

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Valeurs numériques

Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$ $\hbar = h/2\pi = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Vitesse de la lumière	$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$
Masse du neutron	$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $m_n c^2 = 940 \text{ MeV}$
Constante de structure fine	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\hbar c)} \simeq \frac{1}{137}$
Rayon classique de l'électron	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(m_e c^2)} = 2,8 \times 10^{-15} \text{ m}$
Longueur d'onde de Compton de l'électron	$\lambda_c = h/(m_e c) = 2,4 \text{ pm}$
Rayon de Bohr	$a_0 = 0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$
Énergie d'ionisation de l'hydrogène	$E_I = 13,6 \text{ eV}$
Constante de Rydberg	$R_H = E_I/(hc) = 1,09 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

I Introduction au monde quantique

Quantification de la lumière

Exercice MQ1: Flux de photons

★

1. Une antenne de radio émet sur la fréquence de 1 MHz avec une puissance de 1 kW. Quel est le nombre de photons émis par seconde ?
2. Une étoile de première grandeur émet un flux lumineux sur la Terre d'environ $1,6 \times 10^{-10} \text{ W m}^{-2}$ sur une longueur d'onde de 556 nm. Combien de photons traversent la pupille de l'œil par seconde ?

Exercice MQ2: Effet photoélectrique sur les métaux

★

On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette (raie du mercure) $\lambda = 253,7 \text{ nm}$; on constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est 3,14 eV. Si c'est une raie visible, $\lambda = 589 \text{ nm}$ (raie jaune du sodium), l'énergie maximale est alors 0,36 eV.

1. Retrouver la valeur de la constante de PLANCK.
2. Calculer l'énergie d'extraction minimale des électrons du potassium.
3. Calculer la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photoélec-

Exercice MQ3: Délai d'émission des photoélectrons

★ ★

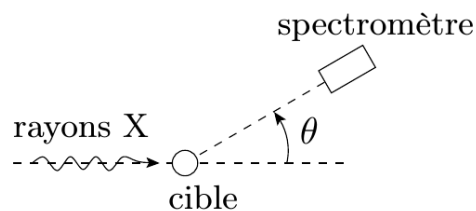
Une plaque de zinc est placée à $D = 5$ m d'une faible source monochromatique isotrope de puissance $P_{\text{tot}} = 1 \times 10^{-3}$ W. On suppose qu'un électron a été émis par effet photoélectrique depuis la plaque après avoir collecté son énergie d'une surface circulaire de rayon R aussi grand qu'une dizaine de rayons atomiques.

1. En admettant que l'énergie requise pour arracher l'électron est $W_s \simeq 5$ eV et que la lumière est une onde (physique classique), évaluer le temps τ nécessaire pour que l'électron soit émis.
2. En supposant que la lumière est monochromatique, de fréquence $\nu = W_s/h$, évaluer le flux de photons incidents sur la surface de collection de l'électron. Commenter. Le temps moyen d'émission d'un photoélectron permet-il de mettre en évidence clairement l'existence du photon ?
3. On met la source lumineuse en marche à l'instant $t = 0$. On observe que l'électron est arraché pour des temps variant entre 3 ns et plusieurs τ . Conclure.

Exercice MQ4: Effet Compton

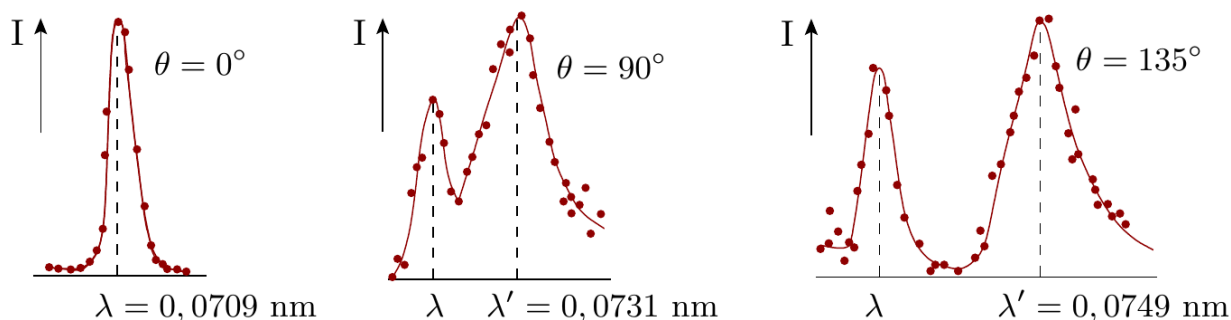
★ ★

En 1923, COMPTON confirme que la lumière peut être décrite par de petits paquets d'énergie et d'impulsion (« photons » par anachronisme) et mérite ainsi le prix Nobel 1927.



Il dirige un faisceau de rayons X quasi-monochromatique (longueur d'onde caractéristique λ) sur un bloc cible de graphite et mène une analyse spectrale des rayons X diffusés à divers angles de diffusion θ grâce à un spectromètre exploitant la diffraction de BRAGG par un cristal de graphite.

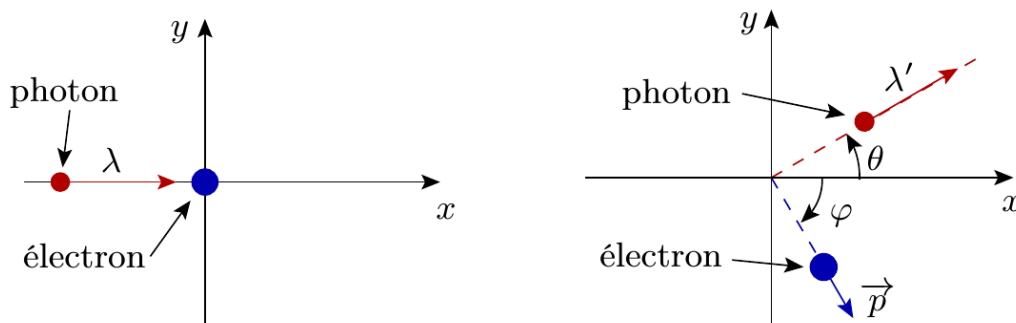
Il est observé expérimentalement l'apparition d'un second pic de diffusion dont l'écart en longueur d'onde avec le premier ne dépend ni de λ , ni du matériau diffuseur. Des graphiques d'intensités spectrales $I(\lambda_0)$ relevés sont donnés sur les figures suivantes.



1. Expliquer sans calcul l'échec de la physique classique pour justifier de tels résultats expérimentaux.
2. On suppose à présent que le faisceau incident de rayons X est en fait constitué de photons

et que ceux-ci rentrent en collision avec les électrons *libres* du bloc de graphite (*ces électrons ont une énergie de liaison négligeable devant l'énergie des photons incidents*). Dans ce cas, on adopte le modèle suivant de diffusion COMPTON : un photon de longueur d'onde λ frappe un électron au repos dans le référentiel galiléen d'étude et, lors de la collision, il subit une diffusion d'un angle θ avec une longueur d'onde λ' , alors que l'électron s'éloigne dans la direction φ avec une impulsion \vec{p} . L'électron est traité avec une approche relativiste : son énergie cinétique est alors

$$\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)m_e c^2 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$



Que peut-on dire qualitativement du signe de $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, appelé décalage Compton ?

3. Pour la courbe expérimentale avec $\theta = 135^\circ$, l'électron est-il relativiste ?
4. Avec une démarche énergétique et relativiste, obtenir une première équation entre λ , λ' et $p = \|\vec{p}\|$. On notera m_e la masse au repos de l'électron. Son énergie totale \mathcal{E}_e pour une impulsion p_e vérifie la relation relativiste :

$$\mathcal{E}_e^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$$

5. Le système du photon et de l'électron est considéré isolé pendant la collision dans le référentiel d'étude. En déduire deux autres équations entre λ , λ' , p , φ et θ .
6. Expliquer la démarche qui permet de parvenir à l'expression suivante du décalage Compton :

$$\Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\theta) \quad \text{où} \quad \Lambda = \frac{h}{m_e c}$$

7. Le décalage Compton ainsi obtenu est-il cohérent avec les résultats expérimentaux ? On pourra notamment calculer à dessein la longueur d'onde Compton Λ .
8. Quelle explication peut-on donner pour expliquer la présence du pic à la longueur d'onde λ , en plus de celui à la longueur d'onde λ' , sur les graphiques expérimentaux ?

Quantification de la matière

Exercice MQ5: Critère quantique

★

Décidez si le recours à la physique quantique est nécessaire pour étudier les objets suivants ou si la théorie classique est suffisante :

1. une antenne radio : puissance 5 kW et fréquence d'émission dans le domaine des ondes radio.
2. un noyau atomique : énergie de liaison typique 8 MeV, rayon $r_A \approx A^{1/3}r_0$, avec A le nombre de masse et $r_0 = 1,2 \text{ fm} = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$ et masse d'un nucléon $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
3. l'hélium superfluide : température de transition $T = 2,18 \text{ K}$, distance moyenne entre atomes $a = 0,36 \text{ nm}$ et masse $m = 6,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

On donne $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ et $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Exercice MQ6: Ordres de grandeurs de longueurs d'ondes de De Broglie

★

1. Quelle est la longueur d'onde de DE BROGLIE : d'un électron accéléré par un potentiel de 100 eV ? d'un neutron à température ambiante ? Comparer avec les dimensions atomiques. Expliquer pourquoi les faisceaux neutroniques permettent de sonder la matière plus en profondeur.
2. Domaine relativiste : en physique des hautes énergies on a construit des accélérateurs d'électrons d'énergie de plus de 100 GeV (voir ci-contre l'accélérateur SIRIUS). Quelle est la longueur d'onde de DE BROGLIE de ces électrons ? Pourquoi de si hautes énergies sont-elles nécessaires ? On donne la relation relativiste entre énergie et impulsion :



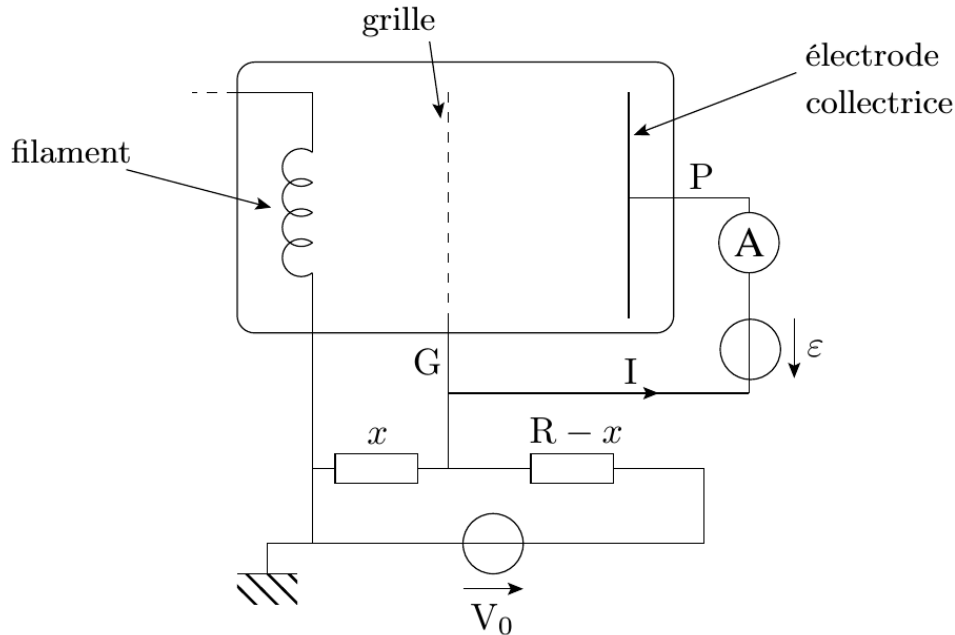
$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Exercice MQ7: Énergies dans l'atome d'hydrogène

★★

1. Ions hydrogénoïdes : on appelle *ion hydrogénoïde* un ion comportant un noyau chargé $+Ze$ et un unique électron. En reprenant le principe du modèle de BOHR, exprimer les rayons r_n et les énergies E_n des orbites en fonction de a_0 (rayon de Bohr), n et Z et E_I, n, Z respectivement. Comment varie la force de la liaison avec Z ? Expliquer qualitativement pourquoi l'étude de ces ions hydrogénoïdes permet actuellement de tester les théories portant sur la structure des noyaux atomiques ?
2. Principe d'indétermination de Heisenberg :
 - Tracer l'allure du potentiel $E_p(r)$ pour l'électron autour du proton fixe en O .
 - On considère une trajectoire de rayon moyen $\langle r \rangle$. Définir $\langle r \rangle$ en fonction de la fonction d'onde $\Psi(r, t)$. Définir une densité radiale de probabilité de présence.
 - En assimilant l'atome à un système 1D décrit par x (ce qui n'est pas correct, il faudrait travailler à 3D...), et l'indétermination Δx à $\langle r \rangle / 2$, déterminer un ordre de grandeur de l'énergie mécanique \mathcal{E} de l'électron en fonction de $\hbar, m_e, \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ et $\langle r \rangle$.
 - Chercher la valeur de $\langle r \rangle$ qui minimise cette énergie totale. Application numérique. Que vaut alors l'énergie minimale ?

On considère l'expérience de FRANCK et HERTZ (1914) dont le schéma de principe du dispositif est le suivant. Il comporte notamment une ampoule fermée contenant une vapeur de gaz monoatomique sous faible pression et dans laquelle se trouvent un filament, une grille et une électrode collectrice.



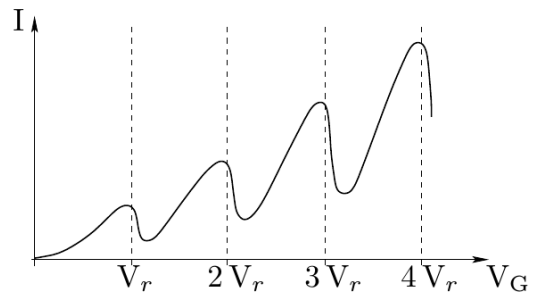
1. La grille est portée au potentiel électrique V_G positif obtenu grâce à un circuit contenant deux résistances variables (x et $R - x$, avec x compris entre 0 et R) et un générateur délivrant une tension V_0 .

Quelle est la tension de la grille V_G en fonction de V_0 , x et R sachant que $I \ll V_0/R$, et que le courant circulant dans le filament est négligeable? À quoi servent les résistances réglables? Comment peut-on réaliser pratiquement ce dispositif?

2. Le filament chauffé émet des électrons (masse m_e) de vitesse quasi-nulle. Quelle est la vitesse v des électrons au niveau de la grille?
3. L'électrode collectrice est au potentiel $V_P = V_G - \epsilon$ où ϵ est une constante positive supposée petite devant V_G . Quelle est la vitesse v' des électrons au niveau de cette électrode (dans l'hypothèse où la traversée de la grille, à maille large, s'effectue sans changement de vitesse et où la vapeur de gaz est sans influence)?
4. On suppose maintenant que la vapeur de gaz contenue dans l'ampoule influence le mouvement des électrons. Ces derniers peuvent subir deux types de collisions avec les atomes du gaz :
 - une collision élastique (où l'électron conserve son énergie cinétique)
 - une collision inélastique (où l'électron peut transférer de l'énergie à l'atome; on note W l'énergie transférée à l'atome de gaz sous forme d'énergie potentielle)

On donne la courbe de I en fonction de V_G sur la figure suivante.

- (a) Interpréter cette courbe sur le domaine $0 \leq V_G \leq V_r$.
- (b) Que se passe-t-il quand V_G franchit V_r ?
- (c) Interpréter la suite de la courbe.
5. En déduire que l'atome ne peut prendre à l'électron qu'une quantité d'énergie parfaitement déterminée W_r que l'on exprimera.
6. Accord avec le modèle de Bohr ...



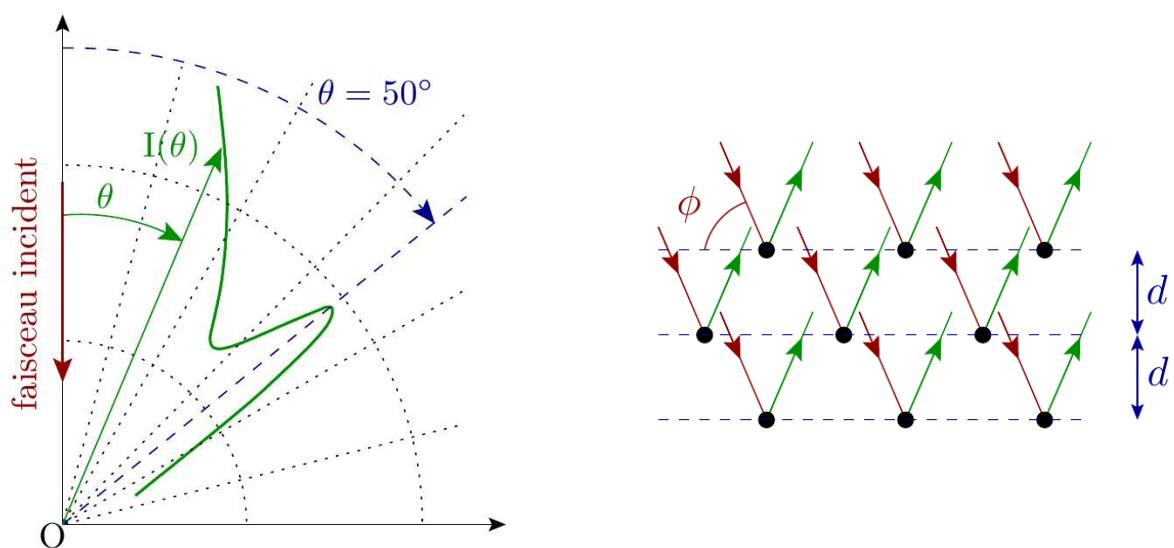
- (a) Dans les expériences faites avec de la vapeur de mercure, on mesure la tension $V_r = 4,9 \text{ V}$ (le potentiel d'ionisation est $10,5 \text{ V}$). Qu'arrive-t-il aux atomes de mercure dès que V_G est supérieur à V_r ?
- (b) On constate aussi que lorsque V_G dépasse V_r , une lumière de longueur d'onde $\lambda_r = 253,7 \text{ nm}$ est émise par le gaz. Préciser quel est son domaine spectral et interpréter le phénomène.
- (c) Commenter la phrase suivante : « *Le fait que l'électron ne puisse pas céder à l'atome une quantité d'énergie inférieure à W_r vient confirmer la notion des niveaux d'énergie discontinus introduite à partir de la condition de quantification de BOHR* ».

Exercice MQ9: Expérience de Davisson et Germer

★ ★

DAVISSON et GERMER ont validé le concept des ondes de DE BROGLIE pour des électrons en 1927. Pour ce faire, ils ont fait parvenir, en incidence normale, un faisceau parallèle incident d'électrons accélérés par une différence de potentiel V sur un cristal de nickel dans le vide. Un détecteur était chargé de mesurer pour divers angles de diffusion θ (« à l'infini ») l'intensité électronique $I(\theta)$ correspondante.

La figure de gauche précise le diagramme angulaire d'intensité relevée pour la tension $V = 54 \text{ V}$ (sachant que des mesures pour d'autres tensions ont aussi été effectuées).



1. Les physiciens BRAGG, père et fils, ont proposé en 1912, lors de l'étude de la diffraction

de rayons X par un cristal (prix Nobel 1915), la formule de BRAGG :

$$n\lambda = 2d \sin \Phi$$

où n est un entier, λ est la longueur d'onde, d est la distance entre deux plans réticulaires du cristal et φ est l'angle formé entre chaque plan réticulaire et un faisceau parallèle émergent **intense**.

- (a) Expliquer pourquoi le rayonnement obtenu par réflexion spéculaire sur les atomes d'un même plan réticulaire est particulièrement intense.
 - (b) En déduire la formule de BRAGG en considérant les interférences entre les ondes réfléchies spéculairement sur les atomes pour l'ensemble des plans réticulaires.
2. L'utilisation de rayons X permet de connaître la distance entre les plans réticulaires $d = 0,091 \text{ nm}$.
- (a) En exploitant la formule de BRAGG, déterminer les longueurs d'onde équivalentes $\lambda_{eq,n}$ envisageables du faisceau électronique.
 - (b) Confronter ces longueurs d'onde avec la longueur d'onde de DE BROGLIE λ_{dB} du faisceau électronique. Conclure.

Exercice MQ10: Microscope électronique

★

En lumière visible, on ne peut observer au mieux que des détails de taille la fraction de micromètre (limitation de la résolution par diffraction). Si l'on exploite à la place du rayonnement électromagnétique des ondes de matière, on peut améliorer cette résolution avec une longueur d'onde de DE BROGLIE bien plus faible. Bien entendu, il faut adapter la technologie de l'instrumentation : ce sont des lentilles électromagnétiques qui sont utilisées pour dévier les rayons électroniques. . .

Le premier microscope électronique fut conçu en 1931 et il avait déjà une résolution correcte (quelques dizaines de nm) et son inventeur ERNST RUSKA (travaillant avec VON BORRIES) fut tout naturellement récompensé du prix Nobel. . . en 1986 ! Les microscopes électroniques actuels peuvent atteindre une résolution de l'ordre de 0,1 nm . . .

Une image obtenue en microscopie électronique est donnée ci-contre : il s'agit d'un quasi-cristal.



1. Un microscope électronique est un appareil bien plus complexe technologiquement qu'un microscope optique. Par exemple, le faisceau électronique doit se propager dans le vide et en enceinte blindée. Pourquoi ?
2. On peut montrer que la limite de résolution d'un microscope (optique ou électronique) est :

$$d_m = \frac{0,61\lambda_0}{n \sin \alpha}$$

où λ_0 est la longueur d'onde, n est l'indice d'immersion de l'objectif, α l'angle de vue de l'objectif depuis la préparation ($n \sin \alpha$ est appelé « ouverture numérique »). De plus, pour un électron relativiste de masse m_e , d'énergie E et d'impulsion p ,

$$E^2 = p^2c^2 + m_e^2c^4$$

Si l'on considère un microscope électronique d'ouverture numérique $n \sin \alpha = 5,0 \times 10^{-3}$ (les aberrations deviennent rapidement gênantes en microscopie électronique) et une tension accélératrice des électrons $U = 400 \text{ kV}$, quelle est sa limite théorique de résolution ?

Exercice MQ11: Fil quantique

★ ★

On étudie la conduction électronique dans un fil quantique : il s'agit d'un matériau dans lequel les électrons peuvent se déplacer d'une extrémité à l'autre du fil. Sa géométrie est celle d'un parallélépipède, de section carrée de côté a et de longueur ℓ avec $\ell \gg a$. Pour des raisons géométriques, les électrons n'ont la possibilité que de se déplacer selon l'axe (Ox) du fil. Les électrons à l'intérieur du fil sont traités comme des particules quantiques, de masse m , libres de se déplacer dans la direction Ox du fil.

La fonction d'onde qui représente un état stationnaire d'un électron, d'énergie E , dans le fil s'écrit sous la forme :

$$\varphi(x) = A \exp(ikx)$$

où A est une constante réelle de normalisation.

1. Commenter la forme choisie pour $\varphi(x)$. Que représente k ? Normaliser la fonction d'onde.
2. Exprimer l'énergie E de l'électron ainsi que sa vitesse v_x de déplacement suivant l'axe Ox .
3. Quelle est l'expression de la densité de probabilité de présence de l'électron le long du fil ?
4. On admet que la probabilité de présence entre x et $x + dx$ d'un électron, dont le vecteur d'onde k est compris entre k et $k + dk$ est :

$$dP_k(x) = \frac{dP(x)}{dx} \frac{\ell}{\pi} dx dk$$

Exprimer la contribution au courant électrique dI qui traverse le fil, dans le sens des x croissant, d'un électron dont le vecteur d'onde est compris entre k et $k + dk$ en fonction de e , v_x et k .

5. Le fil quantique est disposé entre deux métaux, soumis à une différence de potentiel de U . Dans le métal 1, du côté $x < 0$, les électrons de conduction ont une énergie E_1 et dans le métal 2, du côté $x > \ell$, les électrons de conduction ont une énergie $E_2 = E_1 - eU$.

Montrer que l'intensité du courant peut se mettre sous la forme $I = -GU$. Donner l'expression et la valeur numérique de G ainsi que celle de $R = 1/G$.

Exercice MQ12: LHC

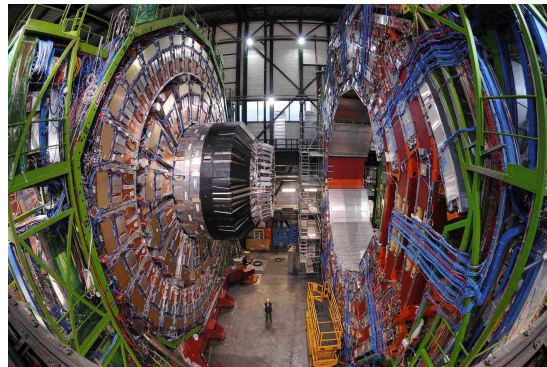
★

Montrer que si l'on cherche à étudier la matière à une échelle spatiale très faible d à l'aide d'un quanton matériel de masse m , d'énergie E et d'impulsion \vec{p} (avec $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ en relativiste), cela impose de travailler à de hautes énergies telles que :

$$E \gg \frac{\hbar c}{2d}$$

Proposer une application numérique pertinente dans le cadre du *Large Hadron Collider* (LHC, photo du détecteur Atlas ci-contre) avec une énergie de collision de l'ordre de 10 TeV.

Le LHC a permis récemment la découverte du boson de HIGGS, qui était la particule manquante du Modèle Standard et confère une masse aux autres particules.



Exercice MQ13: Principe de correspondance et modèle de Bohr

★ ★

1. Montrer que le modèle de BOHR conduit, pour des transitions entre des niveaux n et $n-1$ élevés, à la même fréquence d'émission de rayonnement par l'atome d'hydrogène que celle prévue par la théorie classique.
2. Calculer l'action associée et vérifier que le système est bien de nature classique.

Exercice MQ14: Molécule de benzène

★ ★

Les orbitales π de la molécule cyclique de benzène C_6H_6 peuvent être modélisées de façon très approximative en considérant les fonctions d'onde et les énergies d'une particule quantique astreinte à se déplacer sur un cercle, de rayon a . On adopte une modélisation unidimensionnelle en supposant qu'une particule contrainte de se déplacer sur le cercle se déplace en fait sur le segment $0 \leq x \leq 2\pi a$, avec une énergie potentielle $V(x) = 0$. Un état stationnaire de cette particule est représenté par la fonction d'onde : $\psi(x, t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$.

1. Proposer une structure de LEWIS pour le benzène. Montrer que certains électrons sont délocalisés sur les 6 atomes de carbone : on les nomme *électrons π* .
2. On cherche une fonction d'onde propre sous la forme $\varphi(x) = A \exp(ikx)$. Déterminer k et justifier qu'on peut choisir A réel. Normaliser cette fonction d'onde propre sur l'intervalle $[0; 2\pi a]$.
3. On adopte des conditions aux limites dites périodiques $\varphi(0) = \varphi(2\pi a)$.
 - (a) Interpréter ce choix.
 - (b) Montrer qu'on aboutit à une quantification des niveaux d'énergie. On utilisera un nombre quantique, noté m . Interpréter pourquoi certains niveaux d'énergie sont doublement dégénérés (c'est-à-dire que deux valeurs distinctes de m conduisent à une même valeur de l'énergie).
 - (c) Représenter sur un diagramme énergétique les premiers niveaux d'énergie.
4. On traite les 6 électrons π du benzène comme des particules quantiques astreintes à se déplacer sur un cercle de rayon a .
 - (a) Ces électrons occupent les niveaux d'énergie en respectant les règles de HUND et de PAULI. Représenter l'état fondamental du système sur un diagramme énergétique.
 - (b) Sachant que le benzène présente un spectre d'absorption dont la bande de longueur d'onde la plus basse est à 255 nm, en déduire une valeur numérique de a .

- (c) Sachant que la longueur de la liaison C–C vaut 142 pm, commenter le résultat obtenu.

Exercice MQ15: Étoile à neutrons

★ ★

Une **étoile à neutrons** se forme à la suite de l'explosion d'une supernova (forme ultime de l'évolution d'une étoile très massive). Elle est caractérisée par un faible diamètre (de l'ordre de la dizaine de kilomètres) et une masse comparable à celle du Soleil. Il en résulte qu'elle forme un astre très dense.

On considère une étoile à neutrons de masse identique à la masse du Soleil $M = 2,0 \times 10^{30}$ kg, exclusivement constituée de neutrons de masse $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg. On suppose que la densité de neutrons est uniforme à l'intérieur de l'étoile, qui est assimilée à une boule de rayon R . Les neutrons forment un gaz de particules quantiques sans interaction.

1. Calculer le nombre N de neutrons dans l'étoile.
2. On admet que l'énergie cinétique de chaque neutron peut être évaluée en supposant qu'il est confiné dans un volume V/N où V est le volume de l'étoile.
 - (a) Exprimer l'échelle de longueur caractéristique du confinement d'un neutron en fonction de V et N .
 - (b) En déduire que l'énergie cinétique totale des neutrons s'écrit, à une constante multiplicative près, sous la forme suivante :

$$E_c \simeq \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2}.$$

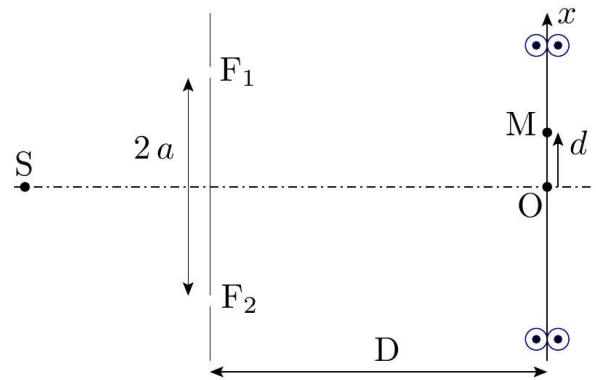
3. Du fait de l'attraction gravitationnelle que les neutrons exercent entre eux, l'étoile possède une énergie de cohésion gravitationnelle E_g qui s'exprime simplement en fonction de la constante de gravitation universelle \mathcal{G} , de sa masse M et de son rayon R .
Déterminer, par analyse dimensionnelle, une expression de E_g (à une constante multiplicative près). On précisera le signe à donner à E_g .
4. Représenter l'allure de l'énergie totale de l'étoile $E = E_c + E_g$ et montrer qu'il existe un rayon d'équilibre stable pour l'étoile. Calculer ce rayon d'équilibre et en déduire la masse volumique de l'étoile.
5. Comparer cette masse volumique à celle d'un noyau atomique, qu'on peut assimiler à une distribution de masse sphérique de densité uniforme et de rayon $r = r_0 A^{1/3}$, où A est le nombre de nucléons du noyau et $r_0 = 1,2 \times 10^{-15}$ m.

Interférences de matière

Exercice MQ16: Fentes d'Young

★ ★

On considère le dispositif d'YOUNG étudié en cours avec une source ponctuelle de quantons S monoénergétiques placée sur la médiatrice de deux fentes F_1 et F_2 distantes de $2a$. Les quantons sont émis un à un (c'est-à-dire bien séparément). La distance entre le plan des fentes et l'écran, qui lui est parallèle, est $D \gg a$. L'observation est effectuée en un point M quelconque de l'écran repéré par $d \ll D$.



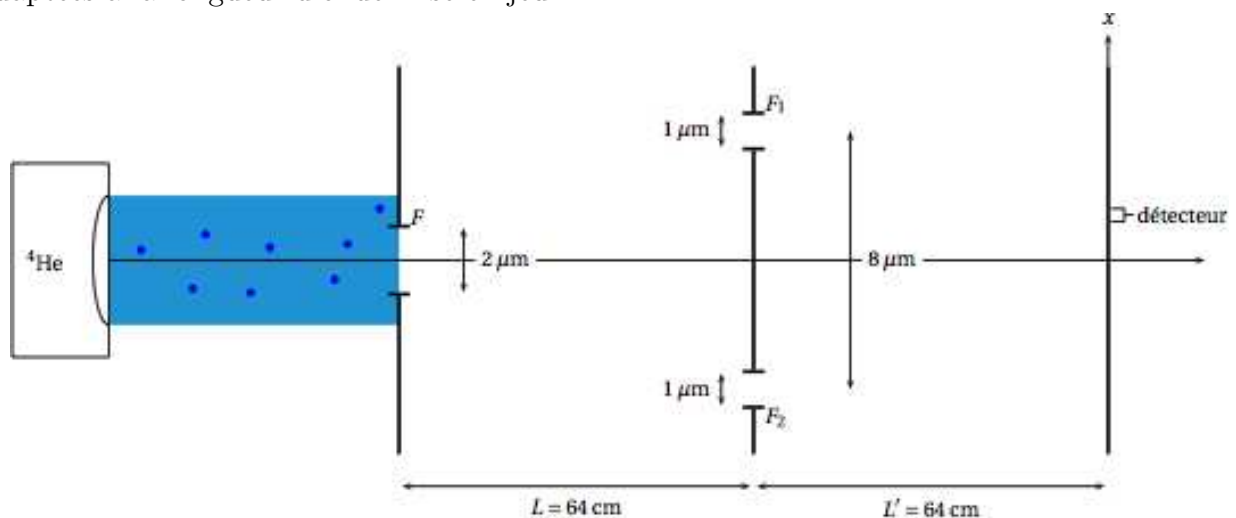
Pour savoir par quelle fente passe chaque quanton, on mesure par un dispositif non représenté la translation de l'écran suivant (Ox) induite par chaque impact de quanton (l'écran gagne la quantité de mouvement suivant (Ox) du quanton absorbé).

1. Exprimer la quantité de mouvement p_{1x} selon (Ox) d'un quanton parvenant en M après être passé par la fente F_1 en fonction de la valeur p de son impulsion, de d , a et D .
2. Faire de même pour le cas d'un quanton passant par la fente F_2 et en déduire que l'on sait de quelle fente provient le quanton seulement si l'indétermination sur la quantité de mouvement de l'écran est très inférieure à une valeur fonction de p , a et D .
3. En se plaçant dans cette hypothèse, montrer qu'il est impossible d'observer des interférences sur l'écran.

Exercice MQ17: Expérience de Carnal et Mlynek

★ ★

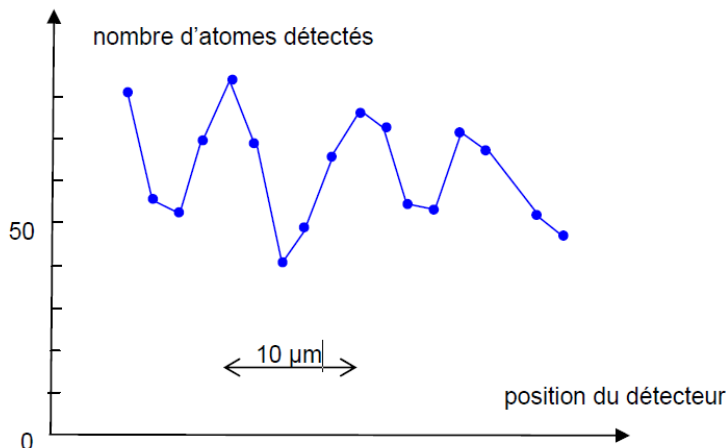
En 1991, O. CARNAL et J. MLYNEK ont réalisé une véritable expérience de fentes d'YOUNG avec des atomes d'Hélium. La très grande difficulté de cette expérience tient, entre autres, à la très faible valeur de la longueur d'onde de DE BROGLIE, qui dans ce cas, vaut $\lambda_{dB} = 0,103 \text{ nm}$. Les fentes d'YOUNG ont une largeur de $s_2 = 1 \mu\text{m}$ et leurs centres sont séparés de $a = 8 \mu\text{m}$. Dans le cas d'une expérience d'interférences lumineuses, la longueur d'onde est 10^3 à 10^4 fois plus grande et l'écartement des fentes 10^3 fois plus grand. Les dimensions de l'expérience sont adaptées à la longueur d'onde mise en jeu.



Dans l'expérience, le faisceau incident d'atomes d'Hélium est diffracté par une première fente unique F de largeur $s_1 = 2 \mu\text{m}$, puis rencontre deux fentes F_1 et F_2 parallèles, placées à une distance $L = 64 \text{ cm}$ de la première fente F . On détecte les atomes d'hélium dans un plan

situé à une distance $L' = 64$ cm derrière la fente double $F_1 - F_2$, avec un détecteur de largeur $\delta = 2 \mu\text{m}$ placé dans la zone de recouvrement des faisceaux issus de F_1 et F_2 .

On obtient les résultats suivants :



L'interfrange observée est estimée à $i = 8,4 \mu\text{m} \pm 0,8 \mu\text{m}$.

1. La masse d'un atome d'hélium est $m_{He} = 6,70 \times 10^{-27}$ kg. Quelle est la vitesse des atomes d'Hélium dans cette expérience ? Estimer le temps mis par un atome pour aller de la fente F au détecteur.
2. Calculer l'angle θ de diffraction de l'onde de matière par la fente F . Vérifier que les fentes F_1 et F_2 reçoivent bien cette onde.
3. Calculer l'angle θ' de diffraction de l'onde de matière par la fente F_1 ou F_2 . Calculer la largeur de la zone de recouvrement des deux ondes diffractées par les deux fentes, dans le plan de détection.
4. On détecte en moyenne 65 atomes en 10 minutes, mais une vingtaine correspond au bruit de fond (obtenu en occultant le faisceau incident). Calculer le temps entre deux détections d'atomes. Comparer avec le temps trouvé à la question (1). Commenter.

II Équation de Schrödinger

Exercice MQ18: Oscillateur harmonique quantique

★ ★

On considère une particule quantique, de masse m , soumise à une énergie potentielle de la forme $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$.

1. Sous quelle forme s'écrit la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E pour cet oscillateur ?
2. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le cas considéré.
3. Pour l'état fondamental, on a $\varphi(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$.

(a) Déterminer la constante de normalisation \mathcal{N} . On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

(b) Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule. En déduire, sans calcul, la valeur de la position moyenne $\langle x \rangle$ de la particule.

(c) Déterminer l'expression de l'énergie E et de a en fonction de \hbar , m et de ω .

Exercice MQ19: Conservation locale de la densité de probabilité

★ ★

En électromagnétisme, on a vu que l'équation locale de conservation de la charge totale contenue dans un volume donné d'un conducteur s'écrit $\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ où $\rho(M, t)$ est la densité volumique de charge au point M à l'instant t et \vec{j} le vecteur densité volumique de courant. Ce qui donne, pour un problème à une dimension suivant l'axe (Ox) , avec $\vec{j} = j\vec{e}_x$: $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$.

En mécanique quantique, la probabilité totale de trouver la particule dans un volume donné doit aussi être conservée.

1. En combinant l'équation de SCHRÖDINGER à une dimension et son expression complexe conjuguée, établir l'équation locale de conservation de la probabilité, reliant la densité de probabilité ρ à la densité de courant de probabilité \vec{J} dont on donnera l'expression.
2. En utilisant la relation de dispersion de l'onde plane $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, exprimer le vecteur densité de courant de probabilité $\vec{J}(x, t)$ en fonction de \vec{k} (retrouver le résultat du cours) puis en fonction de la vitesse de groupe \vec{v}_g associée au paquet d'onde décrivant la particule.
3. Proposer une analogie entre mécanique quantique et électromagnétisme dans ce contexte.

Exercice MQ20: Équation de Klein-Gordon

★ ★ ★

En mécanique quantique, pour des particules relativistes, la théorie de la relativité restreinte montre que l'énergie (pour une particule ponctuelle) est reliée à la quantité de mouvement par la relation :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (Eq)$$

où $E_0 = mc^2 = \hbar\omega_0$ est l'énergie de masse de la particule de masse m dans son référentiel.

On se restreint au cas $E > 0$.

1. En effectuant une démarche similaire à celle qui a conduit en cours à l'équation de SCHRÖDINGER, établir l'équation de KLEIN-GORDON pour une particule quantique relativiste (de spin nul), régissant l'évolution temporelle de la fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$.
2. Quelle relation entre ω et \vec{k} doit être satisfaite pour qu'une onde plane $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ satisfasse cette équation? Toutes les fréquences peuvent-elles se propager librement? Quel est l'équivalent en électromagnétisme classique de ce problème?
3. Calculer la vitesse de groupe v_g des paquets d'onde, en fonction de ω . Quelle relation y a-t-il entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe? Tracer l'allure de $v_g(\omega)$ et $v_\varphi(\omega)$. Identifier les domaines classique et ultra-relativiste (énergie de masse négligeable).
4. Limite classique
Que devient (Eq) dans la limite classique? Que devient la vitesse de groupe? Commenter.

Cette équation pose cependant certains problèmes :

- les énergies peuvent être négatives
- la probabilité de présence également ...

DIRAC écrira son équation relativiste afin de surmonter le problème de la densité de probabilité de présence négative, et sera amené à interpréter les énergies négatives par l'existence de l'antimatière, observée depuis expérimentalement. Son équation, qui s'applique aux fermions, permet d'introduire théoriquement la notion de spin.

Puits de potentiel

Exercice MQ21: Superposition d'états dans un puits infini

★ ★

On considère un puits infini symétrique compris entre $x = 0$ et L . On nomme $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les fonctions d'onde spatiales normalisées des deux premiers états stationnaires du puits.

On prépare un quanton à $t = 0$ dans l'état :

$$\Psi(x, t = 0) = \cos \theta \varphi_1(x) + \sin \theta \varphi_2(x) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta < \pi$$

On donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 u^2 \sin^2(n\pi u) du = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2 n^2}$$

$$\int_0^1 u \sin(\pi u) \sin(2\pi u) du = -\frac{8}{9\pi^2}$$

$$\int_0^1 u^2 \sin(\pi u) \sin(2\pi u) du = -\frac{8}{9\pi^2}$$

1. Vérifier que $\Psi(x, 0)$ est normalisée.
2. Quelle est la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ à un instant $t > 0$? Représenter son évolution au cours du temps.
3. Déterminer les densités de probabilité de présence à l'instant t aux positions $x = 0$, $x = L/2$ et $x = L/4$. Analyser leur dépendance vis à vis de θ .
4. Calculer l'évolution dans le temps de $\langle x \rangle (t)$. Commenter.
5. Calculer l'évolution de $\langle x^2 \rangle (t)$ et en déduire l'indétermination $\Delta x(t)$. Interpréter les résultats.

Remarque : l'énergie moyenne est $\langle E \rangle = \cos^2 \theta \langle E \rangle_1 + \sin^2 \theta \langle E \rangle_2$, indépendante du temps (conservation de l'énergie).

Exercice MQ22: Puits infini à 1D

★ ★

Soit un puits infini de largeur a : $V(x) = 0$ pour $0 < x < a$ et $V = \infty$ autrement.

Données mathématiques

$$\mathcal{F}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-2n}$$

$$\mathcal{F}(1) = \frac{\pi^2}{8}, \quad \mathcal{F}(2) = \frac{\pi^4}{96}, \quad \mathcal{F}(3) = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\int_0^1 u \sin^2(n\pi u) du = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 u^2 \sin^2(n\pi u) du = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2 n^2}$$

$$\int_0^1 u^2(1-u)^2 du = \frac{1}{30}$$

$$\int_0^1 u(1-u) \sin(n\pi u) du = \frac{2}{\pi^3 n^3} (1 - (-1)^n)$$

1. Montrer que dans l'état propre $\Psi_n(x, t)$, on a $\langle x \rangle = a/2$ et

$$\Delta x^2 = \frac{a^2}{12} \left(1 - \frac{6}{n^2 \pi^2} \right)$$

2. Soit une fonction d'onde s'identifiant à $t = 0$ à $\Psi(x, 0) = Ax(a - x)$, avec $A = \text{cte}$.

(a) Déterminer A .

(b) La probabilité p_n de trouver la particule dans le n -ième état propre de l'énergie est associée au recouvrement entre les deux parties spatiales des fonctions d'onde (normalisées) $\Psi(x, 0)$ et $\varphi_n(x)$:

$$p_n = |\alpha_n|^2$$

avec

$$\alpha_n = \int_0^a \Psi(x, 0) \varphi_n(x) dx$$

Calculer p_n . Interpréter.

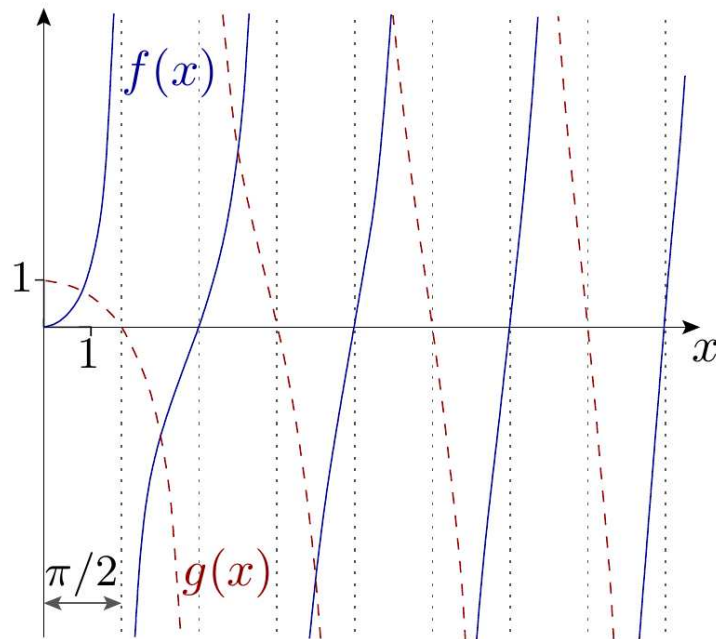
(c) Calculer, à partir de ces probabilités, les valeurs moyennes $\langle E \rangle$, $\langle E^2 \rangle$ pour cette fonction d'onde. En déduire l'indétermination sur une mesure de l'énergie de l'état. Expliquer l'existence de cette indétermination.

Exercice MQ23: Puits fini

★ ★

Soit un quanton non relativiste de masse m et d'énergie E étudié dans un puits de potentiel rectangulaire fini unidimensionnel (énergie potentielle $V(x) = 0$ pour $x \in [-L/2, L/2]$ et $V(x) = V_0 > 0$ sinon). Le cas considéré est $0 < E < V_0$.

On donne sur la figure ci-dessous les représentations graphiques de fonctions utiles : $f(x) = x \tan x$ (traits pleins) et $g(x) = x \cotan x$ (pointillés).



On pose :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{et} \quad K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

1. Expliciter la forme générale de la fonction d'onde spatiale d'un état stationnaire quelconque en utilisant k et K et sans chercher à déterminer les facteurs inconnus.
2. Expliciter les relations existant entre les facteurs inconnus précédents. Préciser comment on peut en déduire la relation implicite vérifiée par les énergies E accessibles (seule la méthode est attendue).
3. On s'intéresse dans cette question uniquement à des états stationnaires de fonctions d'onde spatiales **paires** (états **symétriques**).

(a) Montrer que ces états respectent la condition

$$\frac{KL}{2} = \frac{kL}{2} \tan\left(\frac{kL}{2}\right)$$

(b) En déduire, par un raisonnement graphique exploitant la fonction $f(x)$, que les énergies correspondantes sont quantifiées et de nombre fini.

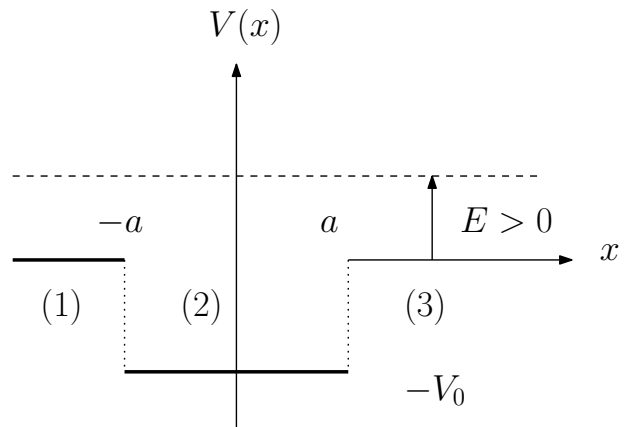
4. On s'intéresse dans cette question uniquement à des états stationnaires de fonctions d'onde spatiales **impaires** (états **antisymétriques**).

Montrer que de tels états n'ont pas les mêmes énergies que celles des états précédents de fonctions d'onde paires. Comment se situent ces énergies par rapport aux précédentes ?

5. Justifier qu'il n'existe pas d'autre état stationnaire possible.
6. À quelle condition n'y a-t-il qu'un seul état stationnaire lié possible ?

Une particule de masse m et d'impulsion $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ se déplace selon les x croissants et rencontre en $x = -a$ un puits de potentiel de largeur $2a$ et de profondeur V_0 . L'énergie prend la forme :

$$\begin{cases} V(x < -a) = V(x > a) = 0 \\ V(-a \leq x \leq a) = -V_0 \end{cases}$$



1. On cherche les valeurs de l'énergie E de la particule incidente pour lesquelles il n'y a pas de réflexion lors du franchissement de ce puits de potentiel.

Déterminer la forme des états stationnaires associés. En déduire une condition portant sur a et $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar}$ pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie. Retrouver qualitativement cette condition par un argument physique simple. En déduire les énergies correspondantes.

2. RAMSAUER et TOWNSEND ont observé ce phénomène de résonance en transmission lors de la diffusion d'électrons de basse énergie (à partir de $E = 0,7 \text{ eV}$) par des atomes de xénon. Évaluer la profondeur V_0 du puits de potentiel modélisant l'interaction mise en jeu en considérant que le diamètre d'un atome de xénon est de l'ordre de $0,1 \text{ nm}$.

Marche de potentiel

Exercice MQ25: Falaise de potentiel

★ ★

Une particule de masse m et d'énergie E approche une falaise de potentiel définie par :

$$\begin{cases} V(x < 0) = 0 \\ V(x \geq 0) = -V_0 \quad (< 0) \end{cases}$$

1. Quel est le mouvement classique ?
2. Résoudre l'équation de Schrödinger dans les deux domaines pour les états stationnaires.
3. Quelle est la probabilité pour qu'une particule d'énergie $E = V_0/2$ fasse demi-tour ? Commenter.

Exercice MQ26: Réflexion d'un neutron par un noyau atomique

★ ★

1. Le coefficient de probabilité de réflexion obtenu sur une marche de potentiel « montante » est inchangé lorsque les valeurs k_1 et k_2 des vecteurs d'onde dans les domaines $x < 0$ et $x > 0$ sont échangées (on pourra utiliser la valeur du cours). Cette propriété d'invariance est associée au *théorème de réciprocité* de la physique des ondes (hors-programme). Que peut-on en déduire pour le cas d'une marche de potentiel « descendante » ?
2. Application à la réflexion d'un neutron par un noyau atomique.

Lorsqu'un neutron entre dans un noyau atomique, il fait face à une énergie potentielle qui décroît brusquement. À l'extérieur du noyau, l'énergie potentielle est nulle alors qu'à

l'intérieur, elle chute à $V'_0 = -50 \text{ MeV}$.

On considère un neutron incident sur un noyau avec une énergie cinétique $E_c = 5 \text{ MeV}$ typique d'un neutron émis par fission nucléaire (supposé non relativiste).

En s'appuyant sur les résultats du cours, estimer la probabilité pour que le neutron soit réfléchi à la surface du noyau et donc pour qu'il ne puisse pas pénétrer dans le noyau pour y induire une autre fission nucléaire.

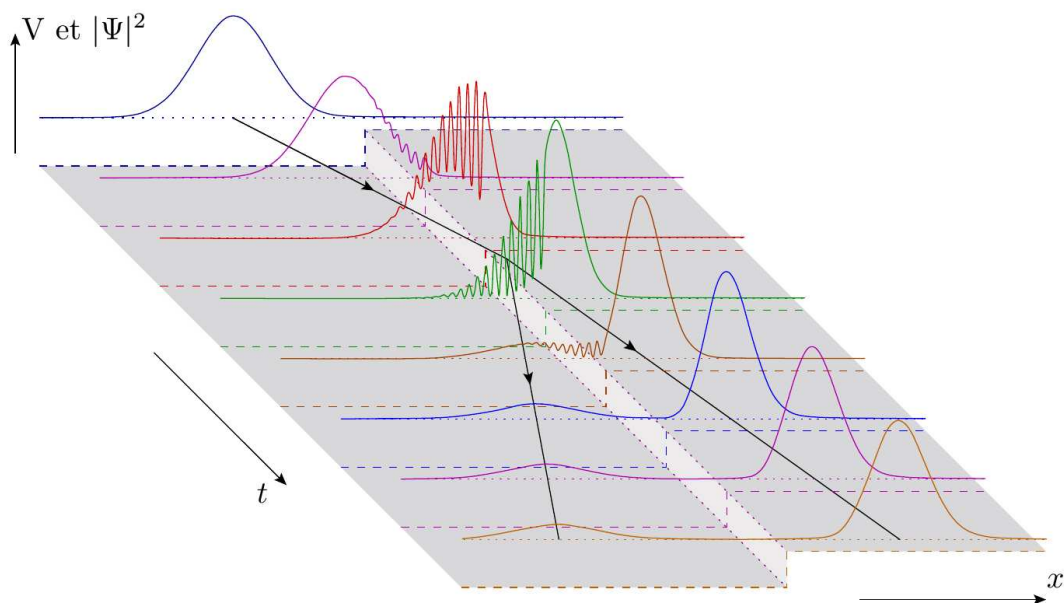
Exercice MQ27: Paquets d'onde et marche de potentiel

★ ★

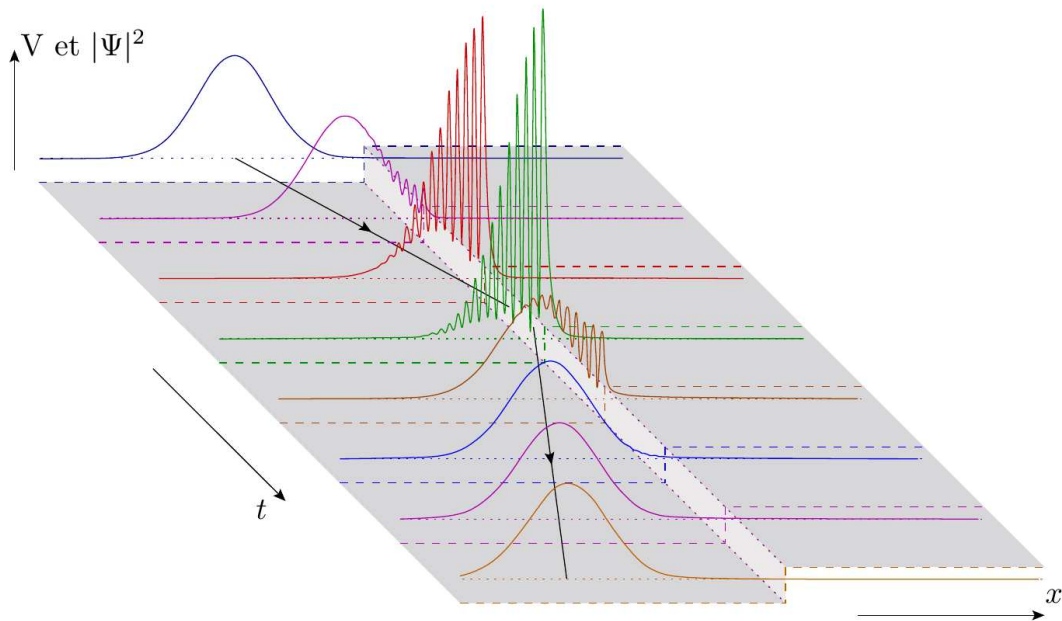
On peut représenter un quanton localisé par un paquet d'ondes. On représente sur les figures suivantes la densité de probabilité de présence d'un quanton incident $|\Psi(x,t)|^2$, en fonction du temps et de la position x , ainsi que le potentiel $V(x)$ auquel il est soumis. Les lignes noires orientées représentent la position classique du quanton.

Commenter le plus complètement possible l'évolution du paquet d'ondes dans les cas :

1. Marche de potentiel, cas $E > V_0$



2. Marche de potentiel, cas $E < V_0$



Exercice MQ28: Enrichissement isotopique

★ ★

On étudie le mouvement d'une particule quantique dans le potentiel $V(x)$ suivant

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \text{ (région I)} \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \text{ (région II)} \end{cases}$$

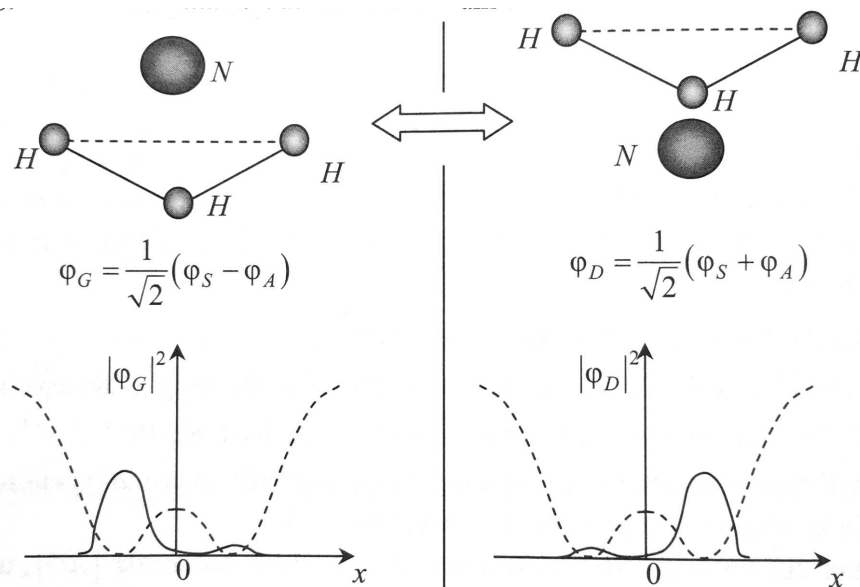
Une source envoie, depuis $-\infty$, un faisceau de particules quantiques constitué d'un mélange de deux isotopes. On souhaite utiliser le phénomène de réflexion sur la marche de potentiel pour modifier la composition isotopique du mélange.

1. Expliquer pourquoi il est nécessaire que l'énergie E des particules quantiques soit supérieure à la hauteur de la marche de potentiel V_0 si l'on veut modifier la composition isotopique du mélange. Prévoir qualitativement si le faisceau réfléchi est plus riche ou plus pauvre en isotope de plus grande masse.
2. Les particules quantiques ont une masse m et une énergie $E > V_0$. En reprenant les résultats de l'exercice précédent, déterminer la probabilité de réflexion R d'une particule quantique par la marche de potentiel. Représenter l'allure de R en fonction de E pour $E > V_0$. Compléter ce graphe en représentant aussi R pour $E < V_0$.
3. On se place dans la limite où $E \gg V_0$.
 - (a) Donner l'expression approchée de R correspondant à cette limite.
 - (b) On note m_1 et m_2 les masses des deux isotopes qui forment le faisceau de particules quantiques incidentes. Toutes ces particules quantiques sont envoyées avec la même vitesse. Expliquer pourquoi les coefficients de réflexion R_1 et R_2 diffèrent pour les deux isotopes et exprimer le rapport R_1/R_2 en fonction du rapport des masses m_1/m_2 .
 - (c) Le faisceau réfléchi est-il enrichi en isotope le plus lourd ou le plus léger ?

Exercice MQ29: Oscillations quantiques de la molécule d'ammoniac

* *

Dans la molécule d'ammoniac, le plan des trois hydrogènes peut se trouver au dessus ou au dessous de l'atome d'azote, la molécule se retournant « comme un parapluie » pour se trouver dans l'un de ces états stables.



Le problème se ramène à l'étude d'une particule fictive (associée aux trois hydrogènes) dans un double puits de potentiel (en pointillés sur la figure), pouvant passer d'un puits à l'autre par *effet tunnel*.

Dans l'état fondamental, cela se traduit par les deux fonctions d'onde (supposées réelles), solutions de l'équation de SCHRÖDINGER stationnaire : l'une φ_S symétrique par rapport à l'axe de la molécule et l'autre φ_A antisymétrique, dont les énergies respectives sont E_S et E_A .

Pour représenter l'état de la molécule dans l'une ou l'autre de ses configurations stables, on construit les combinaisons linéaires normalisées de φ_S et φ_A :

$$\varphi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_S(x) - \varphi_A(x)) \quad \text{et} \quad \varphi_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_S(x) + \varphi_A(x))$$

Ces fonctions d'onde, droite φ_D et gauche φ_G , décrivent à l'instant initial les états où pratiquement toute la probabilité de présence, donnée par $|\varphi_{G,D}|^2$ de la particule fictive se trouve d'un côté ou de l'autre de l'atome d'azote, c'est-à-dire respectivement dans le puits de gauche ou celui de droite, comme l'illustre la figure ci-dessus.

1. On se place dans le cas où à l'instant initial la molécule a été préparé dans son état décrit par la fonction d'onde φ_D , donc la particule fictive est localisée dans le puits de droite. Donner l'expression de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ représentant cet état à un instant t .
2. On pose $\omega = \frac{E_A - E_S}{\hbar}$. Exprimer $\varphi(x, t)$ en fonction de ω . Montrer en explicitant $|\Psi(x, t)|^2$ qu'au bout d'un temps T que l'on exprimera en fonction de ω , la particule fictive est dans le puits de gauche.
3. En exprimant judicieusement la densité de probabilité $|\Psi(x, t)|^2$, montrer que la molécule se retourne périodiquement. Évaluer la fréquence de retournement, compte tenu de la valeur numérique $E_A - E_S = 1,0 \times 10^{-4}$ eV.

L'isotope radioactif ${}_{83}^{212}\text{Bi}$ se désintègre en l'isotope ${}_{81}^{212}\text{Tl}$ du thallium en émettant une particule α (${}^4_2\text{He}$) d'énergie $E = 6,0 \text{ MeV}$. On rappelle, dans le domaine des faibles valeurs, l'expression approchée du facteur de transmission tunnel T dans le cas d'une barrière de hauteur V_0 et de largeur a , pour une particule de masse m et d'énergie E :

$$T \simeq \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp \left[-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right]$$



1. La photographie ci-contre représente du bismuth pur (cube de droite), et un cristal de bismuth oxydé. Comment interpréter simplement les irisations présentes sur le cristal oxydé? Que peut-on en déduire?
2. Déterminer la distance r_0 entre le noyau de thallium et la particule α pour laquelle l'énergie E est égale à l'énergie potentielle électrostatique. Évaluer numériquement cette distance.
3. Le rayon R d'un noyau de nombre de masse A est donné par la formule $R = R_0 A^{1/3}$ avec $R_0 = 1,2 \text{ fm}$. Déterminer la valeur numérique de R pour ${}_{81}^{208}\text{Tl}$. En déduire la valeur V_b du maximum de potentiel dans lequel évolue la particule α à l'extérieur du noyau.
4. En choisissant comme valeur approchée de la barrière $V_0 = V_b/2$, évaluer la valeur numérique du coefficient de transmission T .
En déduire un ordre de grandeur de la durée de vie moyenne τ de l'isotope radioactif du bismuth.

I Introduction au monde quantique

Quantification de la lumière

Exercice MQ1

1. $\frac{dN}{dt} \simeq 1,5 \times 10^{30}$ photons/s
2. Pour une pupille de surface 12 mm^2 , $\frac{dN}{dt} \simeq 5000$ photons/s

Exercice MQ2

1. $\hbar = 6,6 \times 10^{-16} \text{ eV s}$
2. $W = 1,74 \text{ eV}$
3. $\lambda_{\text{max}} = 0,71 \text{ }\mu\text{m}$

Exercice MQ3

1. La surface de récupération de l'électron est $S = \pi R^2 = 3 \times 10^{-18} \text{ m}^2$. La puissance P_{tot} se répartit sur une sphère de rayon D , de surface $S' = 4\pi D^2 \simeq 300 \text{ m}^2$. La puissance incidente sur la zone d'excitation de l'électron est donc $P = \frac{S}{S'} P_{\text{tot}}$. Le temps d'excitation nécessaire avec le modèle classique de la lumière sera toujours (exactement) :

$$\tau = \frac{W_s}{P} \simeq 20 \text{ h}$$

2. On trouve un flux de $\alpha = 1,25 \times 10^{-5}$ photons/s au niveau de l'électron. Ceci correspond à un temps moyen de réception d'un photon par l'électron de $1/\alpha \simeq \tau$. Ainsi, le temps moyen ne suffit pas à montrer l'existence du photon.
3. L'observation de photoélectrons pour des temps inférieurs à τ est impossible classiquement ! Le mécanisme d'émission de la matière est donc bien fondamentalement différent, l'émission du photon par la source est régie par une loi de probabilité.

Exercice MQ4

1. En physique classique, les rayons X incidents sont décrits par une onde électromagnétique de haute fréquence. Celle-ci met en oscillation les électrons de la matière qui, accélérés, rayonnent une onde qui est l'onde diffusée. Or, comme déjà vu lors de l'étude du rayonnement dipolaire électrique, la longueur d'onde est conservée dans ce processus donc ce n'est pas cohérent avec les résultats expérimentaux qui présentent deux pics dont l'un évolue suivant l'angle d'observation θ . Notons que même en tenant compte de l'effet DOPPLER, en raison des déplacements électroniques, cela ne permet pas de comprendre l'existence de ces deux pics. . .

Éléments de réponse

2. Le photon diffusé doit avoir une énergie inférieure à celle du photon incident si il met en mouvement l'électron (qui acquiert, de ce fait, une énergie cinétique). Ainsi, on prévoit que $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \geq 0$.
3. On relève $\lambda = 70,9 \text{ pm}$ et $\lambda' = 74,9 \text{ pm}$. Par conséquent, la perte d'énergie du photon à la diffusion est :

$$hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = 1,50 \times 10^{-16} \text{ J} = 0,934 \text{ keV}$$

Ceci doit correspondre à l'énergie cinétique de l'électron, d'où :

$$\boxed{\frac{v}{c} \simeq 6\%}$$

L'électron n'est pas très loin d'être relativiste. L'énoncé conserve l'approche relativiste pour garder des résultats corrects lorsqu'on travaille avec des rayons X plus énergétiques et/ou des angles θ plus élevés.

4. Conservation de l'énergie :

$$\boxed{\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}}$$

5. Conservation de la quantité de mouvement totale

$$\begin{cases} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + p \cos \varphi \\ 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - p \sin \varphi \end{cases}$$

6. On dispose de trois équations entre les cinq grandeurs $\lambda, \lambda', p, \varphi$ et θ . On peut donc obtenir une équation entre trois de ces grandeurs : on choisit d'éliminer p et φ .

Pour ce faire, on élimine φ en explicitant $p \cos \varphi$ et $p \sin \varphi$ et on en somme les carrés en songeant à $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Cela fournit une équation sans φ permettant d'éliminer p dans l'équation de la conservation de l'énergie.

7. On peut comprendre avec cette approche l'existence et la position du second pic observé sur les graphiques expérimentaux :

- la longueur d'onde λ' augmente bien lorsque θ augmente de 0° à 180° ;
- le décalage COMPTON $\Delta\lambda$ est bien indépendant de λ , ainsi que du matériau considéré (seul le fait d'avoir des électrons « libres » joue) ;
- l'accord numérique du décalage COMPTON est assez satisfaisant car, en calculant la longueur d'onde COMPTON

$$\boxed{\Lambda = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \text{ pm}}$$

on obtient une estimation assez convenable de l'écart entre les pics de diffusion : pour $\theta = 90^\circ$ par exemple, l'écart est de $2,2 \text{ pm}$ expérimentalement.

Des mesures beaucoup précises de GINGRICH, en 1930, donnent un meilleur accord encore.

8. Le pic à la longueur d'onde λ (appelé pic THOMSON, alors que l'autre pic est nommé pic COMPTON) peut aussi être compris en termes d'une collision entre le photon et les électrons liés en un édifice ionique dans le bloc de diffusion. Cela revient à remplacer la

Éléments de réponse

masse m_e par la masse M beaucoup plus élevée de cet édifice : pour le graphite, le noyau de carbone présente 6 protons et 6 neutrons donc $M \simeq 12 \times 1840 m_e \simeq 22000 m_e$ et le décalage $\Delta\lambda$ correspondant devient trop faible pour être mesuré (pour $\theta = 180^\circ$, on a $\Delta\lambda = 2 \times 10^{-4}$ pm!).

Quantification de la matière

Exercice MQ5

On compare l'action S caractéristique à \hbar .

1. $S = P \times \nu^2 \approx 1 \times 10^{14}$ Js $\gg \hbar$: classique
2. $S = r\sqrt{2mE} \approx 1 \times 10^{-34}$ Js $\approx \hbar$: quantique
3. $S = am\sqrt{k_B T} \approx 2 \times 10^{-34}$ Js : quantique

Exercice MQ6

1. électron accéléré par 100 eV : $\lambda_{dB} = 0,124$ nm
À température ambiante, $k_B T = E \simeq 25$ meV, soit $\lambda = 0,18$ nm. On peut ainsi utiliser les deux types de particules pour des expériences de diffraction sur des atomes ou molécules. Les faisceaux neutroniques sont non chargés, et ne sont ainsi pas repoussés par les charges présentes dans les atomes, au contre des faisceaux électroniques.
2. Ces électrons sont ultra-relativistes ($E \simeq pc$), et on trouve $\lambda \simeq hc/E \sim 1 \times 10^{-17}$ m. On atteint ainsi des dimensions inférieures au noyau atomique (de rayon 1×10^{-15} m), qui permettent de sonder sa structure (protons, neutrons, voire quarks...).

Exercice MQ7

1. On conserve la condition de quantification du moment cinétique de BOHR :

$$L_z = n\hbar = mrv$$

L'application du PFD à l'électron est modifiée :

$$-m\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$$

On obtient donc $r_n = \frac{n^2}{Z} a_0$, avec $a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{me^2 \pi}$. Les orbites sont logiquement plus proches du noyau.

L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En remplaçant par l'expression de r_n , on obtient :

$$E_n = -\frac{me^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -Z^2 \frac{E_I(H)}{n^2}$$

Éléments de réponse

L'énergie de liaison $|E_n|$ augmente donc comme Z^2 .

L'électron étant davantage localisé autour du noyau, on pourra observer des modifications de ces niveaux d'énergie E_n dus à l'interaction avec le noyau, plus marqués que dans l'hydrogène.

2. — $E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

— $dP(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ est la probabilité de trouver l'électron en (x, y, z) à (dx, dy, dz) près. La probabilité de mesurer r est donc la probabilité de trouver l'électron entre la sphère de rayon r et celle de rayon $r + dr$. Ainsi,

$$dP(r) = 4\pi r^2 dr \times |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

On en déduit :

$$\langle r \rangle = \int_0^{+\infty} r dP(r) = \int_0^{+\infty} 4\pi r^3 dr \times |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

On peut définir la *densité radiale de probabilité de présence* :

$$D_r(r) = \frac{dP(r)}{dr} = 4\pi r^2 |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

— On a $\langle E_p \rangle = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle}$. Le principe d'indétermination donne à 1D $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

Comme l'indétermination sur x est $\langle r \rangle$, on a $\Delta p_{\min} \sim \frac{\hbar}{\langle r \rangle}$. Avec $\langle p \rangle = 0$ (symétrie du mouvement de l'électron), $\Delta p_{\min} = \langle p^2 \rangle_{\min}$, soit :

$$\langle E_{c,\min} \rangle \sim \frac{\langle p^2 \rangle_{\min}}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{2m \langle r \rangle^2}$$

On a finalement :

$$E_m \sim \frac{\hbar^2}{2m \langle r \rangle^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle}$$

— Le minimum de la fonction $E_m(\langle r \rangle)$ conduit à :

$$\begin{cases} \langle r \rangle = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = a_0 = 0,53 \text{ \AA} \\ E_{\min} = -\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = -E_I = -13,6 \text{ eV} \end{cases}$$

On retrouve (avec un modèle un peu bancal tout de même...) les caractéristiques de l'atome de BOHR!

Exercice MQ8

1. On a de façon approchée un diviseur de tension :

$$\boxed{V_G = \frac{x}{R} V_0}$$

Les résistances réglables servent à faire varier V_G entre 0 et V_0 . On peut réaliser ce dispositif à résistances variables avec un rhéostat ou un potentiomètre.

2. $v = \sqrt{\frac{2eV_G}{m_e}}$

3. $v' = \sqrt{\frac{2e(V_G - \epsilon)}{m_e}} \sim v$

4. (a) Tant que V_G reste faible, le courant I augmente régulièrement. Cette portion de courbe est analogue à la courbe caractéristique d'une diode et s'explique de la même manière à partir de la charge d'espace formée par les électrons émis par le filament chauffé et accumulés dans son voisinage : l'augmentation du courant I traduit la diminution progressive de cette charge d'espace au fur et à mesure que les électrons sont attirés plus notablement par la grille.
- (b) Lorsque la tension V_G dépasse un certain seuil V_r , on observe une diminution brutale du courant I qui indique l'apparition d'un nouveau phénomène : la majeure partie des électrons qui atteignaient précédemment l'électrode collectrice se trouve maintenant arrêtée en cours de route. On explique ceci par des collisions inélastiques au cours desquelles les électrons cèdent aux atomes la totalité de leur énergie cinétique $\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_r$. Pour expliquer le changement d'allure brutal de la courbe, il faut aussi supposer qu'en-dessous de la tension-seuil V_r se produisent seulement des collisions élastiques.
- (c) Lorsque la tension dépasse sensiblement la valeur V_r , le courant I recommence à croître. Ceci s'explique parfaitement si l'on admet que les électrons continuent à céder aux atomes, dans les collisions inélastiques, la même énergie eV_r . Ils gardent alors une partie de leur énergie cinétique et restent capable d'atteindre l'électrode collectrice avec une vitesse réduite. On observe ensuite à nouveau une diminution brutale du courant I lorsque la tension V_G atteint $2V_r$, c'est-à-dire lorsque les électrons se trouvent en majeure partie arrêtés. En effet, ceux-ci peuvent perdre la totalité de leur énergie cinétique $\frac{1}{2}m_e v^2 = 2eV_r$ s'ils effectuent successivement deux collisions inélastiques sur deux atomes différents.

La répétition du phénomène pour $3V_r, 4V_r \dots$ s'explique de la même façon en augmentant le nombre de chocs inélastiques unité par unité.

5. À la lumière de ce qui précède,

$$\boxed{W_r = eV_r}$$

6. (a) L'énergie W_r communiquée à l'atome dans l'expérience est bien inférieure à l'énergie d'ionisation $W_i = 10,5 \text{ eV}$. On en déduit que l'on observe un phénomène autre que l'ionisation dans lequel l'atome conserve son intégrité : il passe d'un état normal (fondamental d'énergie E_1) à un état excité d'énergie $E_2 = E_1 + W_r$.
- (b) La longueur d'onde λ_r est dans le domaine ultraviolet. L'émission de cette lumière est cohérente avec le modèle de BOHR dans le sens où un atome de mercure excité peut

Éléments de réponse

ensuite se désexciter en produisant une lumière de longueur d'onde λ telle que

$$\frac{hc}{\lambda} = W_r = eV_r$$

On trouve ainsi bien $\lambda = 2,5 \times 10^2 \text{ nm} \simeq \lambda_r$.

- (c) Les transferts énergétiques se font par multiples entiers de W_r , ce qui confirme l'existence d'une quantification des niveaux d'énergie occupés par les électrons dans l'atome.

Exercice MQ9

1. (a) En notant \vec{k}_i (resp. \vec{k}) le vecteur d'onde incident (resp. émergent) et A et B deux atomes quelconques d'un plan réticulaire donné, le déphasage entre les ondes émergentes à l'infini est

$$\Delta\varphi = (\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{AB}$$

Dans le cas de la réflexion spéculaire, ce déphasage est nul et on a des interférences constructives entre les divers rayons réfléchis pour un plan réticulaire donné : le rayonnement obtenu est particulièrement intense (pour toute disposition des atomes dans le plan, même non régulière!).

- (b) On se place, compte tenu de la question précédente, dans le cadre de la réflexion spéculaire sur chaque atome et on considère plusieurs plans réticulaires. On conserve des interférences constructives pour les rayons issus d'un même plan réticulaire. Pour avoir des interférences constructives pour l'ensemble des plans réticulaires, on doit avoir le déphasage associé à deux atomes A et B de deux plans réticulaires consécutifs multiple entier de 2π . Autrement dit,

$$(\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{AB} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

En exploitant la spécularité, il vient

$$2k_i d \sin \varphi = 2\pi n$$

et on déduit bien la formule de BRAGG compte tenu de $k_i = 2\pi/\lambda$.

2. (a) On constate que pour $\theta = 50^\circ$,

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

donc la formule de BRAGG donne

$$\lambda_{\text{eq},n} = \frac{2d}{n} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{0,16(5)}{n} \text{ nm}$$

Le dernier chiffre a été mis entre parenthèses car on manque de précisions sur les mesures pour en être certain (néanmoins, il est intéressant, pour des raisons historiques, de le spécifier ; idem pour λ_{dB} ensuite).

Éléments de réponse

(b) Le faisceau électronique est accéléré sous $V = 54 \text{ V}$ donc

$$\lambda_{dB} \simeq \frac{1,23}{\sqrt{V}} = 0,16(7) \text{ nm}$$

Il est manifeste que $\lambda_{\text{eq},1}$ et λ_{dB} sont très proches et ce résultat associé à d'autres permet de valider le concept des ondes de matière de DE BROGLIE (typiquement en relevant d'autres maxima d'intensité pour plusieurs ordres pour diverses valeurs de V).

Exercice MQ10

1. Pour un microscope optique, la lumière se propage sans perturbation majeure dans l'air. Ce n'est pas le cas des électrons pour lesquels on doit éviter toute collision avec des molécules autres que celles de l'échantillon analysé. De plus, il faut éviter tout champ électromagnétique externe (champ magnétique terrestre, parasitages...) sinon cela perturbe le faisceau électronique et conduit à des images médiocres (ce faisceau ne doit subir que les interactions dues aux lentilles électromagnétiques et à la matière de l'échantillon).
2. L'énergie cinétique acquise par les électrons est $E_c = eU$, soit 400 keV donc ils sont relativistes (on peut les considérer comme tel au-delà de 200 keV). Il ne faut pas calculer directement une fréquence de DE BROGLIE à partir de E_c et la convertir en longueur d'onde de DE BROGLIE en divisant c par celle-ci ! Il faut en premier lieu isoler la quantité de mouvement, puis passer à la longueur d'onde de DE BROGLIE.

Le carré de l'énergie d'un électron relativiste est tel que :

$$E^2 = (E_c + m_e c^2)^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4$$

donc

$$p = \sqrt{\frac{E_c^2}{c^2} + 2m_e E_c}$$

soit

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{\frac{e^2 U^2}{c^2} + 2m_e eU}} = 1,6 \text{ pm}$$

Ainsi, $d_m = 0,20 \text{ nm}$.

On obtient le bon ordre de grandeur annoncé de résolution qui est une échelle de résolution atomique !

Exercice MQ11

1. Forme d'OPPH, $\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$, k est le vecteur d'onde ; $A = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$
2. $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $v = \frac{\hbar k}{m}$
3. $\frac{dP(x)}{dx} = \frac{1}{\ell}$

4. $dI = -\frac{e}{\pi} v_x dk$

5. $G = \frac{2e^2}{h} = 7,73 \times 10^{-5} \text{ S}$, soit $R \simeq 13 \text{ k}\Omega$

Exercice MQ12

Le quanton n'est exploitable sur l'échelle d que si son indétermination spatiale correspondante est $\Delta x \ll d$, soit $\Delta p_x \geq \hbar : (2\Delta x) \gg \hbar/(2d)$ par inégalité d'HEISENBERG (idem pour les autres directions).

Pour conserver une indétermination négligeable sur l'impulsion, on doit donc avoir $|p_x| \gg \hbar/(2d)$ (idem pour p_y et p_z), ce qui impose de travailler avec une énergie cinétique du quanton élevée. On va donc se placer en domaine relativiste où, l'énergie de masse devenant négligeable, l'énergie est proportionnelle à la valeur de l'impulsion ($E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \simeq p^2 c^2$). Cela permet de conclure, avec la loi plus précise

$$E \gg \frac{\hbar c}{2d}$$

On note que le cas relativiste abaisse les dépenses par rapport au cas galiléen où l'énergie évoluerait avec p^2 (en considérant l'énergie cinétique dominante).

Pour le LHC, on obtient $d \gg \frac{\hbar c}{2E} = 1 \times 10^{-20} \text{ m}$.

Autrement dit, on a avec ce collisionneur (qui est l'instrument de physique le plus cher de l'histoire à ce jour !) une précision potentielle de mesure extraordinairement faible (la taille des petits noyaux est de l'ordre de $10^{-15} \text{ m} \dots$).

Exercice MQ13

1. Considérons deux nombres quantiques n et $n - 1$ élevés. La fréquence d'émission associée à la transition $n \rightarrow n - 1$ est alors :

$$h\nu_{n,n-1} = E_n - E_{n-1} = E_n \left(1 - \frac{E_{n-1}}{E_n} \right) = \frac{-2n + 1}{(n - 1)^2} E_n$$

soit pour $n \gg 1$:

$$\nu_{n,n-1} \simeq -\frac{2E_n}{nh}$$

En physique classique, la fréquence d'émission correspond à la fréquence ν de rotation de l'électron sur son orbite, soit

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = 2 \frac{\frac{1}{2} m_e v^2}{2\pi r m_e v} = 2 \frac{E_c}{2\pi L_z}$$

or pour l'orbite circulaire en champ newtonien, $E_c = -E_m$, et la condition de quantification de BOHR donne $L_z = nh$. Il vient :

$$\nu_n = -\frac{2E_n}{nh}$$

soit $\nu_{n,n-1} \simeq \nu_n$ pour $n \gg 1$.

Le principe de correspondance est bien respecté.

Éléments de réponse

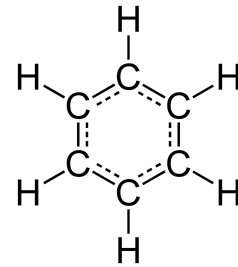
2. L'action S du système est le produit d'une distance caractéristique par une quantité de mouvement caractéristique, soit $S = r_n \times mv_n$, ou encore le produit d'une énergie caractéristique par un temps caractéristique, ici la période de révolution autour du noyau :

$$S = \left| \frac{E_n}{\nu_n} \right| = \frac{nh}{2} \gg \hbar$$

Le système est donc bien quasi-classique aux grands nombres quantiques.

Exercice MQ14

1. Les 6 électrons des doubles liaisons sont délocalisés sur l'ensemble des 6 carbones (on peut écrire une forme mésomère).



2. $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}$.

3. $2\pi ka = 2m\pi$, $E_m = m^2 \frac{\hbar^2}{2ma^2}$, $m \in \mathbb{Z}$. m et $-m$ donnent la même valeur de E mais les deux états quantiques sont différents.

4. $a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3h\lambda}{2mc}} \simeq 153 \text{ pm}$. Cette longueur est du bon ordre de grandeur par rapport à la taille réelle de la molécule.

Exercice MQ15

- $N = 1, 2 \cdot 10^{57}$
- $r = \frac{R}{N^{1/3}}$; $E_c = NE_{c,1\text{neutron}} = \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2}$
- $E_g \simeq -\frac{\mathcal{G}N^2m^2}{R}$.
- $\mu_{\text{étoile}} = 6 \times 10^{19} \text{ kg m}^{-3}$.
- $\mu_{\text{noyau}} \simeq 1 \times 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$.

Interférences de matière

Exercice MQ16

1. Le quanton passé par la fente F_1 parvient en M après être « descendu » de $a - d$ sur la distance D très grande, donc, compte tenu des petits angles en jeu,

$$p_{1x} = \frac{d - a}{D} p$$

2. Pour un quanton passé par la fente F_2 , on obtient par le même principe

$$p_{2x} = \frac{a+d}{D}p$$

Par conséquent, on sait par quelle fente est passé un quanton seulement si l'indétermination Δp_x sur l'écran est très inférieure devant $p_{2x} - p_{1x}$, soit

$$\Delta p_x \ll \frac{2a}{D}p$$

3. Compte tenu de l'inégalité de HEISENBERG pour l'écran, l'indétermination sur la position de celui-ci est Δx telle que

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

donc

$$\Delta x \gg \frac{D\hbar}{4ap} = \frac{\lambda D}{2\pi a}$$

soit en ordre de grandeur, en posant l'interfrange $i = \frac{\lambda D}{2a}$ attendu sans discerner les trajets des quantons,

$$\Delta x \gg i$$

L'indétermination de position de l'écran est telle que les interférences ne peuvent être visibles!

Exercice MQ17

1. $\Delta t = 1,3 \cdot 10^{-3}$ s
2. $\theta = 5 \cdot 10^{-5}$ rad
3. $\theta' = 1 \cdot 10^{-4}$ rad
4. $\tau = 9$ s, source d'atomes « uniques »

II Équation de Schrödinger

Exercice MQ18

1. $\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$
2. $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi(x) = E\varphi(x)$
3. $\mathcal{N} = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}}$; $\langle x \rangle = 0$; $a = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$ et $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$

Exercice MQ19

1. $\vec{J}(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) - \Psi(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \Psi^*(x, t) \right) \vec{e}_x$
2. $\vec{J}(x, t) = |\Psi_0|^2 \frac{\hbar}{m} \vec{k} = \rho(x, t) \vec{v}_g$

Exercice MQ20

1. Comme en cours, on imagine un quanton sous la forme d'une onde plane de DE BROGLIE de la forme

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

On obtient :

$$\begin{cases} E^2 \Psi(\vec{r}, t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \\ p^2 c^2 \Psi(\vec{r}, t) = -\hbar^2 c^2 \Delta \Psi(\vec{r}, t) \end{cases}$$

On a donc :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \Delta \Psi(\vec{r}, t) + (\hbar \omega_0)^2 \Psi(\vec{r}, t)$$

d'où l'équation de KLEIN-GORDON :

$$\Delta \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \omega_0^2 \Psi(\vec{r}, t)$$

2. La relation de dispersion associée (comme pour une onde électromagnétique se propageant dans un plasma, son équivalent classique) est :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

avec une pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{E_0}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar} = \frac{2\pi c}{\Lambda}$ où Λ est la longueur d'onde COMPTON.

Seules les pulsations supérieures à ω_0 peuvent se propager sans atténuation, ce qui est le cas puisque $p^2 c^2 \geq 0$, donc $E \geq E_0$.

3. En différenciant la relation de dispersion, on obtient :

$$v_g v_\varphi = c^2$$

On en déduit la vitesse de groupe :

$$v_g(\omega) = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

Le domaine classique correspond à $v \ll c$, soit

$$mv \ll mc \Leftrightarrow pc \ll mc^2$$

, soit

$$p^2 c^2 \ll E_0^2$$

On a alors $(\omega - \omega_0) \ll \omega_0$.

Le domaine ultra-relativiste correspond lui à $p^2 c^2 \gg m^2 c^4$. On a alors une relation non dispersive, avec $v_g = v_\varphi = c$.

4. Dans la limite classique,

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{mc^2}} \simeq E_0 + \frac{p^2}{2m}$$

On retrouve l'énergie cinétique sous sa forme classique $E_c = \frac{p^2}{2m}$.

La vitesse de groupe est alors, en posant $\epsilon = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$:

$$\begin{aligned} v_g &= c \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \epsilon)^2}} \\ &\simeq c \sqrt{2\epsilon} \\ &\simeq c \sqrt{\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}} \\ &\simeq c \sqrt{\frac{2 \frac{p^2}{2m\hbar}}{\frac{mc^2}{\hbar}}} \end{aligned}$$

Soit $v_g \simeq \frac{p}{m}$: on retrouve l'interprétation classique.

Puits de potentiel

Exercice MQ21

1.

$$\int_0^L |\Psi(x, 0)|^2 dx = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \sin(2\theta) \int_0^L \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx$$

φ_1 et φ_2 étant normalisées :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sqrt{2}L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \varphi_2(x) = \sqrt{2}L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

En utilisant $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$, on montre

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = 0$$

d'où $\int_0^L |\Psi(x, 0)|^2 dx = 1$.

2.

$$\Psi(x, t) = \cos \theta \varphi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin \theta \varphi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

avec $E_1 = \frac{\hbar k_1^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ et $E_2 = 4E_1$.

3.

$$\frac{dP}{dx}(x, t) = \cos^2 \theta \varphi_1^2(x) + \sin^2 \theta \varphi_2^2(x) + \sin(2\theta) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \cos\left(\frac{3E_1}{\hbar} t\right)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dx}(0, t) = 0 \\ \frac{dP}{dx}(L/2, t) = \frac{2}{L} \cos^2 \theta \\ \frac{dP}{dx}(L/4, t) = \frac{1}{L} \left(\sqrt{2} \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta + \sqrt{2} \sin(2\theta) \cos\left(\frac{3E_1}{\hbar} t\right) \right) \end{array} \right.$$

4.

$$\langle x \rangle (t) = \int_0^L x dP(x, t) = \cos^2 \theta \langle x \rangle_1 + \sin^2 \theta \langle x \rangle_2$$

comme $\int_0^L \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0$.

Or par symétrie, les deux états $n = 1$ et $n = 2$ ont $\langle x \rangle_{1,2} = L/2$, d'où

$$\langle x \rangle (t) = \frac{L}{2} - \frac{16}{9\pi^2} L \sin(2\theta) \cos\left(\frac{3E_1}{\hbar} t\right)$$

La position moyenne de la particule oscille ainsi au cours du temps, à une pulsation $\omega_{12} = \frac{3E_1}{\hbar}$, elle a une amplitude $\frac{16}{9\pi^2} L \sin(2\theta) \simeq 0,18 \sin(2\theta) L < 0,5L$.

On retrouve l'état stationnaire 1 si $\theta = 0[\pi]$, l'état stationnaire 2 si $\theta = \pi/2 [\pi]$. L'amplitude d'oscillation est maximale si $\theta = \pi/4[\pi/2]$.

5. De même,

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^L x^2 dP(x, t) = \cos^2 \theta \langle x^2 \rangle_1 + \sin^2 \theta \langle x^2 \rangle_2 + \sin(2\theta) \cos\left(\frac{3E_1}{\hbar} t\right) \int_0^L x^2 \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx$$

soit

$$\langle x^2 \rangle = L^2 \cos^2 \theta \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \right) + L^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16\pi^2} \right) - \frac{16}{9\pi^2} \sin(2\theta) L^2 \cos\left(\frac{3E_1}{\hbar} t\right)$$

Il y a encore oscillation à la même fréquence. On retrouve le fait que $\langle x^2 \rangle_1 < \langle x^2 \rangle_2$.

L'indétermination sur la position $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ augmente lorsque θ augmente de 0 à $\pi/2$, ce qui est logique car l'état propre $n = 2$ est moins localisé que $n = 1$.

Éléments de réponse

1. On rappelle la forme des parties spatiales normalisées des états stationnaires du puits infini :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$\langle x \rangle = \int_0^a x dP(x) = 2a \int_0^1 u \sin^2(n\pi u) du = \frac{a}{2}$$

ce qui est logique au vu de la symétrie du problème.

De même,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{a} \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right)$$

d'où

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{12} \left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$

2. (a) On normalise la fonction d'onde :

$$\int_0^a |\Psi|^2 dx = 1 \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

(b) $\alpha_n = \frac{4\sqrt{15}}{n^3\pi^3} (1 - (-1)^n)$

On trouve donc que $p_n = |\alpha_n|^2 = 0$ si n est pair. En effet, ceux-ci ne respectent pas la symétrie de l'état initial qui est un état symétrique par rapport à $a/2$.

Remarque : ces calculs reviennent en fait à décomposer l'état initial sur la base des états stationnaires, via un développement en séries de FOURIER.

(c)

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{960}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} \quad (\text{normalisation}) \\ \langle E \rangle = \sum E_n p_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \frac{960}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{5\hbar^2}{ma^2} \\ \langle E^2 \rangle = \sum E_n^2 p_n = \frac{\hbar^4 \pi^4}{4m^2 a^4} \frac{960}{\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{30\hbar^4}{m^2 a^4} \end{array} \right.$$

d'où $\Delta E = \frac{\sqrt{5}\hbar^2}{ma^2}$. La mesure du système pouvant fournir des états stationnaires d'énergies différentes, il existe une indétermination $\Delta E > 0$.

Exercice MQ23

1. La solution générale de l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps est :

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \varphi(x)$$

Pour les domaines « hors puits », on a des solutions évanescentes, et une solution oscillante dans le puits :

$$\begin{cases} \varphi(x \leq -L/2) = Ae^{Kx} \\ \varphi(x \in [-L/2, L/2]) = C \cos(kx) + D \sin(kx) \\ \varphi(x \geq L/2) = Be^{-Kx} \end{cases}$$

2. On sait que l'on doit avoir continuité de φ , ainsi que de $\varphi'(x)$ (énergie potentielle bornée). De ce fait, il vient les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} Ae^{-KL/2} = C \cos(kL/2) - D \sin(kL/2) \\ Be^{-KL/2} = C \cos(kL/2) + D \sin(kL/2) \\ AKe^{-KL/2} = Ck \sin(kL/2) + Dk \cos(kL/2) \\ -BKe^{-KL/2} = -Ck \sin(kL/2) + Dk \cos(kL/2) \end{cases}$$

Ces quatre équations imposent obligatoirement des valeurs d'énergies bien précises car on a un système homogène dont on ne veut pas la solution nulle. C'est le déterminant de la matrice du système qui donne l'équation implicite vérifiée par les valeurs de E possibles.

En fait, plutôt que de privilégier la recherche des valeurs propres (énergies E) pour en déduire les vecteurs propres correspondants (fonctions d'onde spatiales), on va plutôt procéder dans l'autre sens (moins calculatoire grâce aux symétries).

3. (a) Pour une fonction d'onde spatiale recherchée paire, $A = B$ et $D = 0$: les quatre relations de la question précédente se réduisent à :

$$\begin{cases} Ae^{-KL/2} = C \cos(kL/2) \\ AKe^{-KL/2} = Ck \sin(kL/2) \end{cases}$$

Les constantes A et C ne sont pas nulles (sinon la fonction d'onde serait nulle), donc leur élimination permet de se ramener effectivement à

$$\boxed{\frac{KL}{2} = \frac{kL}{2} \tan\left(\frac{kL}{2}\right)}$$

Il s'agit d'une équation transcendante dont on ne peut trouver des solutions que numériquement ou graphiquement. C'est cette dernière méthode qui est proposée ensuite.

- (b) On peut remarquer que la grandeur $K^2 + k^2$ ne dépend pas de E car

$$K^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

C'est une constante pour un puits et un quanton donnés. Par conséquent, on peut trouver les valeurs de E acceptables via la détermination graphique des intersections dans le plan ($x = kL/2, y = KL/2$) pour le quadrant positif (car $k > 0$ et $K > 0$) entre la courbe d'équation

$$y = f(x) = x \tan x$$

et le quart de cercle de centre O de rayon R d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{où} \quad R = \sqrt{\frac{L^2 m V_0}{2\hbar^2}}$$

On voit donc bien que pour

- (c) V_0 fixé, donc R fixé, le nombre d'intersections est fini, chaque intersection correspondant à une valeur bien précise d'énergie : les énergies des états stationnaires symétriques sont quantifiées et de nombre fini. Notons au passage qu'il existe forcément au moins une solution !

4. Pour une fonction d'onde spatiale recherchée impaire, $A = -B$ et $C = 0$ donc

$$\begin{cases} Ae^{-KL/2} = -D \sin(kL/2) \\ AKe^{-KL/2} = Dk \cos(kL/2) \end{cases}$$

Les constantes A et D ne sont pas nulles donc leur élimination permet de se ramener à :

$$\boxed{\frac{KL}{2} = -\frac{kL}{2} \cotan\left(\frac{kL}{2}\right)}$$

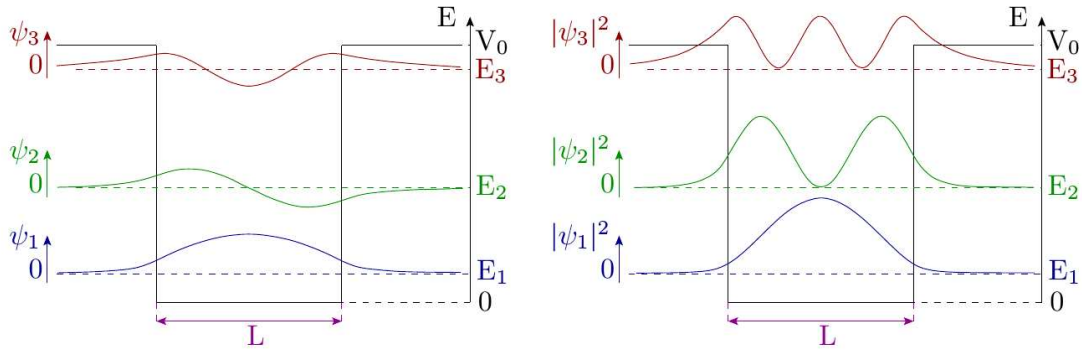
Il s'agit encore d'une équation transcendante que l'on traite graphiquement de façon analogue à ce qui précède (cette fois-ci sur le quadrant ($x > 0, y < 0$)). On a seulement à chercher les intersections entre le quart de cercle de rayon R dans ce domaine et la courbe d'équation $g(x)$.

On voit encore une fois que pour V_0 fixé, donc R fixé, le nombre d'intersections est fini (voire nul), chaque intersection correspondant à une valeur bien précise d'énergie : les énergies des états stationnaires antisymétriques sont quantifiées et de nombre fini. De plus, d'après le positionnement des intersections, les énergies des états stationnaires antisymétriques sont différentes de celles des états symétriques : les états sont alternés.

5. Supposons qu'il existe une fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ ni paire, ni impaire, solution de l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps. Alors, celle-ci s'écrit sous la forme d'une somme de deux fonctions paire φ_S et impaire φ_{AS} (il suffit de choisir $|\varphi(x) + \varphi(-x)|/2$ et $|\varphi(x) - \varphi(-x)|/2$). Par linéarité de l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps, φ_S et φ_{AS} doivent en être solution mais les questions précédentes montrent qu'elles ne peuvent l'être pour une valeur commune d'énergie E . Par conséquent, il n'existe pas d'autre état stationnaire que les états stationnaires symétriques et antisymétriques déjà trouvés.
6. Il n'y a qu'un seul état stationnaire lié possible si les études graphiques précédentes ne fournissent qu'un seul point d'intersection. Or, il y a toujours une intersection dans le cas symétrique. Il ne faut retenir que celui-ci, d'où la condition $R < \pi/2$, soit :

$$\boxed{V_0 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}$$

Voici un tracé des premiers états symétriques et antisymétriques :



Exercice MQ24

1. • L'équation de SCHRÖDINGER donne :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$$

On recherche des solutions stationnaires sous la forme $\Psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, ce qui conduit, en introduisant les grandeurs $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar}$, aux formes :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = (e^{ikx} + r e^{-ikx}) \\ \varphi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx} \\ \varphi_3(x) = t e^{ikx} \end{cases}$$

(on a pris un facteur unitaire dimensionné pour φ_0)

Par continuité de φ et de φ' (énergie potentielle finie), on obtient un système linéaire qui peut se simplifier en posant la condition recherchée $r = 0$ sous la forme :

$$\begin{cases} A_2 \left(1 - \frac{q}{k}\right) e^{-iqa} + B_2 \left(1 + \frac{q}{k}\right) e^{iqa} = 0 \\ A_2 \left(1 - \frac{q}{k}\right) e^{iqa} + B_2 \left(1 + \frac{q}{k}\right) e^{-iqa} = 0 \\ t e^{ika} = A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} \\ e^{-ika} = A_2 e^{-iqa} + B_2 e^{iqa} \end{cases}$$

C'est un système de 4 équations à 3 inconnues. Les solutions ne seront non nulles que si les deux premières équations sont liées. L'annulation de leur déterminant donne $\sin(2qa) = 0$ car $q \neq k$.

La condition de non réflexion lors de la traversée du puits est donc $2q_n a = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$. Cette condition traduit simplement qu'un aller-retour dans le puits correspond à une différence de marche qui est un multiple entier de la longueur d'onde dans le puits. Ainsi, dans un modèle à ondes multiples, cela revient à dire qu'il y a résonance en transmission lorsque toutes les ondes émergentes sont en phase.

Ainsi, les valeurs des énergies correspondantes sont

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2} - V_0$$

2. En supposant que la résonance observée correspondre à $n = 1$, on obtient comme profondeur de puits :

$$V_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} - E = 8,6 \text{ eV}$$

Marche de potentiel

Exercice MQ25

1. En mécanique classique, la particule franchit la falaise avec une vitesse plus grande pour $x > 0$.

2. On pose $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $K = \frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar}$.

$$\begin{cases} \varphi(x < 0) = Ae^{ikx} + \frac{k - K}{k + K} Ae^{-ikx} \\ \varphi(x > 0) = \frac{2k}{k + K} Ae^{iKx} \end{cases}$$

3. $R = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^2 = 0,01$. Ce résultat est purement quantique.

Exercice MQ26

1. Si le coefficient R ne change pas en échangeant k_1 et k_2 , cela veut dire que l'on a la même valeur du coefficient R dans le cas d'un quanton incident d'énergie $E > V_0$ sur une marche de potentiel descendant de la valeur V_0 à la valeur 0 (chose très surprenante si l'on s'arrête à une vision de mécanique classique) !

De façon très imagée, on dit qu'en physique quantique, un troupeau de moutons quantiques indépendants se dirigeant à vitesse constante vers un précipice (tout cela à l'échelle microscopique bien sûr) ne « tombe » pas forcément entièrement au fond de celui-ci : certains font demi-tour ...

2. Pour estimer le coefficient de probabilité de réflexion R , on approxime le changement d'énergie potentielle du quanton d'énergie initiale $E = E_c = 5 \text{ MeV}$ par celui d'une marche de potentiel descendant de 0 à $V'_0 = -50 \text{ MeV}$. Par le théorème de réciprocité et puisque l'on peut choisir le zéro d'énergie à notre guise (cela ne change pas les densités de probabilité), on peut considérer plutôt la situation d'un quanton d'énergie $E' = 55 \text{ MeV}$ arrivant sur une marche de potentiel montante passant de 0 à $V_0 = -V'_0 = 50 \text{ MeV}$, ce qui nous place exactement dans la même situation que celle étudiée précédemment. Alors,

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E'}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E'}} \right)^2 = 29\%$$

Les neutrons ont une probabilité plus grande de rentrer dans le noyau et d'éventuellement pouvoir y induire une fission que d'être réfléchis mais cette probabilité de réflexion est loin d'être négligeable !

Exercice MQ27

1. • La trajectoire classique est visuellement cohérente avec la position moyenne (en terme de probabilité de présence!) du quanton incident puis transmis (en dehors des instants où le paquet d'ondes est déformé par le franchissement de la marche).
 - Il y a un ralentissement du déplacement entre avant et après la marche (ce qui est cohérent avec la théorie car l'énergie cinétique est réduite par l'augmentation de l'énergie potentielle à énergie totale fixée).
 - Un quanton peut être réfléchi par la marche et, dans ce cas, il se déplace avec une position moyenne respectant la trajectoire classique après rebond (ce rebond n'étant pas prévisible par la mécanique classique!).
2. De même,
 - La trajectoire classique est visuellement cohérente avec la position moyenne (en terme de probabilité de présence!) du quanton incident puis réfléchi à un décalage près qui se produit lors de la réflexion en raison de l'évanescence dans la marche qui introduit un retard.
 - Le paquet d'ondes, « dans la zone de la marche de potentiel » présente de fortes oscillations qui correspondent à des interférences quantiques (entre ondes incidentes et réfléchies).

Exercice MQ28

1. Les effets quantiques sont plus marquées pour les particules de faible masse.
2.
$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0}} \right)^2.$$
3.
$$R \simeq \frac{V_0^2}{16E^2}; \quad \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2.$$

Barrière de potentiel

Exercice MQ29

1.
$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_S(x) e^{-iE_S t/\hbar} + \varphi_A(x) e^{-iE_A t/\hbar} \right).$$
2.
$$R = \frac{\pi}{\omega}; \quad |\Psi(x, t)|^2 = |\varphi_G|^2.$$
3.
$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} |\varphi_S(x)|^2 + \frac{1}{2} |\varphi_A(x)|^2 + \varphi_S(x) \varphi_A(x) \cos(\omega t). \quad \nu \simeq 24 \text{ GHz}.$$

Exercice MQ30

1. En posant $Z = 81$, l'énergie potentielle électrostatique de la particule α est :

$$E_{pe} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

d'où
$$r_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} = 39 \text{ fm}.$$

Éléments de réponse

2. Le rayon du noyau de Thallium est $R = 7,1$ fm. La valeur du pic de potentiel est alors $V_b = 33$ MeV, et la hauteur moyenne de la barrière de potentiel $V_0 = 16,5$ MeV. En prenant $a = r_0 - R = 32$ fm, on obtient $T \simeq 1,6 \times 10^{-39}$.

Il faut donc $1/T$ collisions pour que la particule quitte le puits de potentiel par effet tunnel. Avec une énergie de $E = 6,0$ MeV, la vitesse de la particule α dans le puits de potentiel est

$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,7 \times 10^7$ m s⁻¹. La particule entre en collision avec les bords du puits toutes les $\frac{2R}{v} = 8,4 \times 10^{-22}$ s. La durée de vie moyenne est alors :

$$\tau = \frac{1}{T} \times \frac{2R}{v} = 5,3 \times 10^{17} \text{ s} \simeq 17 \text{ milliards d'années}$$