe :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_s \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(j\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right) \vec{u}_x$$

Q12 $|\underline{B}(z)| = B_s \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$ décroît exponentiellement en fonction de la profondeur et la profondeur caractéristique de pénétration dans le milieu matériel est l'épaisseur de peau. Elle est d'autant plus faible que :

- la fréquence est grande ;
- la permittivité relative du matériau est grande ;



Q12

L'énoncé demande de déterminer une puissance volumique dissipée par effet Joule, mais donne l'expression de la norme de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting (homogène à une puissance surfacique).

(Au moins) deux méthodes sont possibles, l'une utilisant directement l'expression de la puissance volumique dissipée, l'autre s'appuyant sur le vecteur de Poynting,

Dans les deux méthodes, il est nécessaire de déterminer la représentation complexe du champ électrique. On la déduit du champ magnétique, dont l'expression est reportée dans l'équation de Maxwell-Ampère, combinée à la loi d'Ohm locale :

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{1}{\sigma} \vec{J} \\
 &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r \sigma} \text{rot} \vec{B} \\
 &= \frac{B_s}{\mu_0 \mu_r \sigma} \exp(-j\omega t) \text{rot} \left(\exp\left(- (1-j) \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x \right) \\
 &= -\frac{B_s}{\mu_0 \mu_r \sigma} \exp(-j\omega t) \frac{1-j}{\delta} \exp\left(- (1-j) \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_y
 \end{aligned}$$

Dans la première méthode, on détermine la moyenne temporelle de $\vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2$, soit :

$$\langle \sigma \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sigma \text{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)$$

On en déduit la moyenne temporelle de la puissance volumique dissipée dans le conducteur :

$$P_J(z) = \frac{1}{2} \sigma \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)$$

$$= \frac{\sigma B_s^2}{2(\mu_0 \mu_r)^2} \frac{2}{\delta^2} \exp\left(-2 \frac{z}{\delta}\right)$$

Cependant :

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{\mu_0 \mu_r \sigma \omega}{2}$$

D'où :

$$P_J(z) = \frac{\omega B_s^2}{2\mu_0 \mu_r} \exp\left(-2 \frac{z}{\delta}\right)$$

de la forme :

$$P_J(z) = P_0 \exp\left(-2 \frac{z}{\delta}\right)$$

en posant

$$P_0 = \frac{\omega B_s^2}{2\mu_0 \mu_r}$$

Dans la deuxième méthode, on détermine la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$:

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \mu_r} \operatorname{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

L'énoncé propose une norme de $\vec{E} \wedge \vec{B}^*$, sans passer par la partie réelle.

Cependant :

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = -\frac{B_s}{\mu_0 \mu_r \sigma} \exp(-j\omega t) \frac{1-j}{\delta} \exp\left(-\left(1-j\right) \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_y \wedge B_s \exp(j\omega t) \exp\left(-\left(1+j\right) \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

$$= \frac{B_s^2}{\mu_0 \mu_r \sigma} \frac{1-j}{\delta} \exp\left(-2 \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_z$$

D'où :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{B_s^2}{2(\mu_0 \mu_r)^2 \sigma \delta} \exp\left(-2 \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_z$$

En moyennant par rapport au temps l'équation locale de Poynting ($\frac{\partial u_{em}}{\partial t}$ a une moyenne temporelle nulle car la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} est périodique) :

$$\operatorname{div} \langle \vec{\Pi} \rangle = -\langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle$$

Or :

$$\text{div} < \vec{\Pi} > = - \frac{B_s^2}{(\mu_0 \mu_r)^2 \sigma \delta^2} \exp\left(-2 \frac{z}{\delta}\right)$$

En reportant de nouveau :

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{\mu_0 \mu_r \sigma \omega}{2}$$

On obtient :

$$< \vec{J} \cdot \vec{E} > = \frac{\omega B_s^2}{2 \mu_0 \mu_r} \exp\left(-2 \frac{z}{\delta}\right)$$

2.2 Inducteur enroulé autour d'une plaque métallique

Q14 Le milieu conducteur et les conditions aux limites (sur le champ magnétique) sont invariants par translation selon (Ox). Le champ magnétique a ainsi une représentation complexe $\vec{B}(y, z) \exp(-j\omega t)$ avec $\vec{B}(y, z)$ solution de l'équation établie dans **Q10** :

$$\Delta \vec{B} = -j\omega \mu_0 \mu_r \sigma \vec{B}$$

Q15 On néglige la dépendance en y et on cherche donc une solution de la forme $\underline{B}(z) \exp(-j\omega t) \vec{u}_x$, d'où l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \underline{B}}{dz^2} = -j\omega \mu_0 \mu_r \sigma \underline{B}$$

On réécrit cette équation :

$$\frac{d^2 \underline{B}}{dz^2} = \left(\frac{1-j}{\delta}\right)^2 \underline{B}$$

Sa solution générale est :

$$\underline{B}(z) = \underline{\alpha} \exp\left((1-j) \frac{z}{\delta}\right) + \underline{\beta} \exp\left(-(1-j) \frac{z}{\delta}\right)$$

Les conditions aux limites en $z = \pm \frac{h}{2}$ imposent :

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} \exp\left((1-j) \frac{h}{2\delta}\right) + \underline{\beta} \exp\left(-(1-j) \frac{h}{2\delta}\right) &= B_s \\ \underline{\alpha} \exp\left((1-j) \frac{h}{2\delta}\right) + \underline{\beta} \exp\left(-(1-j) \frac{h}{2\delta}\right) &= B_s \end{aligned}$$

On déduit de ces conditions symétriques par rapport au plan $z = 0$:

$$\underline{\alpha} = \underline{\beta} = \frac{B_s}{\exp\left((1-j) \frac{h}{2\delta}\right) + \exp\left(-(1-j) \frac{h}{2\delta}\right)}$$

Ainsi :

$$\underline{B}(z) = B_s \frac{\exp\left((1-j)\frac{z}{\delta}\right) + \exp\left(-(1-j)\frac{z}{\delta}\right)}{\exp\left((1-j)\frac{h}{2\delta}\right) + \exp\left(-(1-j)\frac{h}{2\delta}\right)}$$

Q16 La représentation complexe du vecteur densité de courant se déduit de l'équation de Maxwell-Ampère dans laquelle on reporte l'expression $\underline{B}(z)\exp(-j\omega t)\vec{u}_x$ du champ magnétique, d'où :

$$\vec{J} = \frac{B_s}{\mu_0\mu_r\delta} \frac{(1-j)\exp\left((1-j)\frac{z}{\delta}\right) - (1-j)\exp\left(-(1-j)\frac{z}{\delta}\right)}{\exp\left((1-j)\frac{h}{2\delta}\right) + \exp\left(-(1-j)\frac{h}{2\delta}\right)} \exp(-j\omega t)\vec{u}_y$$

Q17 La « puissance dissipée sur une épaisseur de la plaque » désigne probablement une **puissance surfacique**, déduite de la puissance volumique moyennée dans le temps et intégrée

sur $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$:

$$P_{J,s} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{|\vec{J}|^2}{2\sigma} dz$$

Cependant :

$$\begin{aligned} |\vec{J}|^2 &= \left(\frac{B_s}{\mu_0\mu_r\delta}\right)^2 \frac{\left((1-j)\exp\left((1-j)\frac{z}{\delta}\right) - (1-j)\exp\left(-(1-j)\frac{z}{\delta}\right)\right)\left((1+j)\exp\left((1+j)\frac{z}{\delta}\right) - (1+j)\exp\left(-(1+j)\frac{z}{\delta}\right)\right)}{\left(\exp\left((1-j)\frac{h}{2\delta}\right) + \exp\left(-(1-j)\frac{h}{2\delta}\right)\right)\left(\exp\left((1+j)\frac{h}{2\delta}\right) + \exp\left(-(1+j)\frac{h}{2\delta}\right)\right)} \\ &= \left(\frac{B_s}{\mu_0\mu_r\delta}\right)^2 \frac{2\exp\left(2\frac{z}{\delta}\right) - 2\exp\left(-2\frac{z}{\delta}\right) - 2\exp\left(2j\frac{z}{\delta}\right) + 2\exp\left(-2j\frac{z}{\delta}\right)}{\exp\left(\frac{h}{\delta}\right) + \exp\left(-j\frac{h}{\delta}\right) + \exp\left(j\frac{h}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{h}{\delta}\right)} \\ &= 2\left(\frac{B_s}{\mu_0\mu_r\delta}\right)^2 \frac{ch\left(2\frac{z}{\delta}\right) - \cos\left(2\frac{z}{\delta}\right)}{ch\left(\frac{h}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{h}{\delta}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P_{J,s} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{B_s}{\mu_0\mu_r\delta}\right)^2 \frac{ch\left(2\frac{z}{\delta}\right) - \cos\left(2\frac{z}{\delta}\right)}{ch\left(\frac{h}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{h}{\delta}\right)} dz$$

Soit :

$$P_{J,s} = \frac{\delta}{\sigma} \left(\frac{B_s}{\mu_0\mu_r\delta}\right)^2 \frac{sh\left(\frac{h}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{h}{\delta}\right)}{ch\left(\frac{h}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{h}{\delta}\right)}$$

On obtient donc :

$$\boxed{P_{J,s} = P_0 \delta f(\xi)} \quad \text{où } P_0 \text{ est une puissance}$$

volumique introduite dans **Q13**.

En posant :

$$f(\xi) = \frac{sh\xi - \sin\xi}{ch\xi + \cos\xi}$$

et

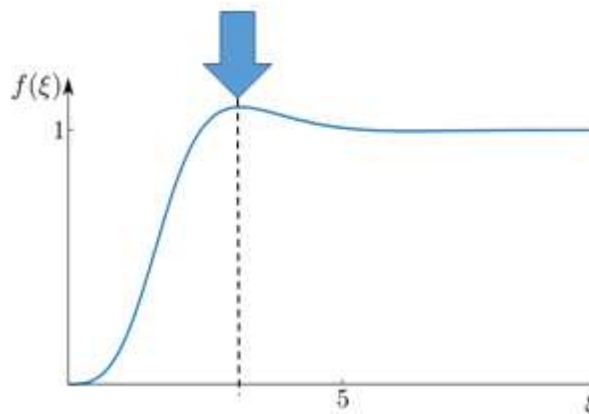
$$\xi = \frac{h}{\delta}$$

On retrouve la confusion entre puissance volumique et puissance surfacique de Q13.

Il semble y avoir un facteur 2 en trop dans l'expression de ξ donnée dans l'énoncé.

Q18 D'après la figure de l'énoncé, on maximise la puissance dissipée dans le milieu matériel si :

$$\xi \approx 3$$



D'où en considérant $\xi = \frac{h}{\delta}$:

$$\frac{h^2}{\delta^2} = 9$$

Soit :

$$\frac{h^2 \mu_0 \mu_r \sigma \omega}{2} = 9$$

On en déduit la fréquence :

$$f = \frac{9}{\pi h^2 \mu_0 \mu_r \sigma}$$

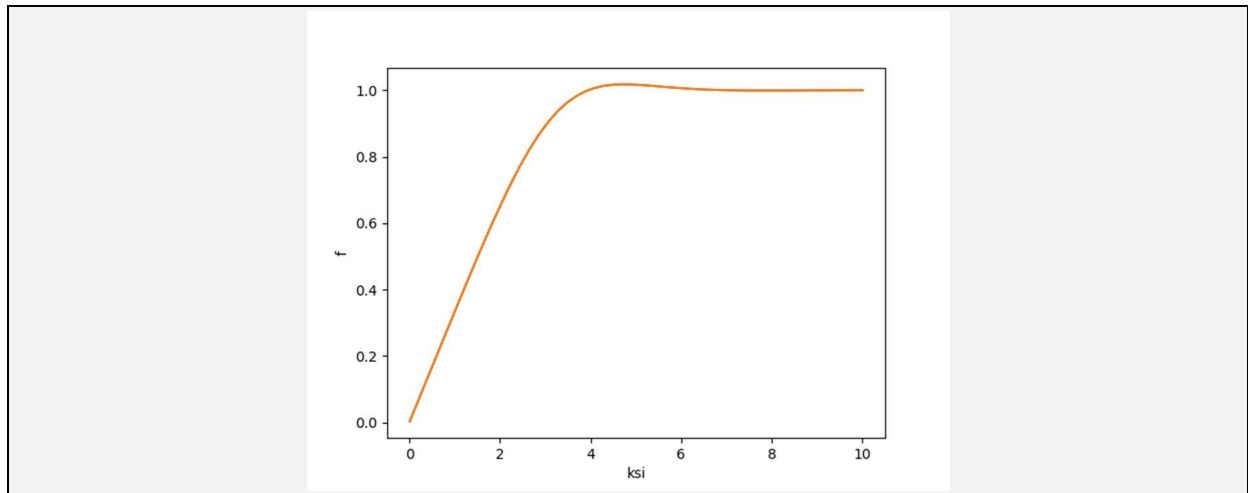
AN

$$f = 2,3 \text{ kHz}$$

La valeur numérique de la perméabilité magnétique du vide n'est pas rappelée dans l'énoncé.

On obtient une fréquence relativement faible, permise en particulier par la permittivité relative importante de l'acier.

En fait, il semble y a voir aussi un problème sur la représentation graphique de $f(\xi)$ qui présente un maximum plutôt en 4 et non en 3 (mais sans conséquence sur l'ordre de grandeur de la fréquence).



3. Etude du problème thermique

3.1 Evolution de la température dans un matériau isolé

Q19 On considère une « tranche » de matériau délimitée par z et $z+dz$ et de section d'aire S orthogonalement à (Oz) . Ce système fermé a pour capacité thermique $\rho S dz c_p$.

On suppose l'évolution isobare.

Le système considéré échange de l'énergie :

- par transfert thermique (diffusif) ; on note $\vec{j}_{th}(M, t) = j_{th}(z, t) \vec{u}_z$ le vecteur densité de flux thermique :

$$\delta Q = j_{th}(z, t) S dt - j_{th}(z + dz, t) S dt$$

- par travail (électrique, mais dont l'effet est ici équivalent à celui d'une « source interne de chaleur ») :

$$\delta W = P_J(z) S dz dt$$

On applique le premier principe à la « tranche » entre t et $t+dt$, d'où :

$$\rho S dz c_p (T(z, t+dt) - T(z, t)) = j_{th}(z, t) S dt - j_{th}(z + dz, t) S dt + P_J(z) S dz dt$$

Soit :

$$\rho S dz c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial j_{th}}{\partial z} dz S dt + P_J(z) S dz dt$$

Après division par $S dz dt$:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_{th}}{\partial z} + P_J(z)$$

Cependant, d'après la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -k \vec{\text{grad}} T$$

D'où :

$$j_{th} = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

On en déduit l'équation de la diffusion en présence d'une « source interne » :

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + P_J(z)}$$

Q20 La puissance volumique dépend de la profondeur dans le matériau selon l'expression :

$$P_J(z) = P_0 \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)$$

Si δ est faible, l'essentiel de l'effet Joule se produit au voisinage de l'interface air / matériau. On peut modéliser cette situation en considérant que la puissance $\int_0^\infty P_J(z) S dz = \frac{P_0 \delta}{2} S$ dissipée par effet Joule dans un cylindre semi-infini de base d'aire S dans le plan $z=0$ est en fait cédée au niveau de l'interface, ce qui correspond alors à une puissance surfacique :

$$\boxed{P_s = \frac{P_0 \delta}{2}}$$

Il y a de nouveau un problème de dimensions, l'énoncé exprimant une puissance surfacique comme le rapport entre une puissance volumique et une longueur.

Q21 Dans le cadre du modèle précédent, on ignore le terme volumique d'échange $P_J(z)$, mais il est remplacé par un échange à l'interface $z=0$. En reportant l'expression $T(z, t) = \hat{T}(z, t) + T_0$ dans l'équation de **Q20** ainsi simplifiée, on obtient :

$$\rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2}$$

Cette équation aux dérivées partielles doit être complétée par :

des conditions initiales	$\hat{T}(z, t=0) = 0$	le demi-espace est initialement à la température ambiante
des conditions aux limites	$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{T}(z, t) = 0$	la durée caractéristique de diffusion sur une épaisseur $Z \rightarrow \infty$ tend vers l'infini et on y retrouve la valeur initiale de $\hat{T}$
	$-k \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right)_{z=0^+} = P_s$	la densité de flux thermique est continue sur l'interface (diffusive dans le demi-espace $z > 0$, terme à gauche ; « terme source » surfacique à droite)

Q22 On applique la transformée de Laplace à l'équation aux dérivées partielles et aux conditions aux limites. On note $\tilde{T}(z, s)$ la transformée de Laplace de $\hat{T}(z, t)$

Domaine temporel	Transformée de Laplace
$\rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2}$	$\rho c_p \left(s \tilde{T}(z, s) - \hat{T}(z, t=0) \right) = k \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}$ soit $\boxed{\rho c_p s \tilde{T}(z, s) = k \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}} \quad (1)$
$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{T}(z, t) = 0$	$\boxed{\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{T}(z, s) = 0} \quad (2)$
$k \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) (z = 0^+, t) = -P_s$	$\boxed{k \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right) (z = 0^+, s) = -\frac{P_s}{s}} \quad (3)$

L'équation (1) s'intègre par rapport à z en :

$$\tilde{T}(z, s) = A(s) \exp\left(\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z\right) + B(s) \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z\right)$$

Cependant, la condition aux limites (2) impose $A(s) = 0$.

Il reste donc :

$$\tilde{T}(z, s) = B(s) \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z\right)$$

dont on en déduit :

$$k \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right)_{z=0^+} = -B(s) \sqrt{\rho c_p k s}$$

En reportant dans l'équation (3) traduisant la condition aux limites à l'interface :

$$B(s) = \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k s^3}}$$

Finalement :

$$\boxed{\tilde{T}(z, s) = \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k s^3}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z\right)}$$

Q23 Au voisinage de l'interface, on retient en développement limité à l'ordre 1 en z :

$$\exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z\right) \approx 1 - \sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z$$

D'où :

$$\tilde{T}(z, s) \approx \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k}} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{P_s z}{k} \frac{1}{s}$$

On lui applique la transformée de Laplace inverse, en identifiant les deux termes dans la table :

$$\hat{T}(z, t) \approx 2P_s \sqrt{\frac{t}{\pi \rho c_p k}} - \frac{P_s}{k} z$$

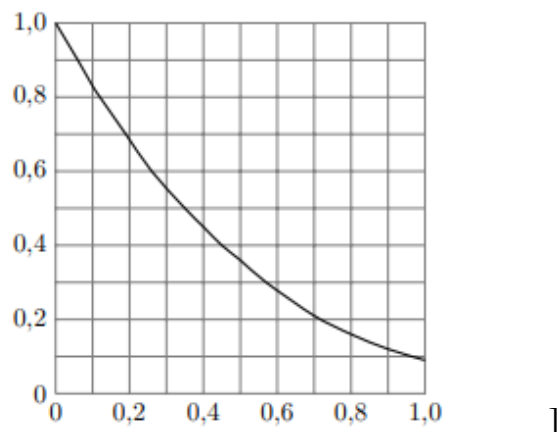
Ainsi, au voisinage de l'interface, le profil de température est affine avec une température sur l'interface même qui augmente en $\sqrt{t}$.

Q24 L'allure est affine au voisinage de l'interface, mais la température doit tendre vers 0 lorsque $Z \rightarrow \infty$.

[En étudiant la réponse du demi-espace conducteur à une impulsion de flux thermique, puis en considérant une superposition d'impulsions, on pourrait montrer que :

$$\hat{T}(z, t) = \int_0^t \frac{P_s}{\sqrt{\pi(t-u)}} \exp\left(-\frac{z^2}{4D(t-u)}\right) du$$

et $\frac{\hat{T}(z, t)}{\hat{T}(z=0, t)}$ a l'allure suivante (avec une unité arbitraire en abscisse) (voir Centrale 2013 PSI !)



Q25 On obtient :

$$\tilde{T}(z=0, s) = \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k s^3}}$$

D'où, d'après la table de l'énoncé :

$$\hat{T}(z=0, t) = 2P_s \sqrt{\frac{t}{\pi \rho c_p k}}$$

A l'instant initial, la variation de température par unité de temps est infinie (ce qui résulte du modèle de source surfacique sur l'interface $z=0$ « appliquée » instantanément), puis elle évolue en $\sqrt{t}$, en accord avec le phénomène de diffusion qui se produit dans le matériau.

Selon ce modèle, à l'importe quelle profondeur dans le matériau, la température finira par dépasser la température de fusion.

3.2 Ajout du transfert conducto-convectif

Q26 L'équation (1) de **Q22** est inchangée et conduit, en suivant la même méthode résolution

que dans **Q22**, à :

$$\tilde{T}(z, s) = B(s) \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z\right)$$

Par contre, $B(s)$ n'a plus la même expression que dans la partie précédente. En effet, la condition aux limites (3) à l'interface air / métal, doit être modifiée en :

Domaine temporel	Transformée de Laplace
$k \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) (z=0, t) = -P_s + h \hat{T}(0, t)$	$k \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right) (z=0, s) = -\frac{P_s}{s} + h \tilde{T}(z=0, s) \quad (3')$

Or :

$$k \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right) (z=0, s) = -B(s) \sqrt{\rho c_p k s} \quad \text{et} \quad \tilde{T}(z=0, s) = B(s)$$

On en déduit :

$$B(s) = \frac{\frac{P_s}{s}}{h + \sqrt{\rho c_p k s}}$$

Ainsi que :

$$\tilde{T}(z, s) = \frac{\frac{P_s}{s}}{h + \sqrt{\rho c_p k s}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z\right)$$

Q27 Ainsi :

$$s\tilde{T}(z, s) = \frac{P_s}{h + \sqrt{\rho c_p k s}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho c_p s}{k}} z\right)$$

Et :

$$\boxed{\lim_{s \rightarrow 0} (s\tilde{T}(z, s)) = \frac{P_s}{h}}$$

L'écart de température avec l'extérieur tend donc vers une valeur uniforme $\frac{P_s}{h}$ dans tout le conducteur. Ce résultat était attendu, car :

(i) Un bilan enthalpique sur une couche d'épaisseur infinitésimale à l'interface air/ métal fait intervenir des flux surfaciques P_s et $-h\hat{T}(0, t)$, dont la somme doit être nulle ;

(ii) A l'équilibre, la température est uniforme dans le métal et, par continuité, égale à la valeur précédente.

Q28 On déduit de l'expression de **Q26** :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{T}(z, s) = 0$$

Ce résultat est cohérent avec la condition initiale : $\boxed{\hat{T}(z, t=0) = 0}$

Q29 En $z=0$:

$$\tilde{T}(z=0, s) = \frac{\frac{P_s}{hs}}{1 + \frac{\sqrt{\rho c_p k s}}{h}}$$

Au début de l'évolution, il faut considérer le comportement asymptotique $s \rightarrow \infty$, pour lequel :

$$\tilde{T}(z=0, s) \simeq \frac{P_s}{\sqrt{\rho c_p k}} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit, par transformée de Laplace inverse, un comportement aux temps faibles :

$$\boxed{\tilde{T}(z=0, s) \simeq \frac{2P_s}{\sqrt{\pi \rho c_p k}} \sqrt{t}}$$

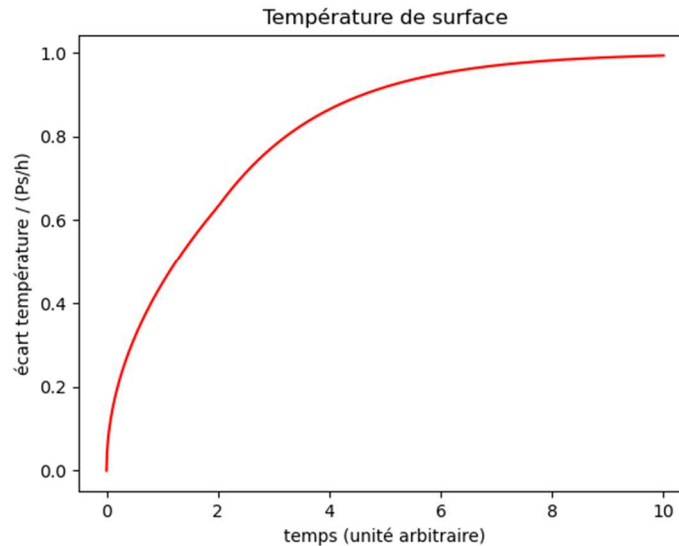
L'évolution de la température est alors dominée par la diffusion.

On a vu dans **Q27** qu'aux temps longs l'écart de température par rapport à l'extérieur tend vers $\frac{P_s}{h}$.

On peut atteindre la température de fusion de l'acier si :

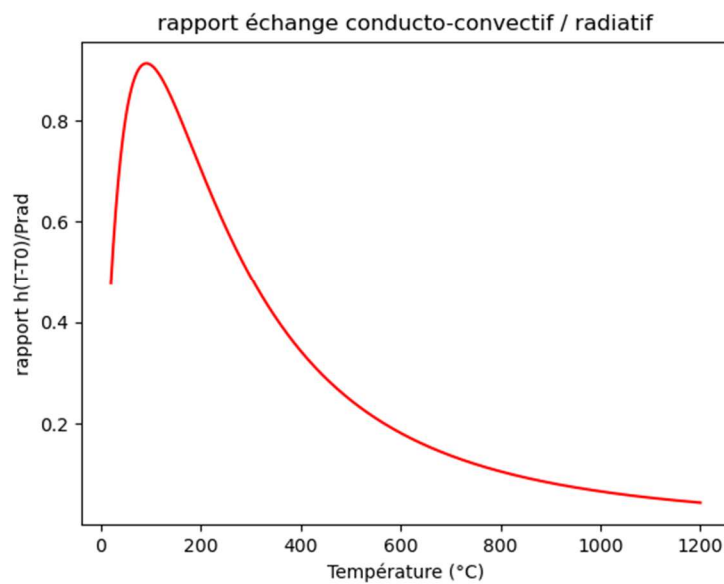
$$\frac{P_s}{h} > T_{\text{fusion}} - T_0$$

La puissance surfacique à fournir est d'autant plus élevée que l'échange conducto-convectif est intense.



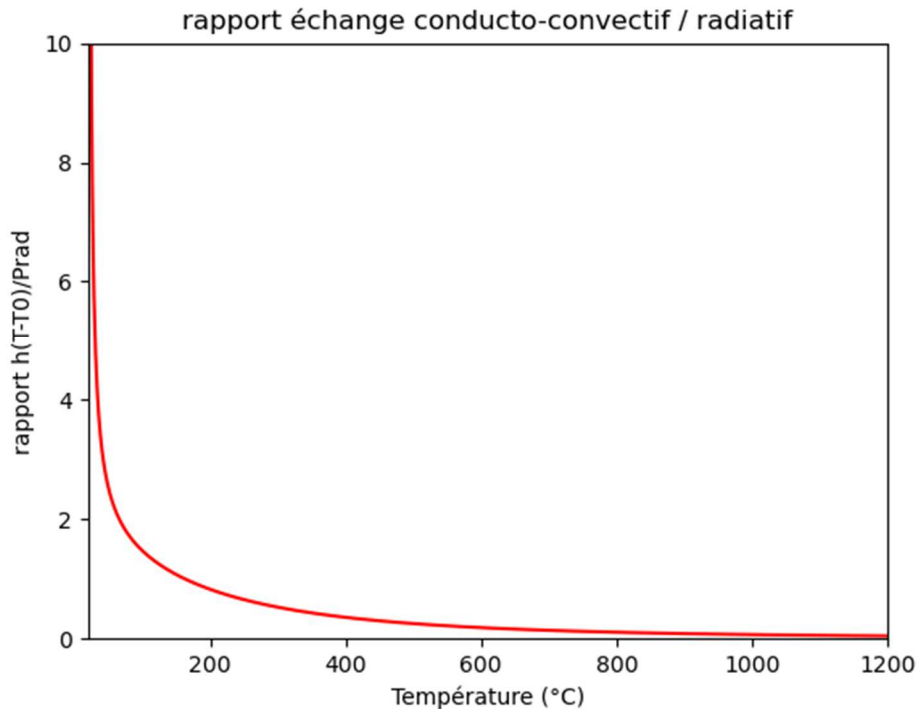
3.3 Ajout du rayonnement

Q30 On compare la puissance surfacique échangée par conducto-convection $h(T - T_0)$ à celle rayonnée $\varepsilon\sigma_0 T^4$. On représente ci-dessous le rapport entre ces deux puissances surfaciques dans l'intervalle de température considéré, en retenant $T_0 = 293K$:



Pour l'échange radiatif, il semble cependant qu'il faudrait plutôt considérer $\varepsilon\sigma_0(T^4 - T_0^4)$, afin de prendre en compte le flux radiatif incident de l'atmosphère environnante.

Dans ce cas, le rapport précédent a plutôt l'allure suivante.



On met ainsi en évidence une température de l'ordre de 160°C en dessous de laquelle les échanges conducto-convectifs dominent, alors qu'au-dessus de 160°C, ce sont les échanges radiatifs.

Q31 A 1500°C, l'échange conducto-convectif est négligeable.

Si on veut maintenir un flux thermique total constant à la surface du métal, il faut augmenter la puissance de chauffe au cours de l'augmentation de température à la surface. Il faut d'ailleurs l'augmenter de plus en plus vite au cours de cette évolution, car la puissance rayonnée varie en T^4 .

Si par contre on maintient une puissance de chauffe constante, on observera une évolution de plus en plus lente de la température de surface.

Notons que la condition pour atteindre la fusion devient :

$$P_0 > \varepsilon\sigma_0 T_{\text{fusion}}^4$$

si on néglige l'échange conducto-convectif et le flux radiatif incident, ce qui semble raisonnable à une température de l'ordre de 1500°C.

3.4 Température de Curie

Q32 A une température (suffisamment) faible devant celle de Curie, la perméabilité magnétique est élevée et on se retrouve dans des conditions de faible épaisseur de peau, ce qui correspond aux hypothèses retenues précédemment avec un flux thermique imposé à la surface. La température de surface évoluera donc d'abord selon une loi en $\sqrt{t}$, comme on l'a mis en évidence dans la partie 3.2.

A une température supérieure à celle de Curie, la perméabilité magnétique est proche de 1 et l'épaisseur de peau est donc (largement) plus grande que précédemment, ce qui peut remettre en cause le modèle d'un flux thermique imposé en surface et imposer de revenir à une « source interne » distribuée non-uniformément en volume. Par ailleurs, à cette température de surface, l'échange radiatif domine à la surface. L'évolution de la température dans le matériau est alors régie par :

$$\rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} + P_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$$

avec la condition aux limites : $-k \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \Big|_{(z=0,t)} \simeq -\varepsilon \sigma_0 \hat{T}^4 (z=0, t)$

Juste avant la température de Curie, il se produit une rapide augmentation de l'épaisseur de peau, ce qui a pour conséquence de répartir la puissance de chauffe sur une épaisseur de plus en plus grande, donc de ralentir l'augmentation de la température à la surface du métal.