

Mines MP Physique II

Emmanuel Loyer (loyer.cpge@orange.fr) et Sylvain Condamin (condamin@phare.normalesup.org)

I. - Masses du deuteron et du deutérium

1. Soit x le rapport entre le nombre d'atomes de deutérium et le nombre (total?) d'atomes d'hydrogène; $x = 1/6420$. La fraction massique de deutérium s'écrit

$$x_m = \frac{x m_D}{x m_D + (1-x) m_{1H}} = \frac{x (m_p + m_n)}{x (m_p + m_n) + (1-x) m_p} \simeq x \frac{m_p + m_n}{m_p} \simeq 2x = \frac{1}{3210} \simeq 3,1 \cdot 10^{-4}$$

2. $m_{\text{deuteron}}/m_{\text{deutérium}} = (m_p + m_n)/(m_p + m_n + m_e) \simeq (1 + m_e/(2m_p))^{-1} \simeq 1 - m_e/(2m_p) = 1,0$ à 2 chiffres significatifs (avec 4 chiffres significatifs, $m_{\text{deuteron}}/m_{\text{deutérium}} = 0,999\ 7$).

3. Hypothèse : pour fabriquer une molécule, on prend un atome d'oxygène et on tire au hasard deux atomes d'hydrogène (hydrogène 1 ou deutérium). Lors d'un tirage, on note $p = 1/6420$ la probabilité d'obtenir un atome d'hydrogène 1 et $p' = 1 - p$ la probabilité d'obtenir un atome de deutérium. Les deux tirages successifs sont supposés indépendants. La probabilité d'obtenir de l'eau lourde est $p_{D_2O} = p^2$, et la probabilité d'obtenir de l'eau semi-lourde est $p_{HDO} = C_2^1 p p'$. On identifie ces probabilités aux proportions

$$p_{D_2O} = x^2 \simeq 2,4 \cdot 10^{-8} \quad \text{et} \quad p_{HDO} = 2x = 3,1 \cdot 10^{-4}$$

4. L'eau lourde est utilisée comme modérateur dans certains réacteurs nucléaires.

II. Étude classique du deutérium

II.A. - Spectroscopie atomique et découverte du deutérium

5. Pour la série de Balmer $\Delta E_n = E_n - E_2 = (E_0/2)/(1/4 - 1/n^2)$ et $\Delta E_n = h \nu_c = hc/\lambda_n$ d'où

$$\lambda_n = \frac{hc}{\frac{E_0}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)} \quad \lambda_3 = 0,66 \text{ } \mu\text{m (rouge)} \quad \lambda_4 = 0,49 \text{ } \mu\text{m (bleu)}$$

6. Pour ^1H et pour D on a respectivement $\lambda_n = \frac{hc}{\frac{E_0(^1\text{H})}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}$ et $\lambda'_n = \frac{hc}{\frac{E_0(\text{D})}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}$

$$\text{d'où} \quad \delta = \frac{\lambda'_n - \lambda_n}{\lambda_n} = \frac{\frac{1}{E_0(\text{D})} - \frac{1}{E_0(^1\text{H})}}{\frac{1}{E_0(^1\text{H})}} = \frac{E_0(^1\text{H})}{E_0(\text{D})} - 1 = \frac{m'_e(^1\text{H})}{m'_e(\text{D})} - 1 = \frac{\frac{m_e}{1 + m_e/m_p}}{\frac{m_e}{1 + m_e/(m_p + m_n)}} - 1$$

$$\text{soit} \quad \delta \simeq \frac{1 + m_e/(2m_p)}{1 + m_e/m_p} - 1 \simeq (1 + m_e/(2m_p))(1 - m_e/m_p) - 1 = -\frac{m_e}{2m_p} \quad \text{d'où } \kappa = 2$$

$\delta = -2,7 \cdot 10^{-4}$, ce qui correspond à écart de 0,1 nm sur λ_4 . Il faut des mesures spectroscopiques très précises et de plus on est proche de l'ordre de grandeur de la largeur naturelle des raies.

II.B. - Rôle de la température de l'échantillon

7. Loi générale: $\vec{v}_{M/\mathcal{K}} = \vec{v}_{M/\mathcal{K}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{K}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}$ (hors programme? et inutile pour la suite) ou plus simplement $\vec{v}_{M/\mathcal{K}} = \vec{v}_{M/\mathcal{K}'} + \vec{v}_{e\mathcal{K}'/\mathcal{K}}(M)$.

8. Comme \mathcal{K}' est en translation par rapport à \mathcal{K} on a $\vec{v}_{M/\mathcal{K}} = \vec{v}_{M/\mathcal{K}'} + \vec{v}_{E/\mathcal{K}}$ soit en projection $\dot{x} = \dot{x}' + V_x$, $\dot{y} = \dot{y}' + V_y$ et $\dot{z} = \dot{z}' + V_z$. Comme V_x , V_y et V_z sont indépendants du temps, ces relations s'intègrent en

$$x' = x - V_x t + x'_0 \quad y' = y - V_y t + y'_0 \quad z' = z - V_z t + z'_0$$

9. Pour une OPPM dans le vide $k = \omega/c$.

10. On remplace, dans l'expression de \underline{S} , l'expression de x' trouvé à la question 8 :

$$\underline{S} = S_0 \exp [j(k x' - \omega t)] = S_0 \exp [j(k x - k V_x t + k x'_0 - \omega t)] = S_0 \exp [j(k x - \omega_{\text{app}} t + \varphi)]$$

avec $\varphi = k x'_0$ et $\omega_{\text{app}} = \omega + k V_x$ soit

$$\omega_{\text{app}} = \omega \left(1 + \frac{V_x}{c} \right)$$

11. Le facteur de Boltzmann s'écrit $e^{-E/k_B T}$; on identifie donc αv^2 et $E/k_B T$ avec $E = m_p v^2/2$ soit $\alpha = m_p/(2k_B T)$.

12. On obtient une gaussienne (identique à celle tracée dans l'énoncé).

13. On cherche les points d'inflexion de la courbe représentative de f ; on calcule la dérivée seconde de f :

$$f(v) = K e^{-\alpha v^2} \quad f'(v) = -2K\alpha v e^{-\alpha v^2} \quad f''(v) = -2K\alpha e^{-\alpha v^2} + K(2\alpha v)^2 e^{-\alpha v^2} = 2K\alpha(-1 + 2\alpha v^2) e^{-\alpha v^2}$$

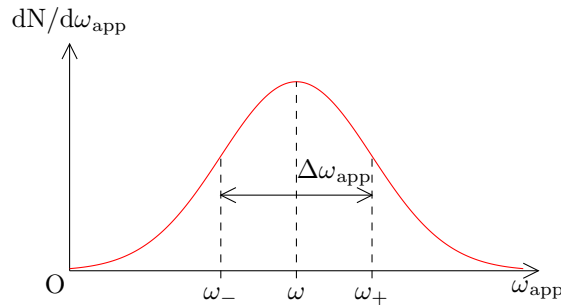
La condition $f''(v_{\pm}) = 0$ donne $v_{\pm} = \pm 1/\sqrt{2\alpha}$ et ainsi $\Delta v = v_+ - v_- = \sqrt{2/\alpha} = \sqrt{4k_B T/m_p}$

14. La relation caractérisant l'effet Doppler s'écrit aussi $V_x = c(\omega_{app}/\omega - 1)$. Le nombre d'atome dont la valeur V_x prend une valeur comprise en v et $v + dv$ correspond au nombre d'atomes émettant une onde dont la pulsation est comprise entre ω_{app} et $\omega_{app} + d\omega_{app}$:

$$dN = K e^{-\alpha v^2} dv = K e^{-\alpha c^2(\omega_{app}/\omega - 1)^2} \frac{c}{\omega} d\omega_{app} \quad \text{soit} \quad \frac{dN}{d\omega_{app}} = K' \exp \left[-\alpha \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 (\omega_{app}^2 - \omega^2) \right]$$

On obtient de nouveau une distribution gaussienne; elle est maximum quand $\omega_{app} = \omega$; sa largeur est caractérisée par $\alpha' = \alpha(c/\omega)^2$ d'où

$$\Delta\omega_{app} = \sqrt{\frac{4k_B T}{m_p} \frac{\omega}{c}}$$



15. Soit T_ℓ la température pour laquelle $\Delta\omega_{app}/\omega = 5.10^{-6}$. Il vient $T_\ell = (5.10^{-6})^2 m_p c^2/4k_B$. La condition recherchée est donc $T \ll T_\ell \simeq 67 \text{ K}$; il faut travailler à très basse température pour distinguer ^1H et D grâce à leur spectre d'émission.

III. - Le deuton

III.A. - Potentiels radiaux en physique quantique

16. Relation de Planck-Einstein $E = \hbar\omega$.

17. Partie angulaire du Laplacien de Ψ : $(\Delta_{ang.} \Psi)(r, \theta, \varphi, t) = \frac{R(r)}{r} (\Delta_{ang.} Y)(\theta, \varphi) e^{-j\omega t}$. Partie radiale:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r}(r, \theta, \varphi, t) = \left(\frac{R'(r)}{r} - \frac{R(r)}{r^2} \right) Y(\theta, \varphi) e^{-j\omega t} \quad \text{et} \quad r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r, \theta, \varphi, t) = [rR'(r) - R(r)] Y(\theta, \varphi) e^{-j\omega t}$$

d'où
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) (r, \theta, \varphi, t) = r R''(r) Y(\theta, \varphi) e^{-j\omega t}$$

ainsi
$$(\Delta \Psi)(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{r^2} \left[r R''(r) Y(\theta, \varphi) + \frac{R(r)}{r} (\Delta_{ang.} Y)(\theta, \varphi) \right] e^{-j\omega t}$$

L'équation de Schrödinger s'écrit donc

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{R''(r)}{r} Y(\theta, \varphi) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{R(r)}{r^3} (\Delta_{ang.} Y)(\theta, \varphi) + E_p(r) \frac{R(r)}{r} Y(\theta, \varphi) = E \frac{R(r)}{r} Y(\theta, \varphi)$$

On sépare les variables en multipliant par r^3 et en divisant par $R(r) Y(\theta, \varphi)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + r^2 E_p(r) - r^2 E = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{(\Delta_{ang.} Y)(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)}$$

soit
$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} - \frac{2\mu}{\hbar^2} r^2 E_p(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} r^2 E = -\frac{(\Delta_{ang.} Y)(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = C \quad \text{avec } C \text{ constant}$$

car les variables sont séparées. On en déduit $(\Delta_{ang.} Y)(\theta, \varphi) = -C Y(\theta, \varphi)$; il vient de plus

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} R''(r) + \left[E_p(r) + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2} \right] R(r) = E R(r)$$

N. B. : la probabilité élémentaire de détecter la particule entre r et $r + dr$ s'écrit

$$d\mathcal{P} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\Psi(r, \theta, \varphi, t)|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = |R(r)|^2 dr \times \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |Y(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = |R(r)|^2 dr$$

si la partie angulaire Y est normalisée. Ainsi R peut être interprété comme la partie spatiale d'une fonction d'onde unidimensionnelle définie sur \mathbb{R}^+ (la dimension de R diffère donc de celle d'une fonction d'onde à trois dimensions).

18. L'énergie cinétique radiale s'identifie au terme $-\frac{\hbar^2}{2\mu} R''(r)$, l'énergie potentielle effective au terme $E_p(r) + \frac{\hbar^2 C}{2\mu r^2}$

et le moment cinétique à $\sqrt{C} \hbar$.

19. Pour une fonction d'onde purement radiale (qui ne dépend ni de θ ni de φ), Y est constant donc $\Delta_{\text{ang.}} Y = 0$ et ainsi $C = 0$.

20. Avec $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$, l'équation $(\Delta_{\text{ang.}} Y)/Y = -C$ s'écrit

$$\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi) \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -C$$

Il suffit de multiplier par $\sin^2 \theta$ pour séparer les variables :

$$\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + C \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = K$$

où K est une constante par les variables sont séparées. Ainsi

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + C \sin^2 \theta \Theta(\theta) - K \Theta(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + K \Phi(\varphi) = 0$$

21. La fonction d'onde vérifie $\Psi(r, \theta, \varphi + 2\pi, t) = \Psi(r, \theta, \varphi, t)$ dont $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. La fonction Φ est périodique si et seulement si $K > 0$; on écrit $K = m^2$ et ainsi, à une constante multiplicative près $\Phi(\varphi) = \exp(j m \varphi)$; la période de Φ est 2π si et seulement si $m \in \mathbb{Z}$.

22. Avec $K = m^2$, l'équation vérifiée par Θ s'écrit : $\sin^2 \theta \Theta''(\theta) + \cos \theta \sin \theta \Theta'(\theta) + C \sin^2 \theta \Theta(\theta) - m^2 \Theta(\theta) = 0$. On cherche alors Θ sous la forme $\Theta(\theta) = f(x)$ avec $x = \cos \theta$; comme

$$\frac{d}{d\theta} = \sin \theta \frac{d}{dx}$$

il vient
$$\sin^2 \theta \frac{d}{dx} \left(\sin^2 \theta \frac{df}{dx} \right) + C \sin^2 \theta f(x) = m^2 f(x)$$

et comme $\sin^2 \theta = 1 - x^2$
$$(1 - x^2) \frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{df}{dx} \right) + C (1 - x^2) f(x) = m^2 f(x)$$

On obtient finalement l'équation différentielle

$$(1 - x^2)^2 f''(x) - 2x(1 - x^2) f'(x) + C(1 - x^2) f(x) - m^2 f(x) = 0$$

Si f est un polynôme de degré ℓ , les trois premiers termes sont de degré $\ell + 2$, le dernier terme est de degré ℓ . Écrivons uniquement le terme de degré $\ell + 2$:

$$x^4 [a_\ell \ell (\ell - 1) x^{\ell-2}] + 2x^3 [a_\ell \ell x^{\ell-1}] - C x^2 (a_\ell x^\ell) = 0 \quad \text{soit} \quad [\ell(\ell - 1) + 2\ell - C] a_\ell x^{\ell+2} = 0$$

Ainsi $C = \ell(\ell + 1)$ et $\sigma = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \hbar$.

III.B. - Énergie de liaison du deuton

23. L'équation de Schrödinger s'écrit, pour $0 < r < a$, $R''(r) + k^2 R(r) = 0$ avec $k = \sqrt{2\mu(E + V_0)}/\hbar$; d'où la solution $R(r) = A \sin(kr) + A' \cos(kr)$. On impose de plus $R(0) = 0$ (sinon Ψ diverge en $r = 0$) et ainsi $A' = 0$. De même, pour $r > a$, l'équation de Schrödinger s'écrit $R''(r) - K^2 R(r) = 0$ avec $K = \sqrt{-2\mu E}/\hbar$, d'où la solution $R(r) = B \exp(-Kr) + B' \exp(Kr)$. On impose $B' = 0$ pour que la fonction d'onde soit normalisable.

24. Comme la discontinuité d'énergie potentielle est finie en a , R et R' sont continues en a soit

$$A \sin(ka) = B e^{-Ka} \quad \text{et} \quad k A \cos(ka) = -B K e^{-Ka}$$

25. En posant $X = ka$ et $Y = Ka$, il vient

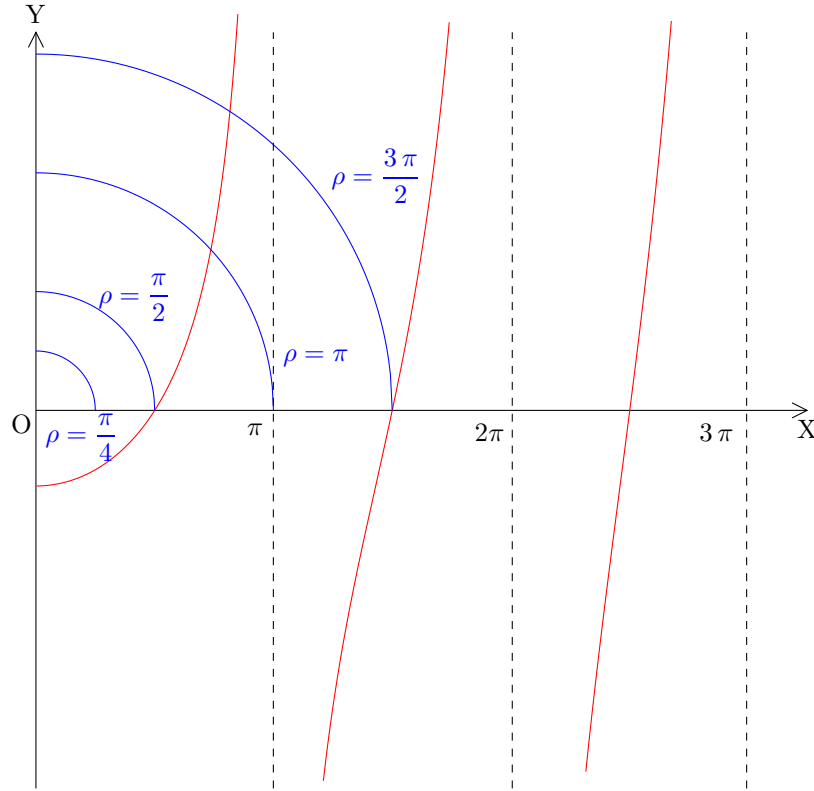
$$X^2 + Y^2 = (k^2 + K^2) a^2 = \left(\frac{2\mu(E + V_0)}{\hbar^2} + \frac{-2\mu E}{\hbar^2} \right) a^2 = \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2} = \rho^2$$

Par ailleurs, les conditions de la question précédente fournissent le système linéaire suivant pour A et B

$$\begin{cases} \sin(X) A - e^{-Y} B = 0 \\ X \cos(X) A + Y e^{-Y} B = 0 \end{cases}$$

La solution $(A, B) = (0, 0)$ est unique sauf si le déterminant du système est nul. Cette condition s'écrit $\sin(X) Y + X \cos(X) = 0$ ou $Y = -X \cotan X$.

26. Sont représentés en blue différents cercles d'équations $X^2 + Y^2 = \rho^2$ pour différentes valeurs de ρ ; en rouge, la courbe représentative de la fonction $X \rightarrow -X \cotan X$.



27. Le graphe précédent montre qu'une solution existe si $\rho \geq \pi/2$ soit

$$V_0 \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 \mu a^2} = V_{\min}$$

On peut exclure le cas où $V_0 = V_{\min}$ qui correspond à $K = 0$ soit $E = 0$.

28. De même, il existe plus d'une solution si $\rho \geq 3\pi/2$; on se limite donc à $\rho < 3\pi/2$ soit

$$V_0 < 9 \frac{\pi^2 \hbar^2}{8 \mu a^2} = V_{\max}$$

29. L'existence d'un état lié impose $V_0 \geq V_{\min}$; le fait que l'énergie de cet état lié est non-nulle impose $V_0 > V_{\min}$. De même, l'absence d'un deuxième état lié impose $V_0 < V_{\max}$. AN: $V_{\min} = 23 \text{ MeV}$, $V_{\max} = 2,1 \cdot 10^2 \text{ MeV}$.

30. Si $V_0 = V_{\min}$ alors $Y = 0$ donc $K = 0$ et $E = 0$.

31. On constate que $-E_d$ est petit devant V_{\min} . Ainsi $K = \sqrt{-2\mu E_d}/\hbar$ est petit devant $\sqrt{2\mu V_{\min}}/\hbar$ et $Y = Ka$ est petit devant $\sqrt{2\mu V_{\min}}/\hbar \times a = \pi/2$. Ainsi Y est proche de 0; on en déduit que X est proche de $\pi/2$ et donc que ρ est proche de $\pi/2$, ce qui implique que V_0 est proche de V_{\min} .

32. Comme X est voisin de $\pi/2$, écrivons $X = \pi/2 + x$ avec $0 < x \ll \pi/2$. On en déduit

$$Y = -X \cotan(X) = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cotan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \tan x \simeq \frac{\pi}{2} x$$

à l'ordre 1 en x . Par ailleurs, $Y = Ka = a\sqrt{-2\mu E_d}/\hbar$ on en déduit $x = 2a\sqrt{-2\mu E_d}/(\pi\hbar)$, puis $X = \pi/2 + x$. L'équation du cercle $X^2 + Y^2 = \rho^2$ s'écrit

$$\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} x\right)^2 = \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}$$

Comme nous avons travaillé à l'ordre 1 en x , il ne faut garder que les termes d'ordre 1 en x dans cette équation; or, cela ne conduit pas au résultat demandé par l'énoncé. Pour arriver au résultat de l'énoncé, il faut conserver le terme d'ordre 2 en x dans X , mais négliger celui de Y et écrire

$$\left(\frac{\pi}{2} + x\right)^2 = \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}$$

ce qui est incorrect. On arrive cependant au résultat de l'énoncé

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu V_0 a^2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2a\sqrt{-2\mu E_d}}{\pi\hbar} \right]^2$$

Si l'on travaille correctement, en ne gardant que les termes d'ordre 1 en x de l'équation $X^2 + Y^2 = \rho^2$, il reste

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi x = \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}$$

qui donne

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu V_0 a^2} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2a\sqrt{-2\mu E_d}}{\hbar} \right]$$

Notons de plus que le raisonnement est basé sur l'approximation $\tan x \simeq x$ qui est discutable ici car on obtient $x \simeq 0,31$.

33. On obtient $V_0 = 33 \text{ MeV}$ qui est (assez) grand devant $-E_d$.