

MULTIPLIEUR - DETECTION SYNCHRONE

MATERIEL A DISPOSITION :

- ✓ 1 Oscilloscope Techtronic
- ✓ 1 GBF Métrix
- ✓ 1 GBF ENERTEC
- ✓ Carte d'acquisition pour LATIS-PRO
- ✓ 1 alimentation +15V/-15V
- ✓ AO : TL081
- ✓ 2 multiplieurs AD633
- ✓ 1 plaquette LAB
- ✓ Petits Fils courts
- ✓ Montage déphaseur « tout fait » à 1.6kHz.
- ✓ 1 boîte de composants (verte).
- ✓ 1 multimètre FLUKE.
- ✓ 1 diode à jonction libres 1N4007
- ✓ Condensateurs libres : 3,3nF ; 10nF ; 100nF ; 1μF
- ✓ Résistances libres : 220Ω ; 1kΩ ; 1,5kΩ ; 4,7kΩ ; 100kΩ
- ✓ 2 câbles coaxiaux + prises en « T »
- ✓ Les notices des oscilloscopes, des GBF, des multimètres.

PREREQUIS :

- ✓ Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier, spectre de Fourier.
- ✓ Filtres passe-bas, filtres passe-haut.
- ✓ Détecteur de crête.
- ✓ Notion de valeur efficace, valeur efficace vraie.

TRAVAIL A EFFECTUER :

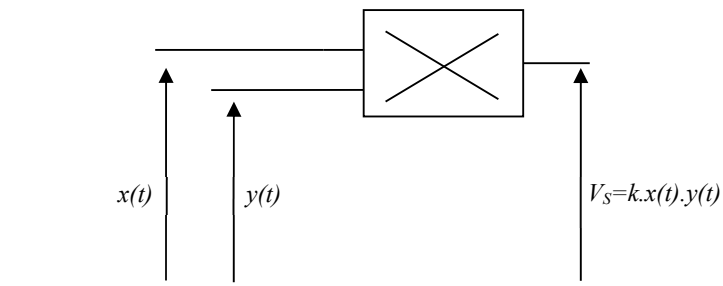
- ✓ Lire le sujet dans son intégralité.
- ✓ Répondre aux questions des parties expérimentales.

I. APPROCHE THEORIQUE : DETECTION SYNCHRONE

1. LE MULTIPLIEUR ANALOGIQUE

Un multiplieur analogique est un composant électronique permettant de multiplier 2 tensions $x(t)$ et $y(t)$ pour obtenir le signal de sortie : $s(t) = k \times x(t) \times y(t)$

Le schéma bloc d'un tel opérateur est le suivant :



a. LE COMPOSANT :

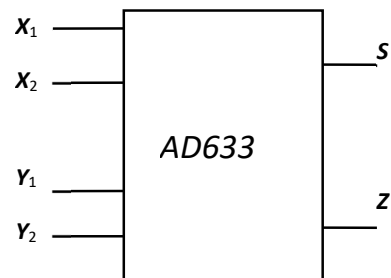
- On utilise un circuit intégré multiplieur analogique AD633.

Il réalise l'opération
$$S = \frac{(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2)}{K} + Z$$
 où $K = \frac{1}{k} = 10V$.

- Pour les manipulations de multiplication sans offset, on prend $Z = 0$ (mise à la masse).
- En considérant : $x(t) = (X_1 - X_2)$, $y(t) = (Y_1 - Y_2)$, $V_s(t) = S$ et $Z = 0$, on a bien :

$$s(t) = k \times x(t) \times y(t)$$

- En pratique, on prend aussi : $X_2 = Y_2 = 0$
- Les tensions d'entrée seront inférieures à 8V pour éviter la saturation.



b. DETERMINATION EXPERIMENTALE DE K.

- La méthode la plus simple consiste à élever une tension continue au carré et à mesurer la valeur du signal de sortie.
- Pour plus de précision, on peut effectuer plusieurs mesures en faisant varier le signal d'entrée.

c. LIMITES DU COMPOSANT.

Comme tout composant électronique le multiplieur a des limites de fonctionnement :

- La limitation en tension de sortie (saturation).
- La vitesse de balayage (de l'ordre d'une dizaine de volts par μs pour AD633)
- La bande passante (de l'ordre du MHz pour AD633)
- Des défauts existent également comme une tension de décalage, en générale négligeable).

2. DETECTION QUADRATIQUE.

a. PRINCIPE

- Deux entrées $x(t)$ et $y(t)$ sont alimentées par le même GBF : $x(t) = y(t) = e(t) = E_0 \cos \omega t$ et sont envoyées au multiplieur.
- Le signal de sortie vaut :

$$s(t) = kE_0^2(\cos \omega t)^2 = \frac{kE_0^2}{2}(1 + \cos 2\omega t)$$

- Le signal comprend donc :
 - ✓ Une composante continue $\frac{kE_0^2}{2}$: c'est la valeur moyenne de $s(t)$
 - ✓ Une composante variable $\frac{kE_0^2}{2}(\cos 2\omega t)$ de fréquence double de celle de l'entrée

⇒ Le signal de sortie possède des harmoniques absentes du signal d'entrée : le multiplieur est un composant non linéaire.

La multiplication d'un signal sinusoïdal par lui-même génère deux signaux : l'un continu, correspondant à la valeur efficace du signal au carré, l'autre sinusoïdal de fréquence double.

b. DETECTION QUADRATIQUE :

- On veut sélectionner la composante spectrale de fréquence nulle. Pour cela, on place en sortie du multiplieur un **passe-bas**.
⇒ On obtient en sortie du filtre un signal continu de valeur : $\frac{kE_0^2}{2} \propto \frac{E_0^2}{2}$
- Or, sachant que $e(t) = E_0 \cos \omega t$, on a : $E_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e(t)^2 dt} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$

Ainsi, $\frac{E_0^2}{2}$ représente la valeur efficace au carré de $e(t)$ c'est à dire la moyenne quadratique du signal d'entrée.

3. DETECTION SYNCHRONE.

a. PRINCIPE

- Les entrées $x(t)$ et $y(t)$ sont alimentées par **deux GBF différents** : $x(t) = E_{01} \cos \omega_1 t$ et $y(t) = E_{02} \cos(\omega_1 t + \phi)$

⇒ Le signal de sortie vaut :

$$s(t) = k E_{01} E_{02} \cos \omega_1 t \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$s(t) = k \frac{E_{01} E_{02}}{2} [\cos((\omega_2 - \omega_1) t + \phi) + \cos((\omega_1 + \omega_2) t + \phi)]$$

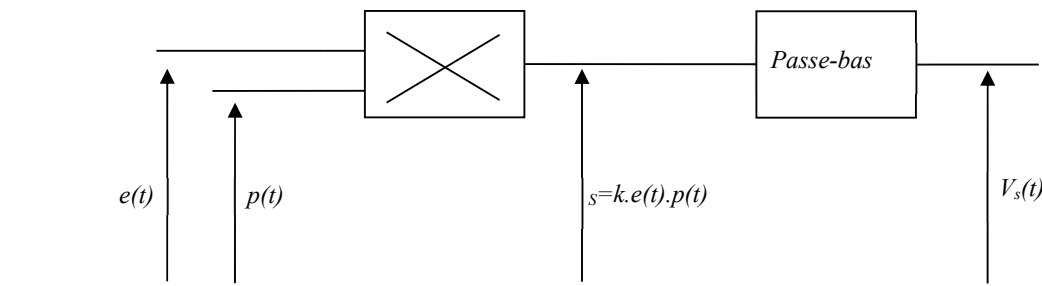
$$s(t) = k \frac{E_{01} E_{02}}{2} [\cos(2\pi(f_2 - f_1) t + \phi) + \cos(2\pi(f_1 + f_2) t + \phi)]$$

⇒ Le spectre du signal comporte deux pics de fréquence : $|f_2 - f_1|$ et $f_2 + f_1$ de même amplitude : $k \frac{E_{01} E_{02}}{2}$

La multiplication de deux signaux sinusoïdaux de fréquences différentes génère deux signaux sinusoïdaux de même amplitude et de fréquences correspondant à la somme et à la différence des fréquences des deux signaux.

b. DETECTION SYNCHRONE.

- On souhaite analyser le signal $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$, c'est-à-dire **déterminer : E_0 ; ω_0 et ϕ** .
- Pour cela on dispose d'un signal porteur parfaitement connu : $p(t) = P_0 \cos \omega t$
- On place aux entrées d'un multiplieur les signaux $e(t)$ et $p(t)$ et on place à la sortie du multiplieur un filtre passe bas de fréquence de coupure tellement faible qu'il ne laisse passer que le continu (son gain statique étant égal à 1) .



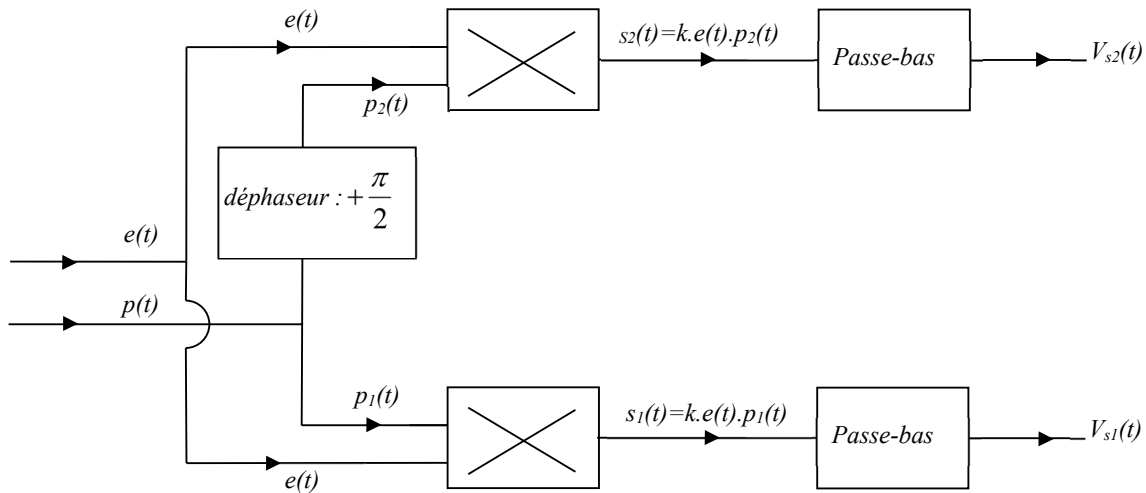
✓ Après le multiplieur, on a :

$$V_s(t) = k \frac{P_0 E_0}{2} [\cos((\omega_0 - \omega) t + \phi) + \cos((\omega_0 + \omega) t + \phi)]$$

✓ **Après le passe-bas, le signal est nul SAUF si $\omega = \omega_0$ dans ce cas là, on a :**

$$V_s(t) = k \frac{P_0 E_0}{2} \cos \phi$$

- Ainsi, en faisant varier la fréquence de la porteuse, nous pouvons déterminer la fréquence du signal à analyser (dès que $s(t)$ est non nulle) et on obtient une relation entre E_0 et ϕ .
- Les limites de cette méthode sont :
 - ✓ On ne connaît pas E_0 et ϕ
 - ✓ Lorsque les deux signaux sont en quadrature ($\phi = \frac{\pi}{2} [\pi]$), le signal de sortie est toujours nul.
- Pour y remédier, on peut utiliser deux signaux identiques mais en quadrature : $p_1(t) = p(t) = P_0 \cos \omega t$ et $p_2(t) = P_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$



- Après le premier multiplieur et filtre passe-bas on a, si $\omega_0 = \omega$:

$$V_s(t) = V_{s1}(t) = k \frac{P_0 E_0}{2} \cos \phi$$

- Après le second multiplieur et filtre passe-bas on a , si $\omega_0 = \omega$:

$$V_s(t) = V_{s2}(t) = k \frac{P_0 E_0}{2} \sin \phi$$

⇒ Ainsi, quand $\omega = \omega_0$, au moins un des 2 signaux de sortie sera non nul.

- Notons que pour déterminer la valeur de E_0 et ϕ :

$$E_0 = \sqrt{\frac{4}{P_0^2 k^2} (V_{s2}^2(t) + V_{s1}^2(t))}$$

$$\tan \phi = \frac{V_{s2}(t)}{V_{s1}(t)}$$

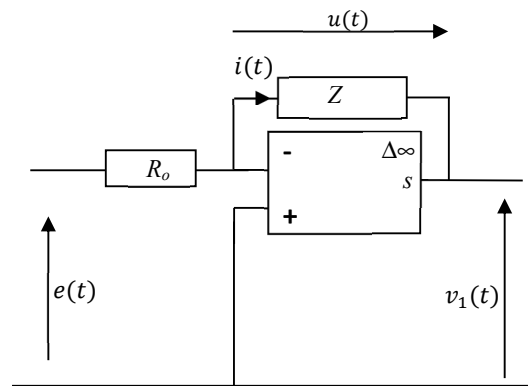
4. APPLICATION : MESURE D'IMPEDANCE PAR DETECTION SYNCHRONE

La manipulation proposée vise à mesurer la partie réelle et imaginaire de l'impédance d'un dipôle linéaire par détection synchrone entre le courant traversant le dipôle et la tension à ses bornes.

L'impédance étudiée est de la forme : $\underline{Z} = R + jX$

a. CONVERTISSEUR TENSION/COURANT.

- On utilise pour commencer un convertisseur tension/courant afin d'obtenir les images de la tension $U(t)$ et du courant $i(t)$. La tension d'entrée $e(t)$ est sinusoïdale : $e(t) = E \cos \omega t$ et $\underline{E} = E$



Convertisseur tension/courant

$\Rightarrow$ On a alors : $i(t) = \frac{e(t)}{R_o}$ et $v_1(t) = u(t)$

- Soit :

$$\underline{E}(j\omega) \propto \underline{I}(j\omega) \text{ et } \underline{U}(j\omega) \propto \underline{V}_1(j\omega)$$

- L'impédance du dipôle s'écrivant : $\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|e^{j\phi}$, on obtient :

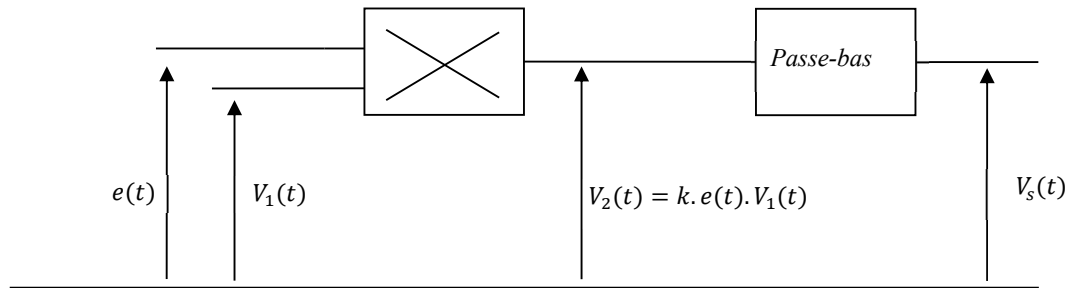
$$\underline{Z} = -\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = -R_o \frac{\underline{V}_1}{\underline{E}} = \sqrt{R^2 + X^2} \times \exp(j\phi)$$

Et donc :

$$\underline{V}_1 = -\frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{R_o} \times \exp(j\phi) \underline{E} \Rightarrow V_1(t) = -\frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{R_o} \times E \cos(\omega t + \phi)$$

b. DETERMINATION DE R.

- Afin de déterminer R , on injecte $V_1(t)$ et $e(t)$ dans un multiplieur puis on filtre le signal obtenu par un filtre passe bas (de pulsation de coupure ω_c coupure faible devant ω)



- On a alors :

$$V_2(t) = -k \frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{R_0} \times E \cos(\omega t + \phi) \times E \cos \omega t$$

$$V_2(t) = -k \frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{2R_0} E^2 [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi]$$

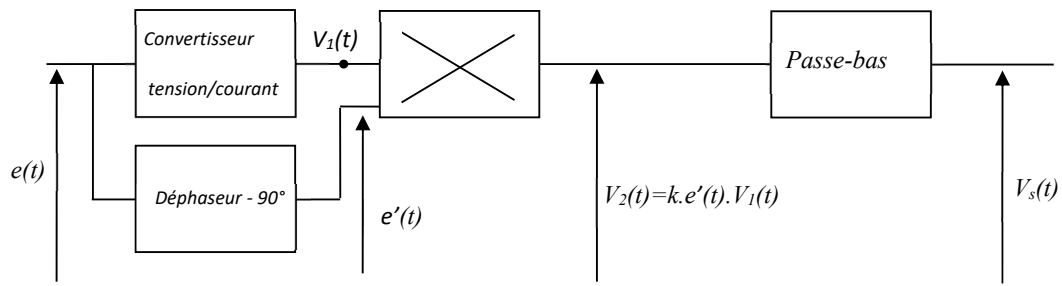
- Si la condition $\omega_c \ll 2\omega$ est satisfaite, on obtient :

$$V_2(t) = -k \frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{2R_0} E^2 \cos \phi = -\frac{kE^2}{2R_0} R$$

⇒ La mesure de $V_s(t)$ permet de déterminer R .

c. DETERMINATION DE X.

- Afin de déterminer X , on insère un déphaseur à -90° entre $e(t)$ et $V_1(t)$



- On a cette fois :

$$V_2(t) = -k \frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{R_0} \times E \cos(\omega t + \phi) \times E \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_2(t) = -k \frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{2R_0} E^2 \left[\cos\left(2\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$V_2(t) = -k \frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{2R_0} E^2 [\sin(2\omega t + \phi) - \sin(\phi)]$$

- Si la condition $\omega_c \ll 2\omega$ est satisfaite, on obtient :

$$V_2(t) = k \frac{\sqrt{R^2 + X^2}}{2R_0} E^2 \sin \phi = \frac{kE^2}{2R_0} X$$

⇒ La mesure de $V_s(t)$ permet de déterminer X .

II. APPROCHE THEORIQUE : MODULATION D'AMPLITUDE.

1. NECESSITE DE MODULER LES SIGNAUX EN TELECOMMUNICATION.

- Les systèmes de télécommunication ont pour objet de transmettre des informations à l'aide d'un signal se propageant dans l'espace ou le long d'une ligne, de son point d'émission à celui de réception.
- Pour les ondes radio par exemple, la fréquence des signaux varie entre 20 Hz et 20 kHz. La transmission directe est impossible pour plusieurs raisons :
 - ✓ Les dimensions des antennes, de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, seraient beaucoup trop grandes (pour 1 kHz, $\lambda = \frac{c}{f} \approx 300 \text{ km}$)
 - ✓ A ces fréquences, le signal est fortement perturbé.
 - ✓ Il n'est pas possible à la réception de distinguer ce signal d'autres signaux de fréquences proches.

Ainsi, que ce soit en transmission Hertzienne (radio, TV,...), en téléphonie ou en transmission de données, le procédé de modulation est la solution considérée comme la plus efficace.

- Le signal à transmettre $e(t)$ (ou **signal modulant**) est utilisé pour moduler (faire varier) une des caractéristiques d'un signal porteur de fréquence plus élevée, ou **onde porteuse**.
- Si le signal porteur est sinusoïdal alors on peut l'écrire de la manière suivante :

$$p(t) = A_p \cdot \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$$

Où A_p est l'amplitude de la porteuse, f_p la fréquence de la porteuse sans modulation et ϕ_p est la phase de la porteuse. Il existe alors trois possibilités :

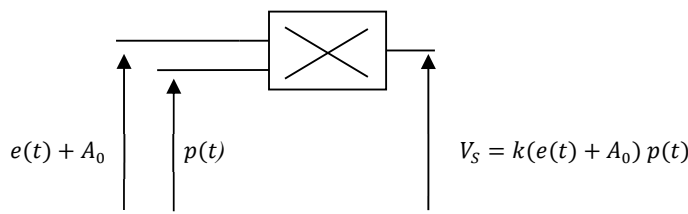
- ✓ **Modulation d'amplitude** : A_p varie au cours du temps et le couple (f_p, ϕ_p) reste constant.
- ✓ Modulation de fréquence ou de phase : A_p reste constante et ϕ_p varie en fonction du temps de la manière suivante :
 - Pour la **modulation de fréquence** la partie variable de la fréquence instantanée est proportionnelle au signal modulant : $\frac{d\phi_p}{dt} = k \times e(t)$ où k est un coefficient de proportionnalité.
 - Pour la **modulation de phase** $\phi_p(t)$ est proportionnel au signal modulant : $\phi_p(t) = k \times e(t)$ où k est une constante de proportionnalité.

2. MODULATION D'AMPLITUDE.

a. OBTENTION DU SIGNAL MODULE.

- Le signal porteur est de la forme : $p(t) = A_p \cdot \cos(2\pi f_p t)$
- Le signal à transmettre est : $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t + \phi)$

Pour moduler le signal porteur en amplitude, on utilise un multiplieur : on ajoute un offset (A_0) au signal modulant puis on le multiplie à la porteuse.



$$\Rightarrow V_s(t) = k \times (e(t) + A_0) \times p(t) = k[A_0 + A_m \cos(2\pi f_m t + \phi)]A_p \cos(2\pi f_p t)$$

$$\Rightarrow V_s(t) = kA_0A_p \left[1 + \underbrace{\frac{A_m}{A_0}}_m \cos(2\pi f_m t + \phi) \right] \cos(2\pi f_p t)$$

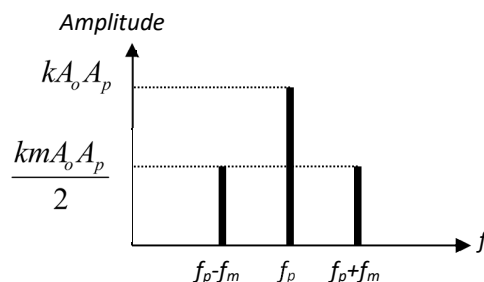
où :

$$m = \frac{A_m}{A_0} = \text{taux de modulation}$$

$$\Rightarrow V_s(t) = kA_0A_p \left[1 + \underbrace{\frac{A_m}{A_0}}_m \cos(2\pi f_m t + \phi) \right] \cos(2\pi f_p t)$$

$$\Rightarrow V_s(t) = kA_0A_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{kA_0A_p m}{2} \cos[2\pi(f_p + f_m)t + \phi] + \frac{kA_0A_p m}{2} \cos[2\pi(f_p - f_m)t - \phi]$$

- Le signal modulé est composé de trois fréquences f_p ; $f_p + f_m$ et $f_p - f_m$:
 - ✓ La fréquence du signal porteur f_p d'amplitude kA_0A_p
 - ✓ Deux fréquences latérales $f_p + f_m$ et $f_p - f_m$ d'amplitude $\frac{kA_0A_p m}{2}$

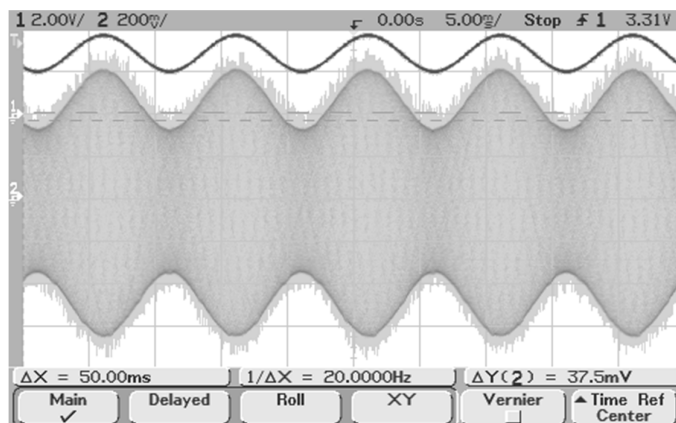


- En l'absence d'offset ($A_0 = 0$), la fréquence f_p est absente du spectre : il est difficile de récupérer le signal modulé (voir la démodulation). C'est pourquoi, on ajoute une composante continue A_0 au signal à transmettre.

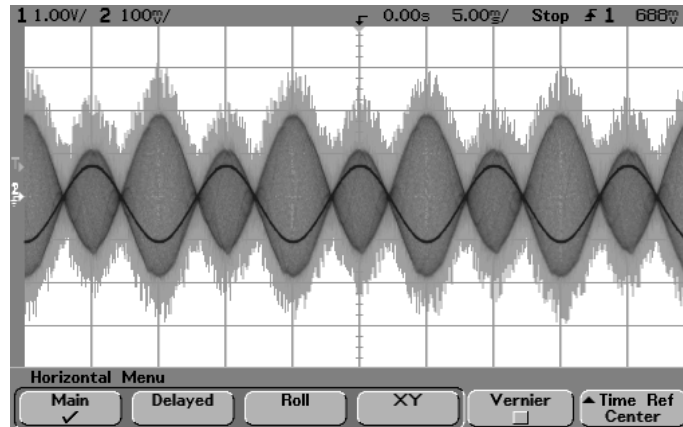
b. MODULATION/ SURMODULATION.

L'allure de $V_s(t)$ dépend de la valeur de m :

- $m < 1$: modulation



- $m > 1$: Surmodulation :



- Notons que lors de la démodulation, on ne peut pas se placer dans le cas d'une surmodulation si l'on choisit la méthode de détection d'enveloppe. En effet, **dans le cas d'une surmodulation, l'enveloppe du signal ne correspond plus à $x(t)$** . Ce problème ne se pose pas si l'on choisit de démoduler par détection synchrone.

c. MESURE DE M.

- Partons de :

$$V_s(t) = \underbrace{kA_0A_p[1 + m \cos(2\pi f_m t + \phi)]}_{A(t)} \cos(2\pi f_p t)$$

L'amplitude $A(t)$, de fréquence f_m , varie lentement devant $\cos(2\pi f_p t)$: le signal est bien modulé en amplitude.

- Les valeurs extrêmes de l'enveloppe du signal modulé dépendent de m :

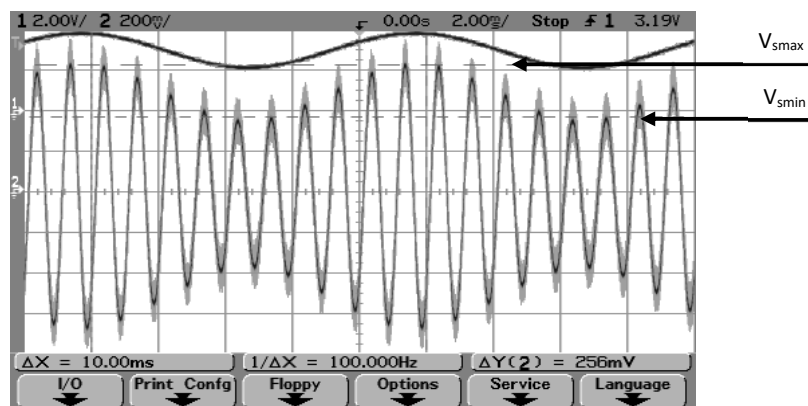
$$\checkmark V_{smax} = A_{max} = kA_0A_p(1 + m)$$

$$\checkmark V_{smin} = A_{min} = kA_0A_p(1 - m)$$

D'où :

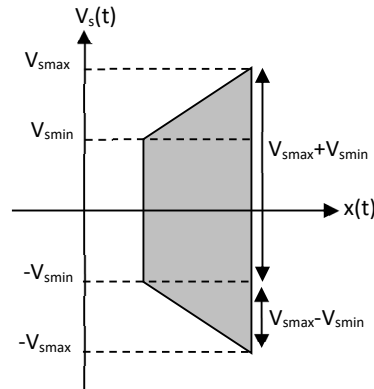
$$m = \frac{V_{smax} - V_{smin}}{V_{smax} + V_{smin}}$$

MESURE DIRECTE DE M :



MESURE DE M EN MODE LISSAJOUS :

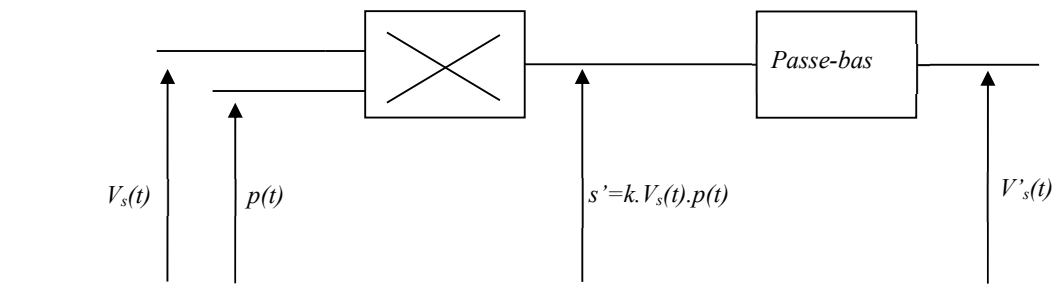
- Sur la voie X (CH1), on impose $x(t) + A_0 = A_0(1 + me(t))$
- Sur la voie Y (CH2), on impose $y(t) = V_s(t) = kA_p x(t) \cos(2\pi f_p t)$
- On se place en mode XY :



3. DEMODULATION

a. DEMODULATION PAR DETECTION SYNCHRONE.

- La détection synchrone consiste ici à envoyer dans un multiplieur le signal modulé et un signal de même fréquence que la porteuse puis de faire passer le signal résultant dans un filtre passe-bas de fréquence de coupure très faible.



- A l'entrée du multiplieur, on a :

$$V_s(t) = kA_0A_p[1 + m \cos(2\pi f_m t + \phi)] \cos(2\pi f_p t)$$

$$p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$$

- À la sortie du multiplieur, on a :

$$s'(t) = k^2 A_0 A_p^2 [1 + m \cos(2\pi f_m t + \phi)] \cos^2(2\pi f_p t)$$

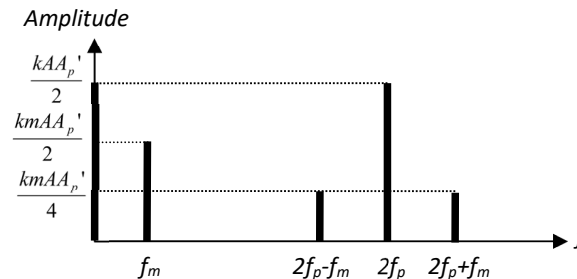
$$s'(t) = \frac{k^2 A_0 A_p^2}{2} [1 + m \cos(2\pi f_m t + \phi)] [1 + \cos(4\pi f_p t)]$$

$$s'(t) = \frac{k^2 A_0 A_p^2}{2} \left[1 + m \cos(2\pi f_m t + \phi) + \cos(4\pi f_p t) + \frac{m}{2} \cos(2\pi(2f_p + f_m)t + \phi) + \frac{m}{2} \cos(2\pi(2f_p - f_m)t + \phi) \right]$$

- Le signal est constitué de 5 signaux :

- ✓ Un signal continu d'amplitude $\frac{k^2 A_0 A_p^2}{2}$

- ✓ Un signal BF, de fréquence f_m et d'amplitude $\frac{k^2 A_0 A_p^2}{2} m$
- ✓ Trois signaux HF de fréquences : f_p ; $f_p + f_m$ et $f_p - f_m$ et d'amplitudes respectives : $\frac{k^2 A_0 A_p^2}{2}$; $\frac{k^2 A_0 A_p^2}{4} m$ et $\frac{k^2 A_0 A_p^2}{4} m$
- Le spectre de Fourier d'un tel signal est donc de la forme :



- En choisissant un **filtre passe-bas** de fréquence de coupure telle que :

$$f_m \ll f_c \ll 2f_p - f_m$$

On récupère en sortie :

$$s'(t) = \frac{k^2 A_0 A_p^2}{2} [1 + m \cos(2\pi f_m t + \phi)]$$

- ✓ Un signal continu d'amplitude $\frac{k^2 A_0 A_p^2}{2}$
- ✓ Un signal BF, de fréquence f_m et d'amplitude $\frac{k^2 A_0 A_p^2}{2} m$
- Il suffit d'utiliser ensuite un **filtre passe-haut** pour éliminer la composante continue du signal. On obtient alors :

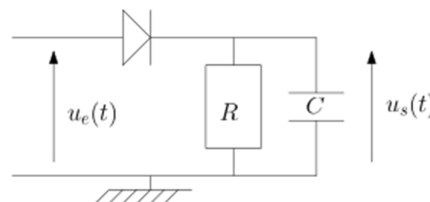
$$s'(t) = \frac{k^2 A_0 A_p^2}{2} m \cos(2\pi f_m t + \phi)$$

- Notons que l'on a supposé que le signal utilisé pour la détection $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ était en phase avec la porteuse ce qui est le cas en général en TP mais ce qui est faux en réalité : Il existe un déphasage entre les deux signaux. Ce déphasage varie de plus au cours du temps, ce qui fait que l'amplitude du signal modulé varie au cours du temps. Pour remédier à cette difficulté, on utilise un bouclage à verrouillage de phase qui assure un déphasage nul entre les deux signaux.

b. DEMODULATION PAR DETECTION D'ENVELOPPE.

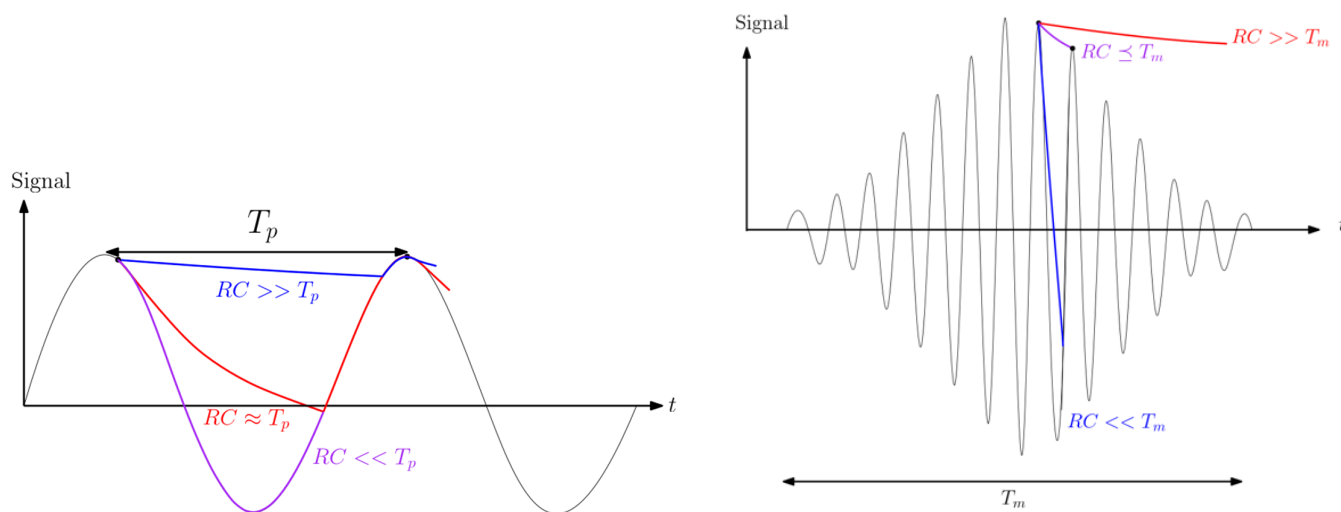
MONTAGE :

- Une diode est un dipôle qui laisse passer le courant dans le sens de la flèche ($u_d = 0$ V) et bloque le passage du courant dans le sens inverse.
- L'association d'une diode et d'un dipôle RC parallèle constitue un détecteur d'enveloppe.



FONCTIONNEMENT :

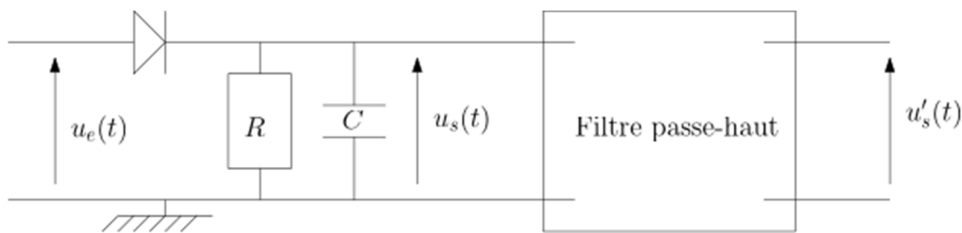
- La première partie est un montage redresseur. La diode ne laisse passer le courant que dans un seul sens. Cela élimine la partie négative de la tension. En y ajoutant un condensateur C , on élimine les variations rapides de la tension dues à la porteuse.
 - ✓ Le condensateur initialement déchargé se charge tant que u_e croît jusqu'au maximum, avec une constante de temps t_c quasi nulle (la diode est alors passante).
 - ✓ Lorsque u_e décroît, $u_c > u_e$, la diode est bloquée, le condensateur se décharge dans la résistance avec une constante de temps $\tau = R \cdot C$ **grande par rapport à la période T_p** de la porteuse.
 - ✓ Lorsque u_e atteint de nouveau u_c , la diode est à nouveau passante et le condensateur se charge.
- Plus le point de recouplement est proche du sommet de la crête, meilleur est le détecteur : La courbe obtenue suit mieux l'enveloppe de la tension modulée.
 - ✓ Si le condensateur se décharge trop lentement (τ trop grand devant T_m), la courbe ne suit plus l'enveloppe et le condensateur se charge quelques crêtes plus loin.
 - ✓ Si le condensateur se décharge trop vite (τ trop petit devant T_m), la courbe est trop dentelée.
- Ainsi, pour obtenir une démodulation de qualité, il faut que la constante de temps τ du dipôle RC soit très supérieure à la période T_p de la porteuse, en restant inférieure à la période T_m du signal modulant :



$$T_p \ll \tau \leq T_m$$

DEMODULATION COMPLETE :

- A la sortie du détecteur d'enveloppe, la tension a encore une composante continue due à la tension de décalage utilisée lors de la modulation, qu'il faut supprimer.
- On utilise un filtre passe-haut :



III. APPROCHE EXPERIMENTALE : MESURE DE K

Le but de cette partie est de déterminer le facteur multiplicatif du multiplieur avec un calcul d'incertitude.

1. MONTAGE

- Choisir une tension d'entrée continue E et la multiplier par elle-même. A la sortie sur multiplieur, on a donc :

$$s(t) = S = kE^2$$

- Réaliser le montage et vérifier son bon fonctionnement à l'oscilloscope.

2. MESURES

- Faire varier E afin d'obtenir au moins une dizaine de points. Mesurer E et S à chaque fois ainsi que leurs incertitudes à l'aide d'un multimètre.

3. EXPLOITATION

a. AVEC CALCULATRICE

- Déterminer les valeurs de k correspondant à chaque mesure.
- Déterminer la valeur moyenne de k et son écart type. En déduire u_k . Conclure.

b. AVEC REGRESSI

REGRESSION LINEAIRE SANS INCERTITUDES

Lorsque l'on fait une régression linéaire sans tenir compte des incertitudes sur les variables d'entrée, les incertitudes sur les variables d'ajustement sont liées à la dispersion du nuage de points : elles sont donc d'origine statistique. **La validation se fait alors avec les résidus** : ils doivent être répartis aléatoirement de part et d'autre de la droite de tendance.

- Rentrer les valeurs de E et S et calculer E^2 .
- Tracer S en fonction de E^2 .
- En déduire la valeur de k ainsi que son incertitude u_k . (**Penser à enlever les incertitudes si elles avaient été rentrées !**)
- Valider à partir de l'observation des résidus.

REGRESSION LINEAIRE AVEC INCERTITUDES

Lorsque l'on fait une régression en tenant compte des incertitudes sur les variables d'entrée, les incertitudes sur les variables d'ajustement sont directement fonction des incertitudes sur les variables d'entrée. **La validation se fait soit à partir des résidus soit à partir de χ^2 .**

- Rentrer les valeurs de E , u_E , S et u_S .
- Calculer E^2 et u_{E^2} .
- Tracer S en fonction de E^2 , faites apparaître les incertitudes.
- En déduire la valeur de k ainsi que son incertitude.
- Valider à partir de l'observation des résidus et de la valeur du χ^2 .

Pour qu'une régression soit validée avec le χ^2 , il faut que ce χ^2 soit proche de 1

c. AVEC PYTHON

REGRESSION LINEAIRE SANS INCERTITUDES

- Utiliser le code python en annexe pour déterminer k grâce à une régression linéaire sans incertitudes.
- En déduire la valeur de k ainsi que son incertitude.
- Valider la mesure grâce aux résidus.

REGRESSION LINEAIRE AVEC INCERTITUDES (MONTE CARLO)

- Utiliser le code python en annexe pour déterminer k grâce à une régression linéaire avec incertitudes.
- En déduire la valeur de k ainsi que son incertitude.
- Valider la mesure grâce aux résidus.

d. SUR PAPIER MILLIMETRE.**TRACE SANS INCERTITUDES**

- Déterminer E^2 pour chaque valeur de S .
- Sur le graphe (E^2, S) , placer les différents points.
- Tracer deux droites extrêmes **passant au plus proche des points** (correspondant à k_{min} et k_{max})
- En déduire la valeur de k et de u_k :

$$k = \frac{k_{min} + k_{max}}{2} \text{ et } u_k = \frac{k_{max} - k_{min}}{2\sqrt{3}}$$

REGRESSION LINEAIRE AVEC INCERTITUDES (MONTE CARLO)

- Déterminer E^2 et u_E^2 pour chaque valeur de S .
- Sur le graphe (E^2, S) , placer les différents points avec les incertitudes sous forme de croix ou de rectangles.
- Tracer deux droites extrêmes passant au plus proche des points et **coupants les incertitudes** (correspondant à k_{min} et k_{max})
- En déduire la valeur de k et de u_k :

$$k = \frac{k_{min} + k_{max}}{2} \text{ et } u_k = \frac{k_{max} - k_{min}}{2\sqrt{3}}$$

e. CONCLUSION

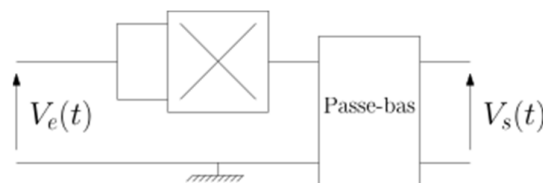
Conclure sur la validité des différentes méthodes. Quelle méthode vous semble la plus précise ?

IV. APPROCHE EXPERIMENTALE : DETECTION QUADRATIQUE

Le but de cette partie est de montrer que la détection quadratique permet de déterminer la valeur efficace d'un signal.

1. MONTAGE

- Soit le montage suivant :



Avec :

$$V_e(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cos(k\omega t + \phi_k)$$

- Montrer que, **sous certaines hypothèses**, le signal de sortie est de la forme :

$$V_s(t) = k \left[E^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} E_k^2 \right]$$

- En déduire une méthode pour déterminer la valeur efficace d'un signal. Mesure-t-on la valeur efficace vraie ?

2. MESURES

Mesurer la valeur efficace des signaux suivants, à l'aide d'un voltmètre puis à l'aide du montage en faisant à chaque fois un calcul d'incertitude. Calculer le Z-score et conclure.

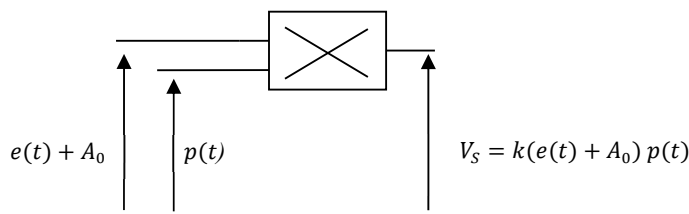
$V_e(t)$	Multimètre TRMS ^a (1)		Montage (2)	
	E_{eff}^1	u_{eff}^1 ^b	E_{eff}^2	u_{eff}^2
Signal sinusoïdal pur de valeur maximale 5V				
Signal sinusoïdal avec un offset de 1V et de valeur maximale 5V				
Signal créneau avec un offset de 1V et de valeur maximale 5V				

V. APPROCHE EXPERIMENTALE : MODULATION D'AMPLITUDE

1. MODULATION

a. MONTAGE

- Réaliser le montage suivant :



Avec :

- ✓ $p(t) = A_p \cdot \cos(2\pi f_p t)$ et $f_p \approx 10 \text{ kHz}$
- ✓ $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t + \phi)$ et $f_m \approx 1 \text{ kHz}$

- Observer $p(t)$, $x(t) = e(t) + A_0$ et $V_s(t)$ à l'oscilloscope.
- Synchroniser l'oscilloscope avec un signal externe issu du GBF délivrant le signal basse-fréquence : ce signal doit avoir la même fréquence que celle du signal modulant (f_m) et doit être le « plus propre possible », c'est pour cela que l'on utilise la sortie TTL du GBF. Il faut également configurer l'oscilloscope de façon à ce que la synchronisation se fasse à partir du signal externe.
- Pour la suite, fixer A_p et choisir 3 valeurs du couple (A_m, A_0) de façon à avoir 3 valeurs de m :
 $m < 1, m = 1, m > 1$
- Observer la modulation du signal $V_s(t)$ et faire varier m de façon à observer la modulation ($m < 1$) et la surmodulation ($m > 1$). Valider l'étude théorique.
- Modifier l'allure du signal modulant (Créneaux, dents de scies ...), commenter.

b. MESURE DE M

- D'après l'étude théorique, on a :

$$m = \frac{V_{smax} - V_{smin}}{V_{smax} + V_{smin}}$$

^a Mode AC+DC

^b Voir documentation constructeur

- Mesurer m par mes deux méthodes proposées dans l'étude théorique
- Déterminer son incertitude u_m dans les deux cas par les deux méthodes au choix :
 - ✓ Propagation des incertitudes :

$$\frac{u_m}{m} = \sqrt{\left(\frac{2V_{smin}}{V_{smax}^2 - V_{smin}^2}\right)^2 (u_{V_{smax}})^2 + \left(\frac{2V_{smax}}{V_{smax}^2 - V_{smin}^2}\right)^2 (u_{V_{smin}})^2}$$

- ✓ Monté Carlo : Voir code en Annexe.
- Comparer m à la valeur théorique de $m = \frac{A_m}{A_0}$, calculer les Z-scores et conclure.

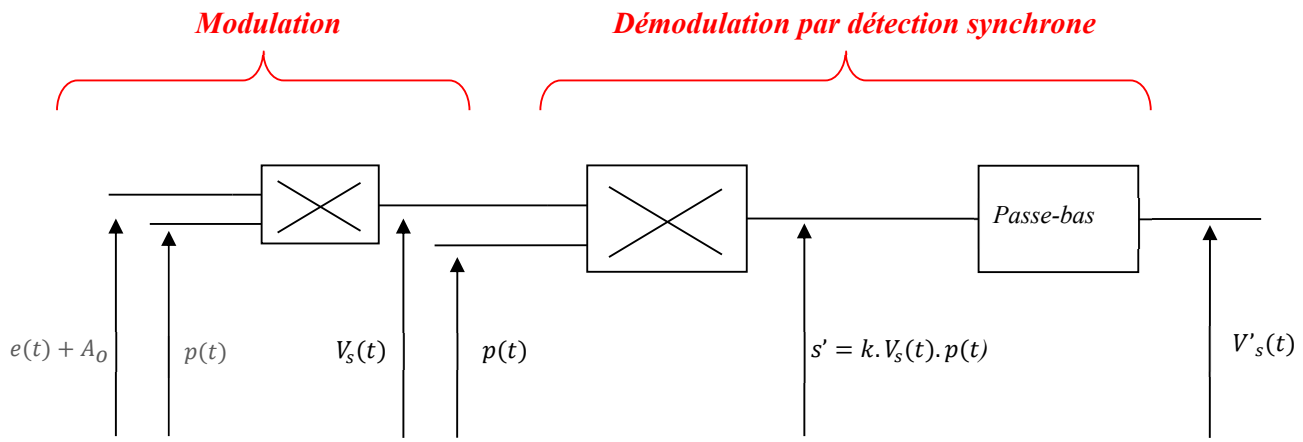
c. SPECTRE.

- Observer le spectre du signal modulé et mesurer les fréquences présentes dans le spectre.
- Comparer ces fréquences aux fréquences attendues, calculer les Z-scores et conclure.
- Interpréter la présence de fréquences non attendues dans le spectre.

2. DEMODULATION PAR DETECTION SYNCHRONE

a. MONTAGE

- Réaliser le montage suivant :



- Choisir la pulsation de coupure du filtre passe-bas telle que :

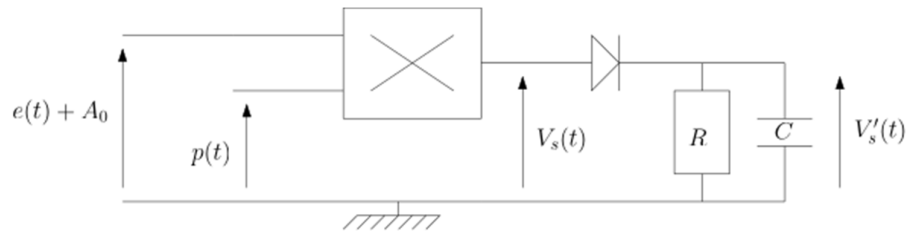
$$f_m \ll f_c \ll 2f_p - f_m$$
- Observer $p(t)$, $x(t) = e(t) + A_0$, $V_s(t)$, $s'(t)$ et $V'_s(t)$ à l'oscilloscope.
- Synchroniser l'oscilloscope avec la sortie TTL du GBF basse fréquence.
- Vérifier que la détection fonctionne dans le cas de la modulation mais aussi de la surmodulation.
- Conclure quand au bon fonctionnement du montage.

b. SPECTRE

- Visualiser les spectres de $s'(t)$ et $V'_s(t)$, mesurer les fréquences présentes dans le spectre et vérifier la cohérence des résultats.
- Interpréter la présence de fréquences supplémentaires.

3. DEMODULATION PAR DETECTEUR DE CRETES

- Réaliser le montage suivant :



- Pour le bon fonctionnement du détecteur de crêtes et d'après l'étude théorique, le temps de réponse du circuit RC doit vérifier :

$$T_p \ll RC \ll T_m$$

⇒ Réaliser le montage et vérifier son bon fonctionnement.

- Afin d'enlever la composante continue, placer en sortie un filtre passe-haut et vérifier le bon fonctionnement du montage.

VI. ANNEXES

1. EXEMPLE DE CODE PYTHON POUR LA DETERMINATION DE k SANS INCERTITUDES (REGRESSION LINEAIRE)

```
1 ##Régression linéaire avec Monte Carlo pour déterminer la valeur k du multiplieur (sans incertitudes)
2
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.stats import linregress
6
7 #Données
8
9 E = np.array([1.0125,2.0030,3.0037,4.0235,5.0421,5.990,7.017]) #Valeur en Volt de la tension du signal d'entrée continu
10
11 E2=E**2
12
13 S = np.array([0.1024,0.4020,0.9018,1.6199,2.5430,3.6022,4.9289]) #Valeur en Volt de la tension du signal en sortie du multiplieur (le signal est
14 continu)
15
16 a, b, r, p_vall, std_err = linregress(E2, S)
17 print("\nRésultat de la régression linéaire avec linregress : ")
18 print("a ={:8.3f}\nb ={:8.3f}\nr^2 ={:8.5f}".format(a, b, r**2))
19
20 #equation de la droite
21 S_sim=a*E2+b
22 print("droite obtenue avec linregress :\n ",S_sim)
23
24 #graphique 1 : droite
25 plt.figure("point expérimentaux et régression")
26 plt.plot(E2, S, "bo", label="exp")
27 plt.plot(E2, S_sim, "r",label="regression")
28 plt.xlabel("E^2")
29 plt.ylabel("S")
30 plt.title("Regression linéaire obtenue avec linregress")
31 plt.legend(loc="lower right")
32
33 # graphique 2: les résidus
34 plt.figure("Résidus")
35 plt.plot(E2, S - S_sim, "g", label="residus")
36 plt.xlabel("E^2")
37 plt.ylabel("Résidus")
38 plt.legend(loc="upper center")
```

2. EXEMPLE DE CODE PYTHON POUR LA DETERMINATION DE k AVEC INCERTITUDES (REGRESSION LINEAIRE, MONTE CARLO)

```
1 ##Régression linéaire avec Monte Carlo pour déterminer la valeur k du multiplieur
2
3 import numpy as np
4 import numpy.random as rd
5 import matplotlib.pyplot as plt
6
7 #Données
8
9 E = np.array([1.0125,2.0030,3.0037,4.0235,5.0421,5.990,7.017]) #Valeur en Volt de la tension du signal d'entrée continu
10
11 uE = np.array([0.0013,0.0015,0.0018,0.0020,0.0023,0.005,0.005]) #Incertitudes en Volt de E (mesures avec un multimètre en mode CC)
12
13 E2=E*E
14
15 uE2=2*E*uE
16
17 S = np.array([0.1024,0.4020,0.9018,1.6199,2.5430,3.6022,4.9289]) #Valeur en Volt de la tension du signal en sortie du multiplieur (le signal est
18 continu)
19
20 uS = np.array([0.0010,0.0011,0.0012,0.0014,0.0016,0.0019,0.0022]) #Incertitudes en Volt de S (mesures avec un multimètre en mode CC)
21
22 N = 10000 #Nombre de simulations
23
24
25 #Détermination de la pente de la régression
26 """Le modèle théorique est S= 1/k * E**2
27 On utilise donc un modèle linéaire pour la régression avec :
28 en ordonnée Y=S
29 en abscisse X=E**2"""
30
31 asim = [] #Liste des valeurs de la pente a=1/k simulées
```

```

33 for i in range(N):
34
35     E2sim = E2 + uE2*rd.normal(0,1,len(E)) #valeurs simulées de E**2
36     Ssim = S + uS*rd.normal(0,1,len(S)) #valeurs simulées de S
37
38     p=np.polyfit(E2sim,Ssim,1) #Crée la régression Ssim=a*E2sim**1 + b et renvoie [a,b]
39     """Cette méthode oblige a faire une régression affine et non linéaire comme souhaité"""
40
41     asim.append(p[0])
42
43 ma = np.mean(asim) #Valeur moyenne de la pente a=1/k
44 ua = np.std(asim, ddof=1) #Ecart type=incertitude de a
45 print("a(moyen)=",ma)
46 print("ua=",ua)
47 print("k=1/a=",1/ma)
48
49 #Tracé des points et du modèle
50
51 Smod = ma * E2 #Valeur du modèle linéaire
52 """On remarque qu'en mettant 0.1 au lieu de ma, qui est normalement la bonne valeur, le tracé des écarts normalisés est beaucoup mieux. Cela vient
encore du fait que le régression calculé était affine et non linéaire"""
53
54 plt.figure(figsize=(10,5), dpi=200)
55 plt.subplot(1,2,1)
56 plt.errorbar(E**2,S,xerr=uE**2,yerr=uS,fmt='bx',label="Points expérimentaux")
57 plt.plot(E**2,Smod,'c--',label="Modèle linéaire")
58 plt.xlabel(r"$E^2$")
59 plt.ylabel(r"$S$")
60 plt.grid(), plt.legend(loc='best')
61
62 #Tracé des écarts normalisés algébriques
63 z= (S-Smod)/uS
64 plt.subplot(1,2,2)
65 plt.plot(E**2,z,'bx')
66 plt.fill_between([min(E**2)-1,max(E**2)+1], y1=-2, y2=2, color='cyan', alpha=0.1)
67 plt.xlabel(r"$E^2$"), plt.xlim(min(E**2)-1,max(E**2)+1)
68 plt.ylabel(r"$z$"), plt.ylim(-3,3)
69 plt.grid()
70
71 plt.show()
72

```

3. CALCUL DE u_m PAR MONTE CARLO

```

1  """Méthode de Montecarlo pour déterminer m"""
2
3  #Importation des bibliothèques
4  import numpy as np
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  import random
7
8  N=10000 #nombre de valeurs aléatoires à créer
9  Vmin=2.1 #Valeur mesurée à l'oscilloscope en volt
10 Vmax=5.9 #Valeur mesurée à l'oscilloscope en volt
11
12
13 uVmin=0.05 #Estimée à l'oscilloscope
14 uVmax=0.05 #Idem
15
16
17
18 lVmin=np.random.uniform((Vmin-uVmin),(Vmin+uVmin),size=N) # liste de valeurs aléatoires de Vmin
19 lVmax=np.random.uniform((Vmax-uVmax),(Vmax+uVmax),size=N) # liste de valeurs aléatoires de Vmax
20
21 lm=(lVmax-lVmin)/(lVmax+lVmin) #liste des valeurs valeur de m
22 mmoy=np.average(lm) #valeur moyenne de m
23 um=np.std(lm,ddof=1) #ecart-type de m
24 print('valeur moyenne m :',mmoy)
25 print('écart-type m :',um)
26
27
28 plt.figure(1)
29 plt.hist(lm,bins = 'rice')
30
31 plt.xlabel('m')
32 plt.show()
33

```

4. FILTRES

Dans tout le TP, on a besoin de filtres passe-bas et passe haut.

⇒ Le plus simple et le plus rapide est de prendre des filtres passifs

a. FILTRE PASSE-BAS

- Filtre passe-bas du 1^{er} ordre : circuit R-C série, tension de sortie aux bornes de C. La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$
- Filtre passe-bas du 2nd ordre : circuit RLC série, tension de sortie aux bornes de C. Pour éviter les problèmes de résonance et privilégier une atténuation rapide en dehors de la bande passante, il faut prendre $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient alors :

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b. FILTRE PASSE-HAUT

- Filtre passe-haut du 1^{er} ordre : circuit R-C série, tension de sortie aux bornes de R. La pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$
- Filtre passe-bas du 2nd ordre : circuit RLC série, tension de sortie aux bornes de L. Pour éviter les problèmes de résonance et privilégier une atténuation rapide en dehors de la bande passante, il faut prendre $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient alors :

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Attention : Ces filtres n'ont pas des impédances d'entrée infinies ni des impédances de sortie nulles !