Exercice 11

On note :

- ✘ $\mathcal{R}_1$ le référentiel géocentrique supposé galiléen,
- ✘ $\mathcal{R}_T$, le référentiel terrestre, en rotation pure dans $\mathcal{R}_1$ à la pulsation :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

- ✘ R, le rayon de la terre et M la masse de la terre,
- ✘ m la masse du satellite.

On appelle trace T du satellite S, l'intersection du segment (OS) et de la surface de la terre.

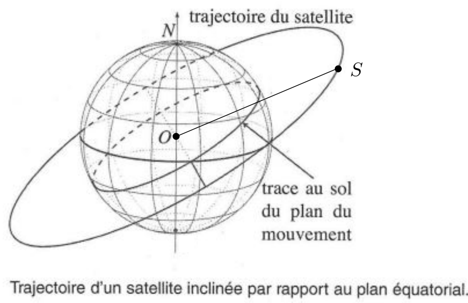


Figure 1 – Trace d'un satellite

1 Satellite géostationnaire

- ✘ Un satellite géostationnaire est immobile dans le référentiel terrestre : sa trace est donc fixe dans $\mathcal{R}_T$
- ✘ Approche qualitative : La figure 1 montre la trajectoire d'un satellite dont le plan orbital est incliné par rapport au plan équatorial terrestre, ainsi que l'intersection du plan du mouvement avec la sphère terrestre. Avec cette inclinaison, le satellite est situé tantôt au dessus de l'hémisphère nord et tantôt au dessus de l'hémisphère sud. Il n'est pas immobile pour un observateur terrestre qui va, au minimum, observer un mouvement apparent d'oscillations nord-sud. Le seul moyen d'éviter ce mouvement est d'annuler l'inclinaison de l'orbite. Le plan de l'orbite d'un satellite géostationnaire coïncide nécessairement avec le plan équatorial de la Terre. Cette situation correspond à une orbite circulaire de période $T_0 = 24\,\mathrm{h}$.
- ✘ Approche quantitative :
  - ☛ Mouvement dans le plan équatorial : Le TMC appliqué à S dans le référentiel terrestre donne :

$$\vec{0} = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OS} \wedge (-m\vec{a}_e)$$

Où :

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{OS^3}\overrightarrow{OS} \Rightarrow \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OS} \wedge (-m\vec{a}_e) = \vec{0}$$
$$\vec{a}_e = -\Omega^2\overrightarrow{HS} \Rightarrow m\Omega^2\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{HS} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OS} \parallel \overrightarrow{HS}$$

où H est le projeté de S sur l'axe de rotation.

Le mouvement est donc dans le plan de l'équateur et on a :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{HS}$$
$$\vec{L}_{O,\mathcal{R}_1}(S) = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{V}_{\mathcal{R}_1}(S) = L_0\vec{e}_z$$

où L_0 est une constante du mouvement (mouvement à force centrale dans $\mathcal{R}_1$).

☛ Mouvement circulaire : Sachant que $\vec{V}_{\mathcal{R}_1}(S) = \vec{V}_{\mathcal{R}_T}(S) + \vec{V}_e(S) = \vec{V}_e(S) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OS}$, le moment cinétique précédent s'écrit :

$$\vec{L}_{O,\mathcal{R}_1}(S) = L_0 \vec{e}_z = m\overrightarrow{OS} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OS}\right) = m\Omega OS^2 \vec{e}_z$$

Sachant que m et Ω sont constants, on en déduit que OS est constant : le mouvement est circulaire de rayon $r = OS$

☛ Altitude du satellite : on utilise la troisième loi de Kepler, en sachant que la période de rotation est T_0 et que le rayon de l'orbite est $r = R + h$:

$$\frac{T_0^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow h = \left(\frac{GMT_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$$

AN : $h = 36 \times 10^3$ km.

Pourquoi ces satellites ne sont pas adaptés pour les russes ?

En considérant que un satellite peut observer les points sur la surface de la terre directement atteignables par les OEM (en ligne droite), les derniers points pouvant être vus sont à une latitude λ_1 représenté figure 2

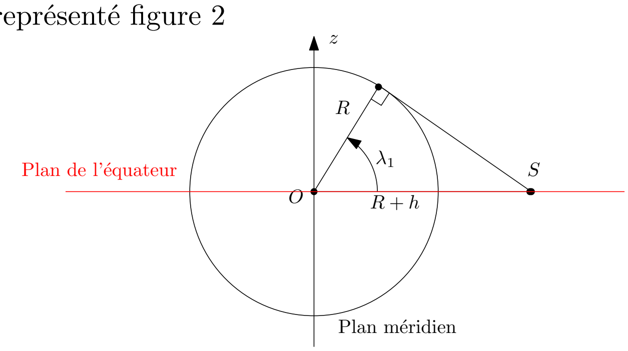


Figure 2 – Limite d'observation d'un satellite géostationnaire

Avec :

$$\cos\lambda_1 = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \lambda_1 = 83\,^\circ$$

2 Satellite Molniya

Les satellites russes Molniya, sont des satellites dont la trajectoire présente une forte excentricité, comme représenté figure 3.

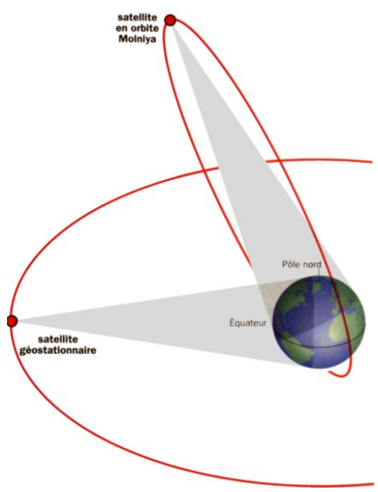
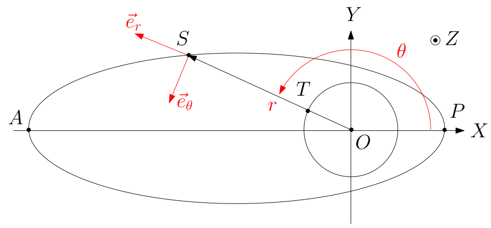


Figure 3 – Satellite Molniya vs satellite géostationnaire

Dans la suite, on se place dans le référentiel géocentrique et on travaille dans le plan de la trajectoire, comme représenté figure 4.

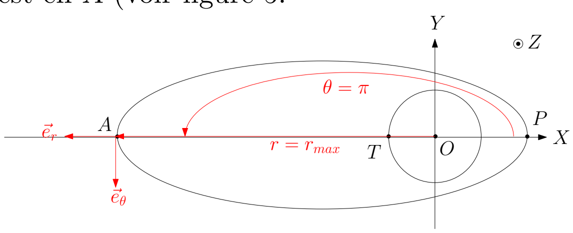


Plan de la trajectoire (Attention (Oz) n'est pas perpendiculaire à ce plan)

Figure 4 – Trajectoire elliptique

2.1 Vitesse de A

On considère le cas où S est en A (voir figure 5.



Plan de la trajectoire (Attention (Oz) n'est pas perpendiculaire à ce plan)

Figure 5 – Position à l'apogée

- ✘ En A, dans le référentiel géocentrique, le satellite a une vitesse purement orthoradiale (sommet de l'ellipse) :

$$\vec{V}_A = r_{max}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

- ✘ Le point M, dans le référentiel géocentrique, a donc une vitesse :

$$\vec{V}_M = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

- ✘ Le point T, lié à la terre et en rotation de rayon $R\cos\lambda$, a lui une vitesse :

$$\vec{V}_T = R\cos\lambda\vec{e}_\theta$$

✘ En sachant que en A le satellite est immobile par rapport à la terre, on a :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_T \Rightarrow \dot{\theta} = \cos\lambda\Omega$$

Soit :

$$\vec{V}_A = r_{max}\cos\lambda\Omega\vec{e}_\theta \tag{1}$$

2.2 Excentricité de l'ellipse

Rappel (hors programme)

L'équation polaire de l'ellipse est de la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{2}$$

où :

$$p = \frac{L_0^2}{GMm^2} \tag{3}$$

est le paramètre de la conique, e l'excentricité de la conique.

> ❗ Cette expression est valable uniquement si $\theta = 0$ est défini au périgée (r est minimal)

✘ On écrit facilement les expression de r_{max} et de r_{min} :

$$r_{max} = r(\theta = \pi) = \frac{p}{1 - e} \tag{4}$$

$$r_{min} = r(\theta = 0) = \frac{p}{1 + e} \tag{5}$$

✘ On en déduit alors a le demi grand axe de l'ellipse :

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{p}{1 - e^2} \tag{6}$$

Avec :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{7}$$

✘ Le moment cinétique de S en A vaut donc :

$$L_0 = mr_{max}V_A = mr_{max}^2\cos\lambda\Omega = \frac{\pi m r_{max}^2\cos\lambda}{T} = \frac{\pi m p^2\cos\lambda}{(1-e)^2T}$$

En utilisant les équations 1 et 4.

✘ En utilisant l'équation 3, puis le fait que $T = 2T_0$, on obtient :

$$GM = \frac{\pi^2p^3\cos^2\lambda}{(1-e)^4T^2} = \frac{\pi^2a^3(1-e^2)^3\cos^2\lambda}{(1-e)^4T^2}$$

D'où :

$$\frac{1-e}{(1+e)^3} = \frac{\cos^2\lambda}{4} \tag{8}$$

AN : pour $\lambda = 63.5\,°$, on trouve : $e = 0.738$

- En utilisant :
  - l'équation 7, on calcule a,
  - on en déduit p grâce à l'équation 6,
  - on en déduit r_{max} et r_{min} grâce aux équations 4 et 5,
  - on en déduit enfin les altitudes de A et de P :

$$h_A = r_{max} - R = 39.8 \times 10^3\,\mathrm{km}$$

$$h_P = r_{min} - R = 576\,\mathrm{km}$$

2.3 Excentricité maximale

- En exprimant que la satellite ne doit pas toucher le sol en P ($r_{min} > R$), on tire de l'équation 5, la valeur critique de l'excentricité :

$$e_c = 1 - \frac{R}{a} = 0.760$$

- En utilisant l'équation 8, on en déduit la ltitude critique :

$$\lambda_c = 65.2\,^\circ$$