

On modélise le système comme suit.

- L'écoulement d'eau est considéré comme parfait, incompressible et stationnaire.
- L'eau est aspirée par la pompe dans l'eau du lac sous une pression proche de la pression atmosphérique ($P_0 = 10^5$ Pa) avec une vitesse V_0 négligeable devant V_1 et V_2 , (point (0) sur la figure 1).
- À la sortie de la pompe, l'eau est dirigée dans une conduite de section $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$, avec une vitesse V_1 sous une pression P_1 , la conduite étant située proche du niveau de l'eau du lac c'est-à-dire proche de $z = 0$, (point (1) sur la figure 1). En utilisant la photo de la conduite, on prend $d_1 \approx 30$ cm.
- À la sortie de la tuyère, on considère que la pression du jet d'eau est uniforme sur une section et égale à la pression atmosphérique : $P_2 \approx P_0$; la vitesse vaut V_2 . Le diamètre du jet d'eau est celui de la tuyère : d'après la photo de la tuyère de sortie ce diamètre est $d_2 \approx 10$ cm, (point (2) sur la figure 1)).
- Le jet d'eau à l'air libre, est envoyé verticalement et s'arrête pour une hauteur h . La pression vaut alors $P_3 = P_0$ et la vitesse de l'écoulement est $V_3 \approx 0$, (point (3) sur la figure 1)). En utilisant la photo du jet et en utilisant la hauteur d'un étage d'un immeuble haussmannien de l'ordre de 4 m, on trouve $h \approx 150$ m.
- On note $D_m = \rho D_v = \rho V_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = \rho V_2 \frac{\pi d_2^2}{4}$ le débit massique du jet, où ρ est la masse volumique de l'eau.
- On note \mathcal{P} la puissance de la pompe.

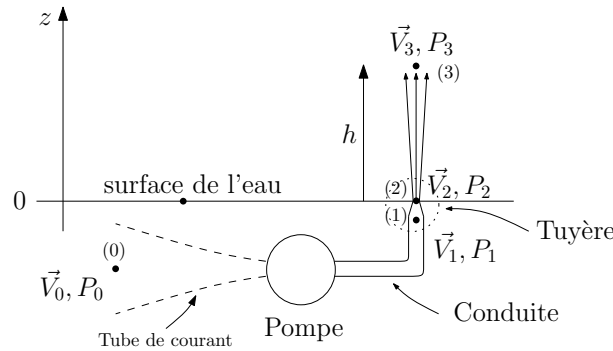


FIGURE 1 – Modélisation du jet d'eau

Un bilan d'énergie cinétique entre les points (0) et (1) donne :

$$\frac{D_m}{2} (V_1^2 - V_0^2) = \mathcal{P} + \frac{D_m}{\rho} (P_0 - P_1),$$

soit :

$$\mathcal{P} = \frac{D_m}{2} (V_1^2) + \frac{D_m}{\rho} (P_1 - P_0).$$

On applique le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2) puis (2) et

(3) :

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + P_0 = P_0 + \rho gh,$$

soit :

$$V_2 = \sqrt{2gh}.$$

$$P_1 - P_0 = \frac{1}{2}\rho (V_2^2 - V_1^2) = \rho gh - \frac{1}{2}\rho V_1^2.$$

Dans l'expression de V_2 , on reconnaît tout simplement la vitesse qu'il faut fournir à une goutte d'eau (échelle mésoscopique) pour qu'elle monte à une hauteur h , en supposant que son énergie mécanique se conserve.

En utilisant le débit volumique, on détermine V_1 et D_m :

$$D_m = \rho \frac{\pi d_2^2}{4} V_2 \text{ et } V_1 = \frac{d_2^2}{d_1^2} V_2.$$

En remplaçant $P_1 - P_0$ dans l'expression de la puissance \mathcal{P} , on obtient :

$$\mathcal{P} = D_m gh.$$

Applications numériques :

- $V_2 = 54 \text{ m/s} = 2 \times 10^2 \text{ km/h}$, $V_1 = 6.0 \text{ m/s} = 22 \text{ km/h}$,
- $D_m = 4.3 \times 10^{-1} \text{ m}^3/\text{s}$, $P_1 = 16 \text{ bar}$,
- $\mathcal{P} = 0.63 \text{ MW}$.

En considérant que le rendement de la pompe est de l'ordre de 80%, on obtient une puissance d'environ 800 kW.

En pratique, les pompes ont chacune une puissance de 500 kW, ce qui fait une puissance totale de 1 MW. L'ordre de grandeur obtenu est donc plutôt bon. L'écart, de l'ordre de 20%, est lié aux hypothèses faites et notamment :

- non prise en compte des pertes de charge dans la conduite (pertes de charge régulières et singulières) ;
- non prise en compte de la perte de charge au niveau de la tuyère (perte de charge singulière) ;
- imperfection de l'écoulement de l'eau dans l'air, à cause des frottements de l'air ;
- la pression et la vitesse ne sont pas uniformes sur une section du jet de sortie de conduite : sur les bords du jet, la pression vaut effectivement P_0 ; par contre, au centre du jet, il doit exister une surpression qui diminue très rapidement avec la hauteur ;
- il est notoirement connu que la hauteur du jet d'eau est moins importante en l'absence de vent horizontal, toutes choses égales par ailleurs ; ceci prouve qu'en l'absence de vent, les gouttes d'eau retombant verticalement vers le lac, entrent en collision avec les gouttes d'eau ascendantes, ce qui freine leur ascension, phénomène non pris en compte dans notre modèle.