Théorie

1. Fonction de transfert d'un filtre passe-bande :
   - ✘ Expression de $\underline{H}$:

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{\frac{1}{Q}\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q}\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

   - ✘ La pulsation ω_0 est la pulsation de résonance du filtre. C'est aussi la pulsation des oscillations libres du système sans amortissement.

$$H_{max} = |\underline{H}(\omega_0)| = H_0$$

   - ✘ Le facteur Q est le facteur de qualité du système. Dans le cas d'un filtre passe-bande, il est d'autant plus important que la résonance est sélective.
   - ✘ Le gain H_0 est la valeur maximale de $|\underline{H}|$, c'est à dire la valeur de $|\underline{H}|$ pour $\omega = \omega_0$.

> **!** Le filtre passe-bande ne se limite pas au circuit RLC : il est faux de donner les expressions de ω_0, Q et H_0 du RLC série ! notamment poser $H_0 = 1$ est une erreur problématique pour la suite

2. Bande passante du filtre passe-bande :
   - ✘ Q est lié à la bande passante du filtre par la relation :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

> **!** Attention ! ! cette relation n'est valable que pour le filtre passe-bande !

   - ✘ On démontre cette relation en déterminant les pulsations de coupure du filtre :

$$|\underline{H}(\omega_c)| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1$$

> **!** Attention ! ! ne pas développer le carré ! !

$$\omega^2 \pm \frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

> **!** Ne pas oublier le $\pm$!

En ne gardant que les deux solutions positives, on obtient :

$$\omega_c = \pm\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 + 4Q^2}$$

La bande passante vaut alors :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

3. Diagramme de Bode :
   - ✘ Équations des asymptotes :

$$BF : \underline{H} = \frac{H_0}{Q}\frac{j\omega}{\omega_0} \Rightarrow G_{dB} = 20\log\left(\frac{H_0\omega}{Q\omega_0}\right); \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$HF : \underline{H} = \frac{H_0}{Q}\frac{\omega_0}{j\omega} \Rightarrow G_{dB} = -20\log\left(\frac{Q\omega}{H_0\omega_0}\right); \phi = -\frac{\pi}{2}$$

   - ✘ Intersections :
     — Asymptote BF avec l'axe des abscisses : $G = 0 \Rightarrow \omega = \frac{Q}{H_0}\omega_0$.
     — Asymptote HF avec l'axe des abscisses : $G = 0 \Rightarrow \omega = \frac{H_0}{Q}\omega_0$.
     — Intersection des deux asymptotes : $\omega = \omega_0$ et $G = 20\log\left(\frac{H_0}{Q}\right)$.

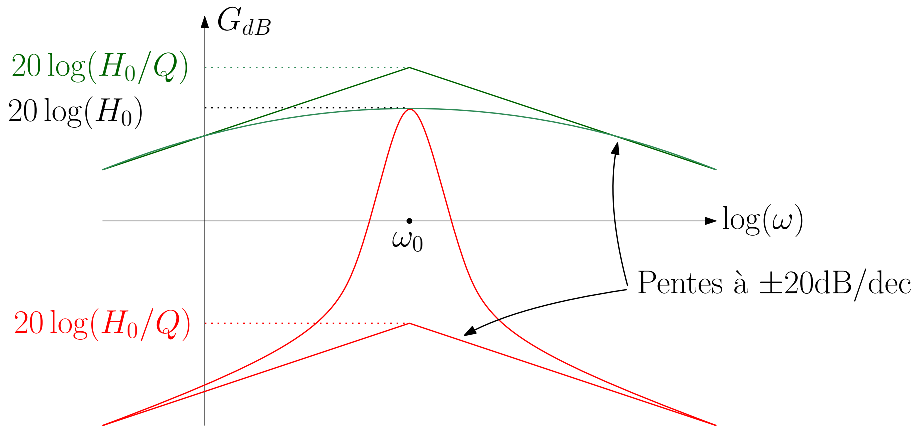

Figure 1 – diagramme de Bode du gain pour $Q >> H_0$ et $Q >> H_0$

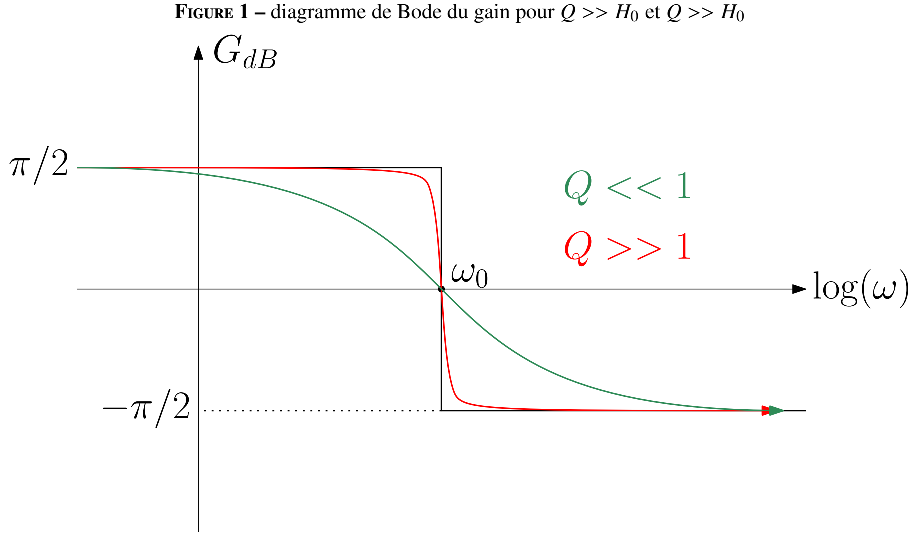

Figure 2 – diagramme de Bode de la phase pour $Q >> 1$ et $Q >> 1$

$G_{max} \neq 0$!

Wobbulation

pour observer rapidement la réponse fréquentielle du filtre, on utilise la wobbulation : on module en fréquence le signal à la sortie du GBF

- ✘ On fixe $f_0 = \dfrac{1}{kHz}$ et donc $f_H = \dfrac{50}{kHz}$.
- ✘ On visualise le comportement fréquentiel du filtre grâce à un montage de wobbulation externe représenté figure 3.
- ✘ Les réglages à effectuer sont :
  - — Réglage de la fréquence centrale autour de la fréquence de résonance du filtre.
  - — Réglage de l'excursion en fréquence.
  - — Réglage de la vitesse.

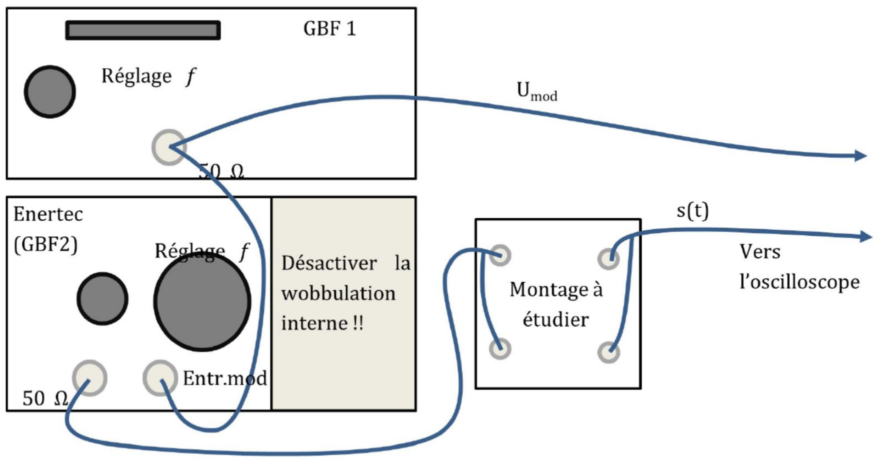

Figure 3

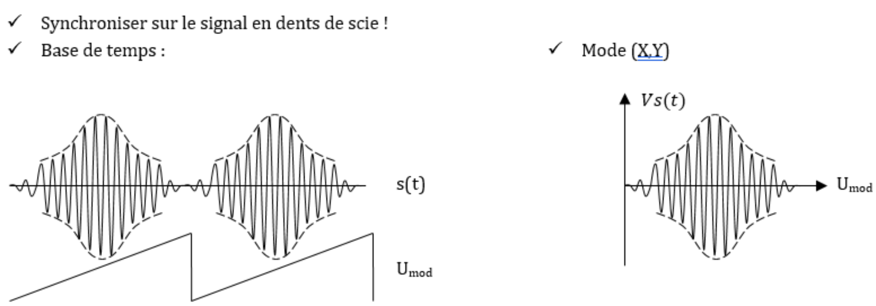

Figure 4

- ✘ Remarque : La figure obtenue n'est pas tout à fait celle d'un filtre passe-bande. En effet, le filtre étudié est un filtre à capacités commutées.

Étude point par point

L'étude point par point se fait à l'oscillscope avec le montage suivant :

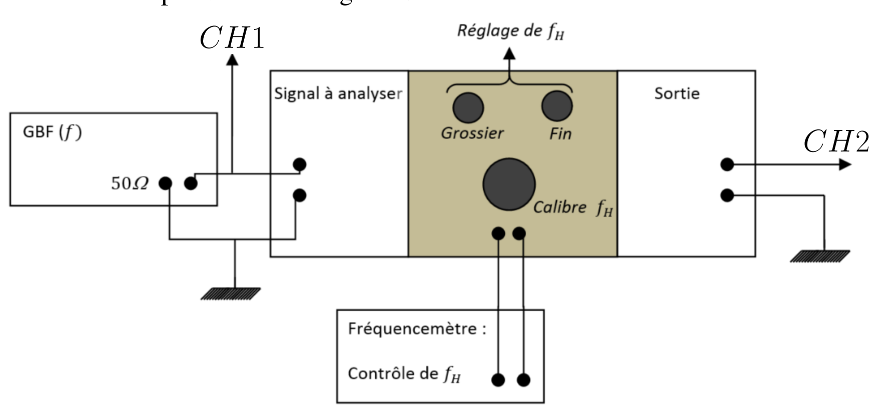

Figure 5 – Mesures à l'oscilloscope

Principe - protocole

- On fixe la fréquence f_0 et on la mesure à l'aide d'un multimètre, on obtient :

$$f_{0,th} \text{ et } u_{f_{0,th}} = \frac{a\% f_0 + bdgt}{\sqrt{3}}$$

- On vérifie rapidement la fréquence de résonance f_0 et, connaissant l'amplitude de la résonance S_{max}, on détermine l'ordre de grandeur des fréquences de coupures (obtenue pour $S_{max}/\sqrt{2}$). On constate alors que la bande passante est trés étroite : il faut adapter l'échelle correspondante en utilisant du papier semi-log à deux décades au maximum.
- On mesure simultanément f, l'amplitude de $V_e(t)$ (notée V_E) et l'amplitude de $V_s(t)$ (notée V_S) à l'oscilloscope (avec les mesures automatiques). On en déduit $\log f$ et $G_{dB} = 20 \log \frac{V_S}{V_E}$.
- On remplit le tableau suivant, en veillant à augmenter le nombre de point autour de la résonance et de la bande passante et de façon à pouvoir déterminer les asymptotes HF et BF.
- On trace alors le diagramme de Bode sur la feuille semi-log.
- A partir du graphe obtenu, on détermine :
  - $f_{0,exp}$ et $u_{f_{0,exp}}$ (par encadrement) :

$$f_{0,exp} = \frac{f_{0,max} + f_{0,min}}{2} \text{ et } u_{f_{0,exp}} = \frac{f_{0,max} - f_{0,min}}{2\sqrt{3}}$$

  - G_0 et u_{G_0} (par encadrement) :

$$G_0 = \frac{G_{0,max} + G_{0,min}}{2} \text{ et } u_{G_0} = \frac{G_{0,max} - G_{0,min}}{2\sqrt{3}}$$

  - f_{c1} et f_{c2} et $u_{f_{c1}}$ et $u_{f_{c2}}$ (par encadrement) :

$$f_{c1} = \frac{f_{c1,max} + f_{c1,min}}{2} \text{ et } u_{f_{c1}} = \frac{f_{c1,max} - f_{c1,min}}{2\sqrt{3}}$$

$$f_{c2} = \frac{f_{c2,max} + f_{c2,min}}{2} \text{ et } u_{f_{c2}} = \frac{f_{c2,max} - f_{c2,min}}{2\sqrt{3}}$$

- On en déduit :
  - Le gain maximal : $H_0 = 10^{\frac{G_0}{20}}$ et $u_{H_0} = \frac{H_0 \ln 10}{20} u_{G_0}$.
  - La bande passante : $\Delta f = f_{c2} - f_{c1}$ et $u_{\Delta f} = \sqrt{\left(u_{f_{c1}}\right)^2 + \left(u_{f_{c2}}\right)^2}$.
  - Le facteur de qualité : $Q = \frac{f_{0,exp}}{\Delta f}$ et $u_Q = Q\sqrt{\left(\frac{u_{f_{0,exp}}}{f_{0,exp}}\right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta f}}{\Delta f}\right)^2}$.
- Remarque : On vérifie la validité de la mesure de $f_{0,exp}$ en la comparant avec $f_{0,th}$.

Exemple de résultats d'élèves

- On prend :

$$f_H = 49.8 \pm 0.1\,\text{kHz}$$

et donc :

$$f_{0,th} = 996 \pm 2\,\text{Hz}$$

- On balaye rapidement en fréquence et on constate que la bande passante est de l'ordre de quelques kHz.
- On effectue les mesures points par points, on récapitule les données dans le tableau de valeur :

f (Hz)	V_E (V)	V_S (V)	$H = \dfrac{V_S}{V_E}$	$G_{dB} = 20\log H$
850	4.02	0.07	0.017	-35
900	4.02	0.15	0.037	-28
950	4.02	0.61	0.15	-16
993	4.02	3.70	0.92	-0.7
1000	4.02	3.40	0.84	-1.45
1050	4.02	0.39	0.097	-20.2
1100	4.02	0.13	0.032	-29.8

✘ On trace alors le diagramme de Bode :

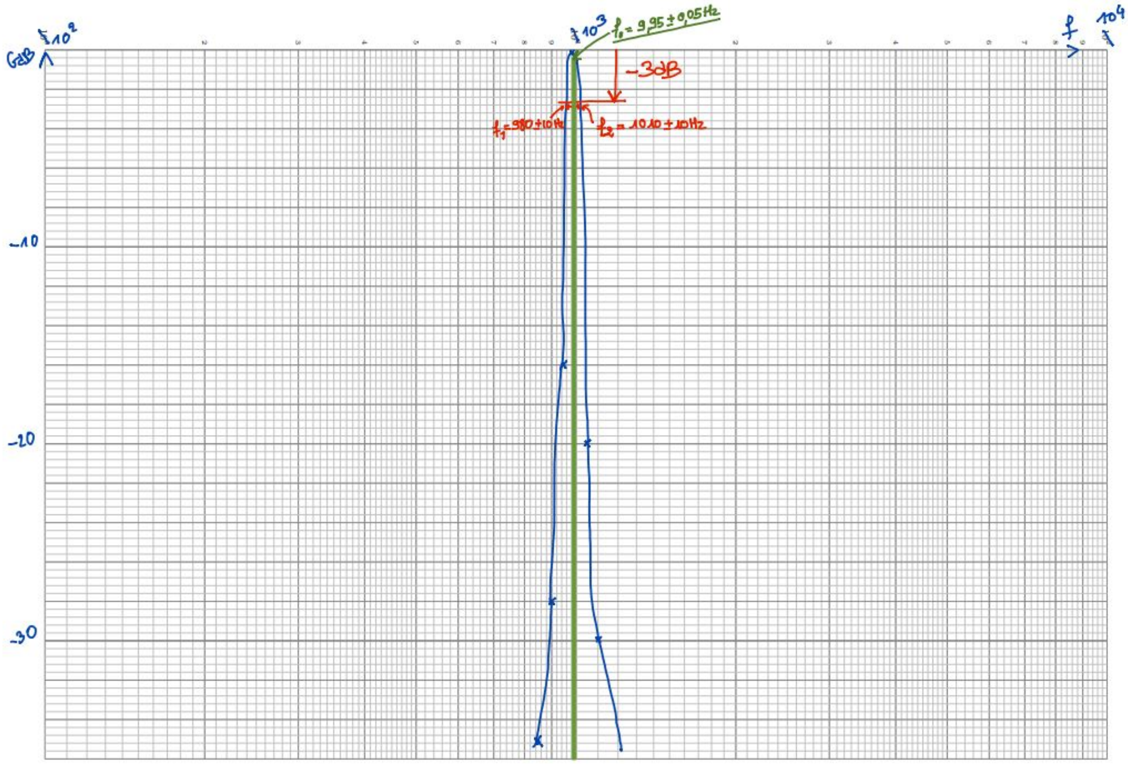

Figure 6 – Exemple de relevé d'élève

✘ On en déduit :

$$f_{0,exp} = 995 \ \pm 5\,\text{Hz}$$

$$H_{0,exp} = 1 \pm 0.1$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 30\,\text{Hz}$$

$$u_{\Delta f} = \sqrt{\left(u_{f_{c1}}\right)^2 + \left(u_{f_{c2}}\right)^2} = 14\,\text{kHz}$$

$$Q_{exp} = \frac{\Delta f}{f_{0,exp}} = 33$$

$$u_{Q,exp} = Q\sqrt{\left(\frac{u_{f_{0,exp}}}{f_{0,exp}}\right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta f}}{\Delta f}\right)^2} = 10$$

✘ On peut calculer le Z score sur la mesure de f_0 :

$$Z = \frac{f_{0,th} - f_{0,exp}}{u_{f_{0,exp}}} = 0.2$$

La mesure de f_0 peut être validée.

✘ Les mesures de Δf et Q sont accompagnées d'une incertitude trés forte : l'élève n'a pas assez augmenté le nombre de points autour de la résonance.

✘ Notons que le filtre est effectivement un passe-bande mais pas un passe-bande du second ordre : les asymptotes ont des pentes trés supérieures à 20 dB (en valeur absolue).

Analyse d'un signal périodique

✘ Les deux signaux étudiés sont périodiques : leurs spectres sont des spectres de raies. La fréquence la plus basse des spectres est le fondamental : d'après l'énoncé il faut fixer la fréquence du fondamental à $f_{fond} = 200\,\mathrm{Hz}$.

✘ On injecte le signal dans le filtre et on fait varier la fréquence f_0 depuis une fréquence légèrement inférieure à f_{fond}. Chaque fois que le signal de sortie est quantitatif, la fréquence f_0 coïncide avec une harmonique présente dans le spectre. On remplit alors le tableau suivant :

Fréquence	f_{fond}	f_k	...
Rapport des fréquences (k)	1	$k = \dfrac{V_k}{V_{fond}}$	...
Amplitude	V_{fond}	V_k	...

✘ Afin de vérifier l'évolution de l'amplitude des harmoniques en fonction de la fréquence, on effectue une régression linéaire. Plus précisément, on trace :

— Pour le signal créneaux : V_k en fonction de $1/k$.

— Pour le signal en dent de scie : V_k en fonction de $1/k^2$.