

Le sujet comporte deux problèmes et un exercice de rattrapage.

Problème 1 : Les Marées

Cette approche documentaire est constituée de cinq documents, deux documents principaux décrivant le fonctionnement statique et simplifié des marées océaniques, les trois autres constituant des annexes.

1 Document

5 Lire le document dans son intégralité puis répondre aux questions qui s'en suivent.

DOCUMENT PRINCIPAL 1 : MODÈLE STATIQUE DES MARÉES

Extrait du cours de G.Rouillet dispensé en master 2ème année ENSTA Bretagne

La marée est un phénomène tout à la fois familier et fascinant. Son fonctionnement est relativement simple à comprendre dans les grandes lignes, ce que nous nous attacherons à montrer dans cette partie. 10 Cependant en y regardant de plus près l'on se rendra compte que les choses sont en réalité plus compliquées. L'histoire scientifique commence avec Newton qui donne une explication rationnelle du rôle des astres à l'aide de sa théorie de la gravitation. Une fois cette question résolue est apparue la question de la réponse dynamique des océans. Le cadre a été posé par Laplace à la fin du XVIIIe siècle mais il fallut attendre le début du XXe pour commencer à voir apparaître les premières cartes régionales de la 15 marée. L'histoire continue avec le rôle de la dissipation dans le phénomène, cette question-là ne sera que réellement résolue qu'il y a une dizaine d'années avec l'avènement des satellites altimétriques. Aujourd'hui la recherche porte sur la marée interne et son rôle dans la circulation thermohaline. La marée est un concentré de processus physiques, c'est un phénomène qui relève avant tout de l'océanographie mais qui a des relations avec l'astronomie, la planétologie, la géophysique interne, la mécanique des fluides, la 20 physique des ondes. C'est un vaste sujet qui apparaît de plus en plus complexe au fur et à mesure qu'on cherche à le comprendre.

Théorie du Bourrelet

Le phénomène de marée est dû aux forces gravitationnelles exercées par la Lune et le Soleil sur la Terre. Ces forces déforment la surface des océans pour créer deux bourrelets. Les forces de marées sont 25 fondamentalement un résidu d'interaction gravitationnelle, il s'agit de la différence entre deux termes. L'un des termes est la force d'interaction entre une parcelle de fluide de masse m et l'astre (Lune, Soleil). Le second terme est directement lié à l'attraction moyenne exercée par l'astre au centre de la Terre. La première force est intuitive, la seconde l'est moins. Considérons dans un premier temps, et pour simplifier, le système isolé constitué de la Terre et de la Lune comme indiqué figure (1). Le système étant isolé, 30 son centre de masse C se déplace selon un mouvement rectiligne uniforme dans l'espace intersidéral et constitue un référentiel galiléen.

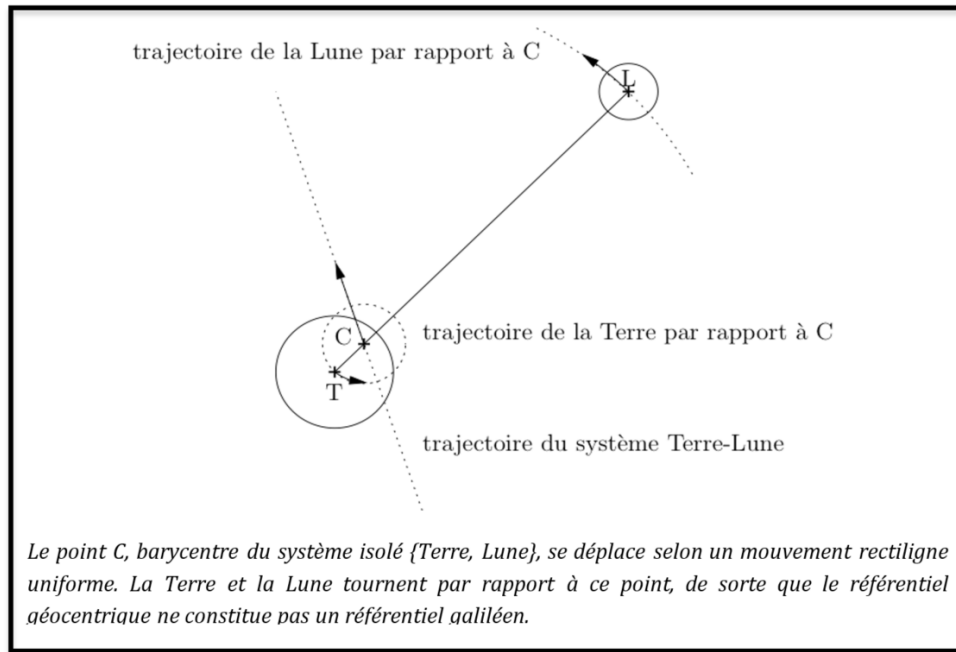


FIGURE 1 – Le système isolé Terre-Lune

Dans ce référentiel, la Terre n'est soumise qu'à la seule force d'attraction de la Lune qui équilibre l'accélération centripète de sorte que la seconde loi de Newton s'y écrit :

$$M_T \vec{a}(T)_{R_c} = GM_T M_L \frac{\vec{TL}}{(TL)^3}$$

35 Si on raisonne cette fois dans le référentiel géocentrique (R_{geo}) d'origine T et en translation par rapport à (R_C), le centre de la Terre y est en équilibre mais soumise à une seconde « force », la force d'inertie d'entraînement. On peut ainsi écrire dans ce référentiel :

$$\vec{0} = GM_T M_L \frac{\vec{TL}}{(TL)^3} - M_T \vec{a}_e$$

Avec :

$$\vec{a}_e = \vec{a}(T)_{R_c} = GM_L \frac{\vec{TL}}{(TL)^3}$$

40 Ainsi, en s'intéressant à une parcelle de masse m placée en un point M à la surface de la Terre, la 2ème loi de Newton appliquée dans le référentiel géocentrique donne :

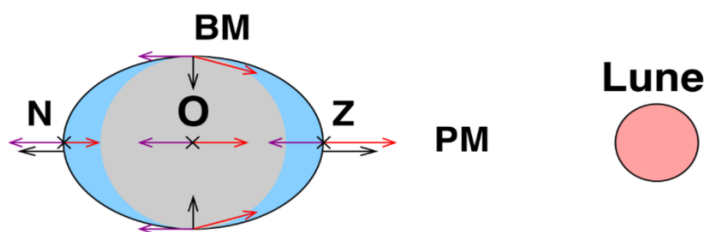
$$m \vec{a}(M)_{R_{geo}} = \sum \vec{F}_{terre} + GmM_L \frac{\vec{ML}}{(ML)^3} - m \vec{a}_e$$

où $\sum \vec{F}_{terre}$ représente l'ensemble des forces « terrestres » appliquées à la parcelle. Il apparaît donc un terme différentiel, appelé force de marée, tel que :

$$\vec{F}_{mares/Lune} = GmM_L \left(\frac{\vec{ML}}{(ML)^3} - \frac{\vec{TL}}{(TL)^3} \right)$$

Cette force, appliquée à toute parcelle constituant la Terre, tend à la déformer et créer deux bourrelets au niveau des extrêmes, c'est à dire au Zénith (Z) et au Nadir (N) comme indiqué figure (2).

45



L'attraction différentielle gravitationnelle de la Lune sur la Terre crée des forces de marée (flèche noire). Il s'agit du résidu entre l'attraction en un point (flèche rouge) et l'attraction moyenne s'exerçant au centre de la terre (flèche violette).
 BM : Basse Mer et PM : Pleine Mer

FIGURE 2 – Bourrelets océaniques

Le cycle de vives eaux et mortes eaux

Le système Terre, Lune n'est en pratique pas isolé et subit l'action du Soleil autour duquel il gravite. La conséquence est l'apparition d'un terme de marée dû à l'attraction gravitationnelle solaire et dont l'expression est analogue à celui associé à l'attraction lunaire :

$$\vec{F}_{\text{mares/soleil}} = GmM_S \left(\frac{\vec{MS}}{(MS)^3} - \frac{\vec{TS}}{(TS)^3} \right)$$

Le phénomène de marée est donc la conjonction de deux influences, lunaire et solaire, et se traduit par des amplitudes variables selon les positions relatives de ces deux astres par rapport à la Terre. Un des phénomènes bien connu est le cycle de vives eaux / mortes eaux. Lorsque les deux astres sont alignés, les effets se renforcent et on assiste à de grandes marées, lorsque les astres sont en quadrature, les effets se compensent et les marées sont de faible amplitude comme indiqué figure (3).

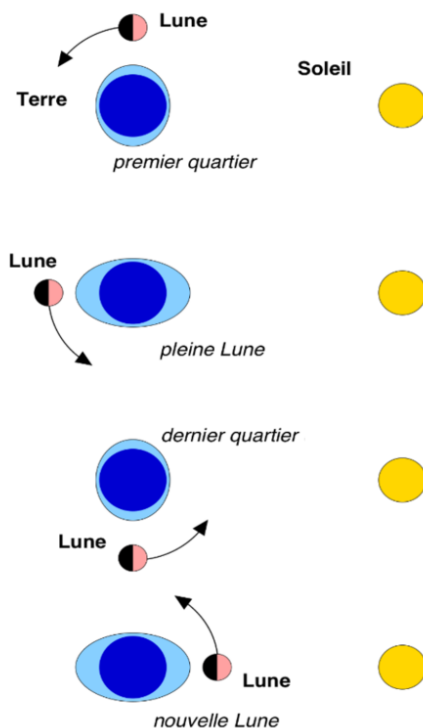


FIGURE 3 – Mortes eaux et vives eaux

DOCUMENT PRINCIPAL 2 : EFFETS DES MAREES

Marée crustale

Comme tous les corps du Système solaire, la Terre n'est pas rigide : elle est constituée d'un noyau
 60 de fer liquide, avec une graine solide au centre, et d'un manteau surmonté d'une pellicule superficielle
 cassante, la croûte. Enfin au-dessus, il y a les océans et l'atmosphère. Sous l'effet de l'attraction de la
 Lune, la Terre se déforme périodiquement. Si les marées dans les océans sont des phénomènes visibles,
 on sait moins que la Terre se déforme, elle aussi, dans son ensemble, au même rythme que les océans. À
 l'équateur, l'amplitude des déformations périodiques du sol atteint 30 centimètres.

65 Modification des vitesses de rotation

En examinant les dates des éclipses de Lune dans l'Antiquité et les observations faites au *XVII*^e
 siècle, l'astronome anglais Edmond Halley émit l'idée, en 1695, que le mouvement de révolution de la
 Lune autour de la Terre ne devait pas être uniforme : en effet, les éclipses apparaissaient à des instants
 légèrement décalés par rapport à ceux prévus par la théorie. C'est Emmanuel Kant, un demi-siècle plus
 70 tard, qui imagina que les marées devaient produire des frottements internes et donc dissiper de l'énergie.
 Kant concluait que la Terre devait être freinée progressivement dans son mouvement de rotation sur
 elle-même.

Les marées se manifestent avec un certain retard par rapport à leur cause, le passage de la Lune ;
 ce retard est d'environ dix minutes pour les "marées solides" et atteint parfois plusieurs heures pour les
 75 marées océaniques. Considérons la figure (4) : Au point A, par exemple, la marée haute a lieu alors que la
 Lune est déjà passée depuis quelques minutes par le plan méridien. Les bourrelets de marée sont entraînés
 par la Terre dans sa rotation d'Ouest en Est. Or, la Lune exerce sur ces bourrelets des forces (en A et B)
 qui engendrent un couple de rappel qui tend à freiner la Terre dans sa rotation. Les déformations causées
 par les marées s'accompagnent, en effet, de frottements dans les océans et entre les différentes couches
 80 du manteau terrestre.

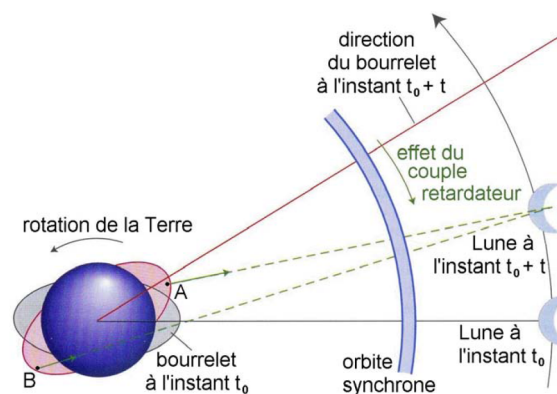


FIGURE 4 – Illustration du retard des marées

En raison des frottements, une partie de l'énergie associée aux déformations se dissipe en chaleur.
 Cette énergie dissipée diminue l'énergie cinétique de rotation de la Terre qui, par suite, ralentit progressivement : la durée du jour augmente de deux millièmes de seconde par siècle. Il semble que ce
 85 ralentissement n'ait pas toujours été constant comme indiqué figure (5).

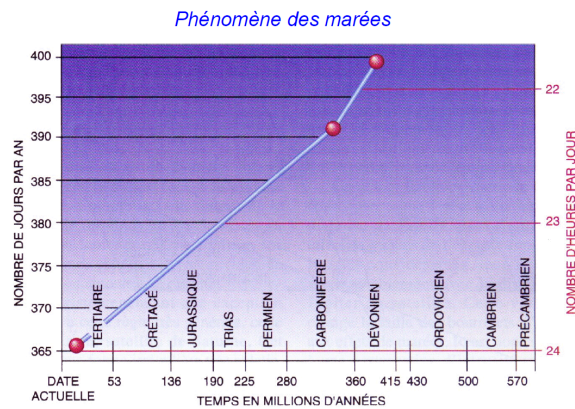


FIGURE 5 – Evolution de la durée du jour

Deux lois régissent les phénomènes mécaniques : la conservation de l'énergie et la conservation du moment cinétique. Le moment cinétique d'un corps en rotation est égal au produit de sa masse par la vitesse en chaque point du corps et par la distance de ce point à l'axe de rotation. On peut considérer en première approximation que le système Terre-Lune est isolé dans l'espace. Son moment cinétique total, c'est-à-dire la somme du moment cinétique orbital et du moment cinétique de rotation, se conserve : la diminution du moment cinétique de rotation de la Terre due aux marées est alors compensée par une augmentation simultanée du moment cinétique orbital de la Lune autour de la Terre. Ceci se traduit par une augmentation graduelle de la distance Terre-Lune, de 3.78 cm par an actuellement, et par une diminution de la vitesse orbitale de la Lune qui résulte, en raison de la troisième loi de Kepler, de l'augmentation de la distance Terre-Lune. Il est possible de remonter très loin dans le passé grâce à certains organismes marins qui ont la propriété de croître en formant des anneaux concentriques, de telle sorte qu'on dispose de repères pour les jours et les saisons. Ainsi les coraux fossiles âgés de plusieurs centaines de millions d'années comptaient, pendant un cycle annuel, un nombre d'anneaux de croissance diurnes nettement supérieur à 365. Puisque l'on pense que le rythme biologique de ces organismes simples n'a pas varié depuis cette époque, on en conclut que le nombre de jours dans l'année était plus grand dans le passé qu'il ne l'est aujourd'hui. La durée de l'année n'ayant pas varié (cette hypothèse se justifie), on doit conclure que c'est la durée du jour qui a changé : il y a 350 millions d'années, l'année comptait 400 jours et le jour durait 22 heures. Il y a également une variation du nombre de mois lunaires (période de révolution de la Lune autour de la Terre) dans l'année, compatible avec le fait que la Lune était, dans le passé, plus proche de la Terre. La quantité d'énergie dissipée par les marées océaniques dépend de la profondeur des océans, de la forme des continents et de leur répartition sur le Globe. Or, les continents actuels avaient un tout autre emplacement dans le passé et ils étaient rassemblés en un continent unique, il y a 250 millions d'années. Cette configuration groupée donne lieu à une bien plus faible dissipation d'énergie, ce qui suggère que l'énergie dissipée dans le phénomène de marées a beaucoup varié au cours de l'histoire du système Terre-Lune.

Généralisation du phénomène : synchronisme

Orbite synchrone

Nous avons vu que le ralentissement de la rotation de la Terre entraîne, par conservation du moment cinétique total, une augmentation régulière de la distance Terre-Lune. Le phénomène est tout à fait général. Considérons un satellite en orbite synchrone autour d'une planète, c'est-à-dire un satellite qui effectue un tour autour de la planète tandis que la planète effectue exactement un tour sur elle-même, dans ce cas, le satellite se situe toujours au-dessus du même méridien de la planète comme indiqué figure (6).

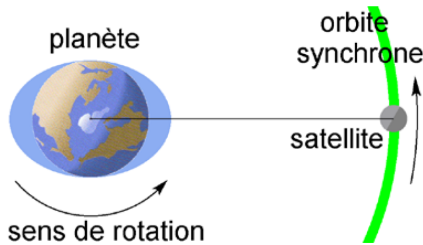


FIGURE 6 – Orbite synchrone d'un satellite

120 Sur la planète le bourrelet de marées est orienté dans la direction Planète-Satellite et au cours du mouvement de rotation de la planète aucun couple n'apparaît, cette situation particulière confère au système une grande stabilité. Pour la Terre, cette orbite synchrone se situe à 36 000 km de la surface, c'est là qu'on place certains satellites de télécommunication. La Lune, qui se situe au-delà de cette orbite synchrone est donc condamnée à s'éloigner indéfiniment de la Terre ! À chaque planète est associée

125 une orbite synchrone où la vitesse de révolution d'un satellite sur cette orbite est égale à la vitesse de rotation de la planète sur elle-même. L'orbite actuelle de Phobos est située en deçà de l'orbite synchrone pour Mars. De ce fait, Phobos a une vitesse orbitale plus importante que la rotation de Mars sur elle-même. Dans ce cas, le renflement de marée créé par Phobos sur Mars est en retard sur le mouvement du satellite : il s'ensuit que, contrairement au cas de la Lune, une partie du moment cinétique orbital

130 de Phobos est utilisée pour accélérer la rotation de Mars sur elle-même ; le mouvement de Phobos est accéléré et, selon la troisième loi de Kepler, le rayon de son orbite diminue. En fait, tous les satellites en deçà de l'orbite synchrone (comme Phobos) tendent, par le phénomène de marées, à tomber sur la planète principale, et tous les satellites au-delà de l'orbite synchrone (comme la Lune) à s'en éloigner. Si l'orbite du satellite est excentrique, l'effet des marées créé par le satellite sur la planète est maximum au

135 voisinage du périastre, donc à l'intérieur de l'orbite synchrone, et ainsi, en moyenne, on aura le même effet que si toute l'orbite était située à l'intérieur de l'orbite synchrone : diminution progressive du rayon de l'orbite, accompagnée d'une diminution de l'excentricité. Il s'agit finalement d'un mécanisme qui régularise les orbites. Phobos, le plus proche des satellites de Mars, a une orbite très excentrique et se rapproche de la surface de la planète à la vitesse d'environ quatre centimètres par an. Dans moins de 30

140 millions d'années, Phobos devrait finir sa vie et s'écraser sur Mars. Pour un corps comme Triton, dont la révolution s'effectue autour de Neptune en sens rétrograde (en sens inverse de la rotation de Neptune sur elle-même), une fin analogue est attendue, mais cela demandera plus longtemps.

Rotation synchrone

145 Nous avons considéré les effets des marées sur la rotation de la Terre et sur la distance Terre-Lune, mais l'influence de la Terre sur la Lune a des effets plus importants encore

En considérant un objet situé en un point M , à la surface de la Lune, et sous la seule influence du couple Terre-Lune : le terme d'accélération dû à la Terre est :

$$\delta \vec{a}(M)_{terre} = \vec{G}_T(M) - \vec{G}_T(L)$$

150 où \vec{G}_T est le champ de gravitation créé par la terre et où L est le centre de la Lune. La valeur maximale de la grandeur de ce terme se produit pour un point M_1 situé à la surface de la Lune sur l'axe Terre-Lune et face à la Terre, et s'écrit :

$$\delta a(M_1)_{terre} = G_T(M_1) - G_T(L) = KM_T \left(\frac{1}{(D - R_L)^2} - \frac{1}{D^2} \right)$$

En développant le terme entre crochets, on trouve

$$\delta a(M_1)_{terre} = 2KM_T \frac{R_L}{D^3} = 2g_{L0} \frac{M_T R_L^3}{M_L D^3}$$

Où g_{L0} désigne la valeur du champ de pesanteur lunaire à la surface de la Lune.

Avec $R_L = 2.0 \times 10^6$ m ; $D = 3.84 \times 10^8$ m ; $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg et $M_L = 7.34 \times 10^{22}$ kg

On trouve :

$$\delta a(M_1)_{Terre} = 2.3 \times 10^{-5} \times g_{L0}$$

Rappelons que le terme de marées dû à la Lune sur la Terre est :

$$\delta a(M_1)_{Lune} = 10^{-7} \times g_0$$

où g_0 est le champ de pesanteur terrestre.

Les effets de marées à la surface de la Lune sous l'influence de la Terre sont donc 100 fois plus importants ! Les déformations causées par les marées sur les différentes couches qui forment le satellite provoquent des frottements qui dissipent de l'énergie. La rotation du satellite est donc freinée jusqu'à ce que sa rotation sur lui-même se synchronise avec sa rotation autour de la planète : le satellite présente alors toujours la même face à la planète et le bourrelet de marées ne subit plus de couple tendant à rétablir l'alignement comme indiqué figure (7).

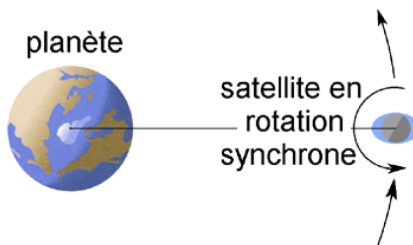


FIGURE 7 – Rotation synchrone

C'est le cas de la Lune qui s'est très rapidement mise en rotation synchrone peu après sa formation quand les différentes couches qui la composaient étaient encore fluides. En fait, tous les satellites "telluriques" des planètes géantes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) sont en rotation synchrone à cause des effets de marées très importants qu'engendrent les planètes sur leurs satellites (à l'exception d'Hypérioron, satellite de Saturne dont la rotation est perturbée par la présence d'un autre satellite, Titan). Io, satellite de Jupiter est perturbé par deux autres satellites : Europe et Ganymède. En conséquence, son mouvement autour de Jupiter est en moyenne circulaire, mais son orbite est quelquefois légèrement excentrique. Cette très faible excentricité a pour conséquence une légère variation de la distance de Jupiter à Io. Comme les effets de marées de l'énorme Jupiter sur Io sont considérables, leur intensité varie notablement avec la distance de Jupiter au satellite. Cette variation change la taille des bourrelets d'Io dus aux effets de marées. Io est donc soumis à une perturbation d'intensité variable de la part de Jupiter. Il en résulte des forces de frottement de grande intensité au sein du satellite et donc un échauffement important. Le seul moyen d'évacuer toute la chaleur ainsi produite est la présence d'un volcanisme actif. Les effets de marées de Jupiter et les perturbations d'Europe et de Ganymède sont donc responsables d'un volcanisme actif sur Io. Si les satellites des planètes ont eu leur rotation freinée par les effets de marées, les planètes, en tant que satellites du Soleil, auraient dû en principe subir le même sort. Le Soleil contribue aussi à ce freinage de la rotation de la Terre pour environ 25 %. Avant que le synchronisme soit atteint, le Soleil sera sans doute devenu une géante rouge qui aura, soit absorbé, soit grillé la Terre (durée de vie estimée : à 5 milliards d'années).

2 Questions

- 180 1. Où se situe le centre de masse C du système Terre-Lune ? On exprimera la distance TC et on procédera à une application numérique.
2. Évaluer le rapport des forces d'attraction exercées sur la Terre par la Lune et par le Soleil. Faire une application numérique. Commenter.
- 185 3. En se plaçant par exemple au Zénith, évaluer le rapport des termes différentiels exercés sur la Terre par la Lune et par le Soleil. Faire une application numérique. Commenter.
4. Pourquoi ne tient-on compte que des influences de la Lune et du Soleil sur la Terre en termes de marées ? Une réponse quantitative est attendue.
5. Sur la figure 2, la pleine mer est représentée de manière symétrique au Zénith Z et au Nadir N . Retrouvez ce résultat par le calcul.
- 190 6. Temps entre deux marées.
- (a) D'après le modèle développé dans les lignes 39 à 46, quelle est durée entre deux pleines mers ?
- (b) L'annexe 3 regroupe les horaires des différentes marées à Brest en Mai 2014. Quelle est la durée moyenne entre deux pleines mers ? quel est l'écart type ? (on prendra au moins 10 intervalles). Commenter.
- 195 (c) Justifier, à l'aide d'un approche théorique, que la durée entre deux pleines mers n'est pas de 12h mais d'environ 12h13.
7. Retrouver l'altitude de 36 000 km évoqué ligne 122.
8. Expliquez le rôle des marées sur la stabilité du système Planète-Satellite suivant que l'orbite du satellite supposée circulaire a un rayon supérieur ou inférieur au rayon de l'orbite stationnaire. En particulier, on mettra en évidence l'augmentation (ou la diminution) de la vitesse de rotation propre de la planète en fonction du rayon de l'orbite du satellite. Citez un exemple de chaque cas.
- 200 9. Dans le cas du système Terre-Lune, la Lune s'éloigne de la Terre. Expliquer, par le calcul, comment relier ce fait aux effets de marées étudiés précédemment. On supposera le système Planète - Satellite isolé et la masse du satellite très inférieure à celle de la planète. Qu'en est-il du système Mars - Phobos ?
- 205 10. Depuis la Terre, on observe toujours la même face de la Lune. Justifier qualitativement le rôle des effets de marée sur le synchronisme de la rotation propre de la Lune. Pourquoi ces mêmes effets n'ont-ils pas conduits (encore. . .) au synchronisme de la rotation propre de la Terre ? Dans combien de temps cette synchronisation devrait-elle se produire ? Quelle sera alors la distance Terre-Lune ? commenter.
- 210 11. Phénomène d'éclipse.
- (a) Expliquer, à l'aide d'un schéma, ce qu'est une éclipse totale du soleil.
- (b) La Lune s'éloigne de la Terre à raison de 3,78cm par an. En supposant que ce rythme reste constant, dans combien d'années ne pourra-t-on plus observer d'éclipses totales du Soleil depuis la Terre ?
- 215 12. Écrire un programme python permettant, à partir du tableau donné par l'annexe 1, de vérifier la troisième loi de Kepler et de retrouver la masse du soleil. On fera un calcul de résidus pour valider le modèle et on pourra utiliser la fonction polyfit détaillée en annexe 4.

220

Rappel : Lorsque l'on cherche à vérifier une relation affine reliant deux grandeurs Y et X , on effectue une régression linéaire et on affecte à chaque valeur observée Y_i une valeur estimée par la droite de régression $Y_i^* = aX_i + b$. L'erreur d'estimation sur l'individu i est égal au résidu défini par :

$$e_i = Y_i - Y_i^* = Y_i - (aX_i + b)$$

225

ANNEXE 1 : Caractéristiques orbitales

Annexe 1 : caractéristiques orbitales

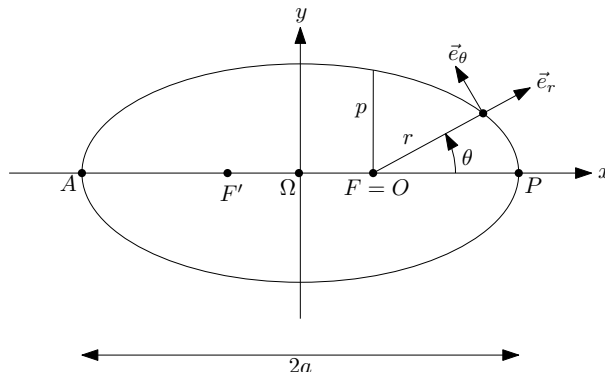
	Distance moyenne au soleil (en u.a.)	Période sidérale (en années terrestres)	Masse (en masse terrestre)	Excentricité	Inclinaison sur l'écliptique (en degrés)
Mercure	0,387	0,241	0,055	0,2056	7,00
Venus	0,723	0,615	0,815	0,0068	3,39
Terre	1	1,00	1	0,0167	-
Mars	1,52	1,88	0,107	0,0934	1,85
Jupiter	5,20	11,9	318	0,0483	1,31
Saturne	9,54	29,5	95,2	0,0560	2,48
Uranus	19,2	84,1	14,6	0,0461	0,81
Neptune	30,1	165	17,2	0,0100	1,77

Tableau 1 : caractéristiques orbitales des planètes

FIGURE 8

On rappelle les caractéristiques d'une trajectoire elliptique :

- ✗ Allure de la trajectoire (avec Ω le centre de la conique, $F = O$ l'un des foyers correspondant au centre attracteur, A l'apogée et P le périégée) :



230

FIGURE 9 – Trajectoire elliptique

- ✗ Equation polaire de la trajectoire :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où e est l'excentricité de l'ellipse et p est son paramètre.

Diamètre (en km)	Masse (en 10^{20} kg)	Distance moyenne à la Terre (en 10^3 km)	Période de révolution sidérale (en jours)	Excentricité	Inclinaison sur l'écliptique (en degrés)
3474	734,8	384,4	27,32	0,055	5,145
Tableau 2 : caractéristiques orbitales de la Lune					

FIGURE 10

- ✗ Masse du soleil : $M_S = 1.989 \times 10^{30}$ kg
- ✗ Diamètre du soleil : $D_S = 1.393 \times 10^6$ km
- ✗ Masse de la terre : $M_T = 5.674 \times 10^{24}$ kg
- ✗ Diamètre de la terre : $D_T = 1.274 \times 10^4$ km
- ✗ Unité astronomique : $1u.a. = 149.6 \times 10^6$ km
- ✗ Constante de gravitation : $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

ANNEXE 2 : Théorème de Koenig

Soit un solide (Σ), de masse M , de centre d'inertie G dont on étudie le mouvement dans un référentiel R . Alors, le moment cinétique de (Σ) calculé en un point A dans le référentiel R vaut :

$$\vec{L}_{A,R} = \vec{L}^* + \vec{AG} \wedge M\vec{V}_{G,R}$$

Où \vec{L}^* est le moment cinétique de (Σ) dans le référentiel barycentrique.

ANNEXE 3 : Horaires des marées à Brest

MÉTÉOCONSULT MARINE				Marées Mai 2014 - Heures Locales					
Brest 48°20'N - 04°29'O									
Jeu 01	BM	01h12	1.10m	Sam 17	BM	01h30	1.05m		
	PM	07h08	6.95m		Coef. 94	PM	07h29	6.95m	Coef. 96
	BM	13h28	1.30m		Coef. 91	BM	13h50	1.20m	Coef. 94
Ven 02	PM	19h23	6.90m	Dim 18	PM	19h50	7.05m	Coef. 91	
	BM	01h50	1.30m		Coef. 86	BM	02h15	1.10m	Coef. 87
	PM	07h44	6.70m		Coef. 82	PM	08h15	6.80m	Coef. 83
Sam 03	BM	14h04	1.55m	Lun 19	BM	14h36	1.40m	Coef. 83	
	PM	08h20	6.40m		Coef. 77	PM	20h37	6.85m	Coef. 78
	BM	14h41	1.85m		Coef. 71	BM	03h03	1.30m	Coef. 83
Dim 04	PM	20h33	6.40m	Mar 20	PM	09h04	6.55m	Coef. 83	
	BM	03h06	1.95m		Coef. 66	BM	15h26	1.65m	Coef. 78
	PM	08h58	6.05m		Coef. 60	PM	21h30	6.60m	Coef. 78
Lun 05	BM	15h19	2.20m	Mer 21	BM	03h56	1.60m	Coef. 73	
	PM	21h11	6.05m		Coef. 54	PM	09h59	6.25m	Coef. 73
	BM	03h47	2.30m		Coef. 49	BM	16h21	1.95m	Coef. 68
Mar 06	PM	09h39	5.70m	Jeu 22	PM	22h29	6.30m	Coef. 64	
	BM	16h00	2.55m		Coef. 44	BM	04h55	1.85m	Coef. 64
	PM	21h55	5.70m		Coef. 40	PM	11h01	5.95m	Coef. 61
Mer 07	BM	04h33	2.60m	Ven 23	PM	17h25	2.25m	Coef. 59	
	PM	10h29	5.35m		Coef. 37	BM	23h35	6.05m	Coef. 59
	BM	16h50	2.85m		Coef. 36	PM	06h01	2.10m	Coef. 60
Jeu 08	PM	22h51	5.40m	Sam 24	BM	18h37	2.35m	Coef. 62	
	BM	05h29	2.85m		Coef. 36	PM	00h47	6.00m	Coef. 62
	PM	11h34	5.15m		Coef. 38	BM	07h12	2.15m	Coef. 65
Ven 09	BM	17h53	3.05m	Dim 25	PM	13h27	5.80m	Coef. 69	
	PM	00h02	5.25m		Coef. 36	BM	19h50	2.25m	Coef. 69
	BM	06h36	2.95m		Coef. 42	PM	01h58	6.05m	Coef. 72
Sam 10	PM	12h48	5.15m	Lun 26	BM	08h21	2.05m	Coef. 76	
	BM	19h05	3.00m		Coef. 46	PM	14h35	6.00m	Coef. 76
	PM	01h16	5.30m		Coef. 52	BM	20h56	2.05m	Coef. 79
Dim 11	BM	07h46	2.80m	Mar 27	PM	03h01	6.25m	Coef. 82	
	PM	13h57	5.35m		Coef. 63	BM	09h24	1.85m	Coef. 82
	BM	20h13	2.80m		Coef. 57	PM	15h34	6.25m	Coef. 84
Lun 12	PM	02h20	5.50m	Mer 28	BM	21h54	1.80m	Coef. 86	
	BM	08h47	2.55m		Coef. 74	PM	03h57	6.45m	Coef. 86
	PM	14h55	5.65m		Coef. 68	BM	10h18	1.65m	Coef. 87
Mar 13	BM	21h10	2.45m	Jeu 29	PM	16h24	6.50m	Coef. 87	
	PM	03h14	5.85m		Coef. 84	BM	22h45	1.55m	Coef. 86
	BM	09h38	2.20m		Coef. 88	PM	04h45	6.60m	Coef. 86
Mer 14	PM	15h43	6.00m	Ven 30	BM	11h06	1.55m	Coef. 85	
	BM	21h58	2.10m		Coef. 91	PM	17h08	6.70m	Coef. 85
	PM	04h01	6.15m		Coef. 88	BM	23h31	1.45m	Coef. 84
Jeu 15	BM	10h23	1.90m	Sam 31	PM	05h29	6.65m	Coef. 84	
	PM	16h25	6.40m		Coef. 88	BM	11h49	1.45m	Coef. 85
	BM	22h42	1.75m		Coef. 94	PM	17h49	6.80m	Coef. 85
Ven 16	PM	04h44	6.50m	Jeu 29	BM	00h13	1.40m	Coef. 87	
	BM	11h05	1.60m		Coef. 84	PM	06h09	6.70m	Coef. 87
	PM	17h06	6.70m		Coef. 88	BM	12h28	1.50m	Coef. 86
Jeu 15	BM	23h24	1.45m	Ven 30	PM	18h26	6.80m	Coef. 86	
	PM	05h25	6.75m		Coef. 88	BM	00h52	1.40m	Coef. 85
	BM	11h46	1.35m		Coef. 91	PM	06h47	6.65m	Coef. 85
Ven 16	PM	17h45	6.95m	Sam 31	BM	13h05	1.55m	Coef. 84	
	BM	00h05	1.20m		Coef. 94	PM	19h01	6.75m	Coef. 84
	PM	06h05	6.95m		Coef. 96	BM	01h29	1.50m	Coef. 81
Ven 16	BM	12h26	1.20m	Jeu 29	PM	07h23	6.50m	Coef. 81	
	PM	18h25	7.10m		Coef. 96	BM	13h41	1.65m	Coef. 79
	BM	00h47	1.05m		Coef. 97	PM	19h36	6.60m	Coef. 79
Ven 16	PM	06h46	7.00m	Jeu 29	BM	01h29	1.50m	Coef. 81	
	BM	13h07	1.15m		Coef. 97	PM	07h23	6.50m	Coef. 81
	PM	19h06	7.15m		Coef. 97	BM	13h41	1.65m	Coef. 79

FIGURE 11

ANNEXE 4 : fonction linregress

Exemple. On veut réaliser une régression linéaire sur le tableau de mesures :

x	0	2.5	5	7.5	10
y	2.2	7.7	12.4	17.7	21.1

◊ Avec PYTHON, on utilise la fonction `linregress`. Elle retourne 5 valeurs, seules les trois premières nous intéressent : ce sont les coefficients *a* et *b* de la régression ainsi que le coefficient de corrélation.

```
import numpy as np
from scipy.stats import linregress
x=np.array([0, 2.5, 5, 7.5, 10])
y=np.array([2.2, 7.7, 12.4, 17.7, 21.1])
(a,b,rho,_)=linregress(x,y)
print "a=%e, b=%e, rho=%e" % (a,b,rho)
```

FIGURE 12

Problème 2 : Étude du phénomène de reptation thermique

Cette partie est consacrée à l'étude des propriétés d'adhérence entre deux solides. Nous analyserons d'abord le phénomène de "reptation thermique" qui est une manifestation de l'influence de la dilatation thermique sur l'état d'adhérence de deux solides en contact. Nous interpréterons ensuite, sur la base d'un modèle microscopique, les lois phénoménologiques de AMONTONS-COULOMB.

Rappelons d'abord ces lois phénoménologiques décrivant le comportement du contact entre deux solides et sur lesquelles repose cette étude. Nous considérons un solide (1) en contact avec un solide (0). Nous notons \vec{R} la force qu'exerce le solide (0) sur le solide (1) à travers la surface de contact (éventuellement locale) de vecteur normal unitaire \vec{n} , choisi orienté de (0) vers (1). Nous notons encore $\vec{N} = N\vec{n}$ ($N \geq 0$) sa composante normale et $\vec{T} = \vec{R} - \vec{N}$ sa composante tangentielle (se reporter à la figure (14)). Le rapport $\tan \varphi = T/N$, ou l'angle φ , définit l'état d'adhérence du contact. Les lois phénoménologiques de AMONTONS-COULOMB stipulent que :

- ✘ si $|\tan \varphi| < f$, on n'observe pas de glissement entre les deux solides, au point de contact ;
- ✘ si $|\tan \varphi| = f$, il apparaît du glissement au point de contact. La vitesse de glissement \vec{v} du solide (1) par rapport au solide (0) vérifie alors $\vec{v} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ et $\vec{v} \cdot \vec{T} < 0$.

La grandeur sans dimension positive f représente le coefficient d'adhérence entre les deux surfaces. Il est indépendant de l'aire apparente de la surface de contact. On entend par aire apparente l'aire définie par les dimensions de la surface.

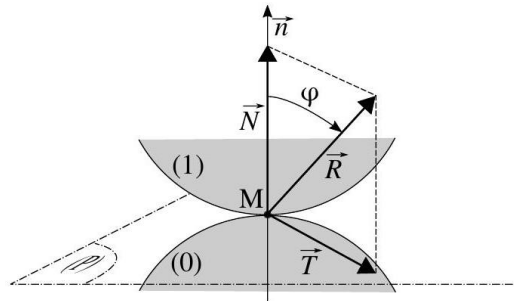


FIGURE 13 – Décomposition de la force \vec{R} qu'exerce le solide (0) sur le solide (1) au point de contact M . Le vecteur \vec{n} est normal au plan tangent (P) aux surfaces de contact (locales), en M .

1 Conditions d'équilibre d'un solide sur un plan incliné

Un solide parallélépipédique de masse m (uniformément répartie dans son volume), de longueur $2b$ et de hauteur $2a$ (sa largeur n'interviendra pas explicitement), repose sur un plan incliné d'un angle θ ($\theta \in [0, +\pi/2[$) par rapport au plan horizontal. Nous notons \vec{g} l'accélération de la pesanteur et posons $q = a/b$. La figure (14) représente ce système. Nous supposons que la zone de contact entre le solide (1) et le plan incliné (0) est localisée sur les arêtes passant par les points A et B. Nous notons \vec{R}_A et \vec{R}_B les actions de contact que le solide (0) applique sur le solide (1), au niveau des arêtes A et B. En reprenant la notation présentée en introduction nous les écrivons :

$$\begin{cases} \vec{R}_A = T_A \vec{u}_x + N_A \vec{u}_z \\ \vec{R}_B = T_B \vec{u}_x + N_B \vec{u}_z \end{cases} \quad (1)$$

- 275 1. Le solide (1) est supposé, a priori, à l'équilibre. Exprimer N_A , N_B et la somme $T_A + T_B$ en fonction de m , g , q et θ . Notons que le nombre d'inconnues excède celui des équations.

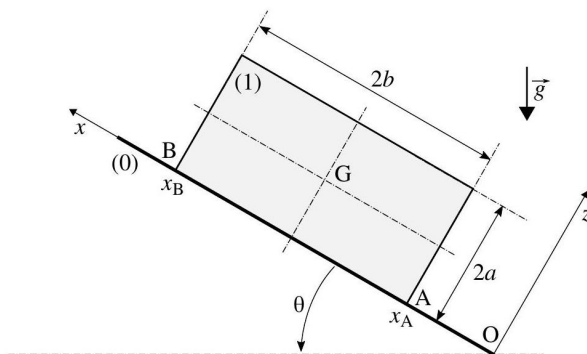


FIGURE 14 – Solide parallélépipédique reposant sur un plan incliné d'un angle θ ($\theta \in [0, +\pi/2[$) par rapport au plan horizontal. Les grandeurs x_A et x_B représentent les abscisses des arêtes A et B du solide (1)

2. Établir les conditions que doit satisfaire $\tan \theta$ pour que l'équilibre du solide soit effectif :

$$\tan(\theta) < f \text{ et } \tan(\theta) < \frac{1}{q}$$

Dans toute la suite, nous supposons que $f < 1/q$. Préciser ce que traduit cette condition.

3. Nous notons $Z_A = T_A/N_A$ et $Z_B = T_B/N_B$ l'état d'adhérence de chacun des contacts A et B. Établir que les variables Z_A et Z_B vérifient l'équation suivante à l'équilibre :

$$AZ_A + BZ_B = C \text{ où } C = 2 \tan \theta \quad (2)$$

On exprimera les constantes $A = A(q, \theta)$ et $B = B(q, \theta)$ en précisant leur signe.

4. Représenter, dans le plan $\mathcal{P}(O, Z_A, Z_B)$, le lieu \mathcal{D} décrit par l'équation (2). Pour ce tracé nous choisirons $\tan \theta = 1/2$ et $q = 1/4$.

N.B. : Réaliser ce tracé avec soin et clarté et à une échelle suffisante (par exemple, 5 cm pour une unité). Il sera complété par la suite.

5. Sur le même tracé, représenter et caractériser le domaine \mathcal{A} du plan \mathcal{P} délimitant l'ensemble des états d'adhérence (Z_A, Z_B) possibles. Préciser la portion correspondante du lieu \mathcal{D} . Pour cette illustration nous adopterons $f = 1$.

6. Préciser de quelle façon se traduit, sur ce graphique, l'indétermination évoquée en fin de la question (1).

7. On considère toujours que $q = 1/4$ et que $f = 1$ et on fait varier θ . Illustrer (toujours sur le même graphique) une situation correspondant à la limite de glissement du solide. Préciser alors la relation fixant la valeur de $\tan \theta$.

2 Reptation thermique.

Dans la situation initiale, le solide (1) est à l'équilibre sur le plan (0). Cet équilibre est supposé assez éloigné de la limite de glissement. Il est alors soumis à de lentes variations cycliques de

température entre $T_{\min} = T_0$ et $T_{\max} = T_0 + \Delta T (\Delta T > 0)$ comme l'illustre la figure (15). Le solide (0) est maintenu à la température T_0 . Si l'amplitude ΔT et l'angle d'inclinaison θ vérifient conjointement une certaine condition, et après un grand nombre de cycles, on constate que le solide (1) s'est déplacé le long de la pente. C'est ce phénomène de "reptation thermique" que nous allons interpréter.

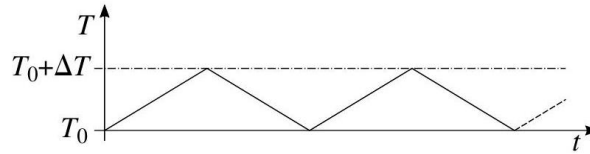


FIGURE 15 – Cycles thermiques subis par le solide (1)

Nous supposons que dans la situation initiale, à T_0 , les contacts en A et B sont dans le même état d'adhérence, c'est-à-dire que $Z_A = Z_B$.

Nous ne tiendrons pas compte de l'effet (du second ordre) des variations de température sur le rapport q .

L'angle θ vérifie toujours $\tan(\theta) = 1/2$.

8. Toujours en complétant le tracé réalisé en réponse à la question (4), situer le point S_0 de \mathcal{D} correspondant à la situation initiale.

9. Nous supposons que l'amplitude thermique ΔT est suffisante pour faire apparaître du glissement, tantôt au niveau du contact A, tantôt au niveau du contact B : les glissements au niveau de A et de B ne se produisent pas simultanément mais de manière successive. Indiquer, en précisant le raisonnement tenu, la conséquence du chauffage du solide (1) sur le déplacement du point S (Z_A, Z_B) depuis sa situation S_0 .

10. Représenter qualitativement, en correspondance des cycles thermiques représentés figure (16), l'évolution temporelle de chacune des abscisses x_A et x_B des arêtes A et B du solide (1).

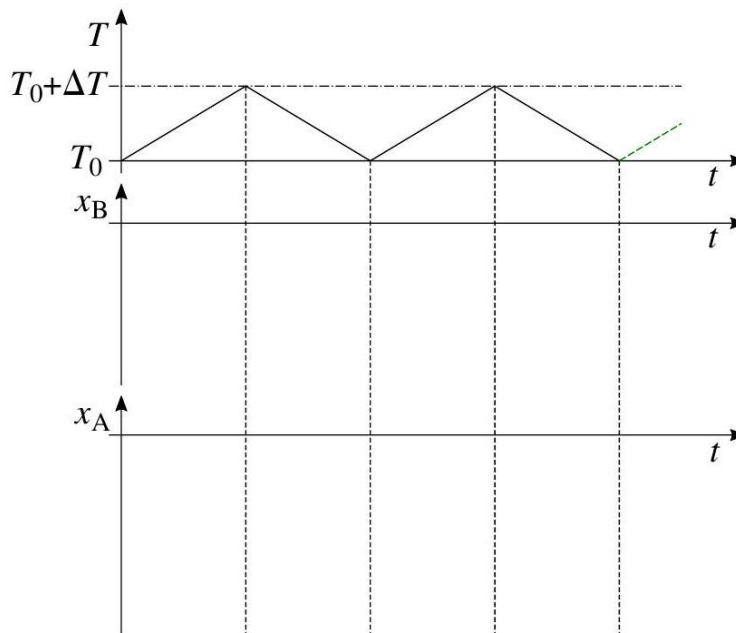


FIGURE 16 – Figure à reproduire pour illustrer l'évolution temporelle des abscisses x_A et x_B des arêtes A et B du solide (1) en réponse aux cycles thermiques $T(t)$.

En vue de déterminer la condition que doivent satisfaire conjointement l'amplitude ΔT et l'angle θ

pour assurer l'apparition du phénomène de reptation thermique, nous modélisons le comportement des contacts A et B comme le représente la figure (17). Chacun des contacts A et B du solide (1) avec le plan (0) s'établit par l'intermédiaire d'un patin en liaison élastique linéaire avec le solide (1). Le contact des patins (notés (1A) et (1B) sur la figure (5)) et le plan (0) respecte les relations de AMONTONS-COULOMB avec le coefficient d'adhérence f précédemment introduit. La raideur de chacun des éléments élastiques intervenant dans les liaisons (1)-(1A) et (1)-(1B) est notée k . Les variables u_A et u_B situent, relativement à la configuration neutre, la position des patins par rapport au solide (1). Le triplet (T, u_A, u_B) définit l'état mécanique et thermique des contacts. Le triplet (T^*, u_A^*, u_B^*) caractérise un état de référence.

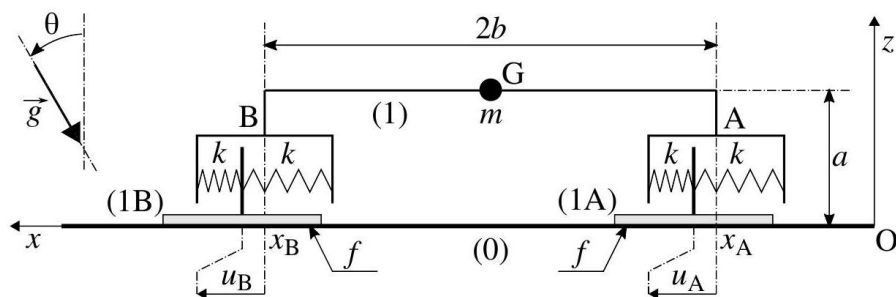


FIGURE 17 – Chacun des contacts A et B du solide (1) avec le plan (0) est modélisé par un patin, (1A) ou (1B), lié élastiquement au solide (1). Chaque patin est susceptible de glisser sur le plan (0) dans les conditions fixées par les relations de AMONTONS-COULOMB. On notera que le vecteur \vec{g} est incliné dans le repère (O, x, z) .

Nous adoptons, pour décrire la dépendance d'une dimension L d'un solide parallélépipédique avec sa température T , la relation linéaire :

$$L(T) = L_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (\alpha > 0)$$

La géométrie du solide (1), désormais supposée telle que $q \ll 1$, permet d'adopter $q = 0$.

11. Montrer que :

$$Z_A = \frac{4k}{mg \cos \theta} u_A$$

De même, relier u_B à Z_B .

12. Nous nous plaçons dans la situation telle qu'aucun des patins ne glisse lors du passage de l'état de référence (T^*, u_A^*, u_B^*) à l'état (T, u_A, u_B) , conséquence de l'évolution de la température de T^* à T . Relier la différence $Z_A(T) - Z_B(T)$ aux écarts $Z_A^* - Z_B^*$ et $T - T^*$.

Nous poserons :

$$\Delta Z^* = Z_A^* - Z_B^*$$

et,

$$\beta = \frac{8kb_0}{mg \cos \theta}$$

où :

$$b_0 = b(T_0)$$

13. Montrer comment, graphiquement dans le plan \mathcal{P} , l'état d'adhérence (Z_A, Z_B) des contacts est défini, et paramétré par la température. On retracera tous les éléments utiles à la compréhension de la construction (et pour $q = 0$). Pour cette illustration, nous choisirons l'état de référence en S_0 et pour $T^* = T_0$.

- 340 14. Établir la condition portant conjointement sur l'amplitude ΔT et l'angle θ assurant l'apparition du phénomène de reptation thermique.
15. Analyser ce résultat.
- 345 16. Le dispositif expérimental est constitué d'un plan (0) en céramique sur lequel repose une plaque de cuivre (1) de longueur $2b_0 = 10$ cm et de coefficient de dilatation thermique $\alpha \simeq 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. L'angle θ est choisi proche de l'angle limite de glissement du solide. La modulation de température est assurée par une cellule à effet Peltier qui réalise des cycles d'amplitude $\Delta T = 5$ K et de période $\tau_c = 5$ min. Calculer, en heure et minute, le temps nécessaire à l'avancée de la plaque d'une distance $\Delta x = 1$ mm.

Exercice de rattrapage

350 L'uranium naturel est un mélange de deux isotopes : l'uranium 238 (^{238}U avec une teneur de 99.27%) et l'uranium 235 (^{235}U avec une teneur de 0.72%). Seul l'uranium 235 est fissile et peut être utilisé dans un réacteur nucléaire, à condition que sa teneur avoisine 4%.

355 Pour séparer les isotopes 235 et 238 de l'uranium, on utilise une centrifugeuse constituée d'un cylindre de diamètre $a = 20$ cm et de $H = 5$ m de hauteur, tournant autour d'un axe vertical (Oz) à la fréquence f de 50 000 tours par minute. Le gaz, de l'hexafluorure d'uranium UF_6 est introduit dans le cylindre à la température $T = 60$ °C supposée constante le long du processus. On négligera les effets de la pesanteur.

1. En procédant par analogie avec l'évolution de la densité particulaire dans une atmosphère isotherme, déterminer les rapports :

$$\frac{n_1(r)}{n_1(0)} \text{ et } \frac{n_2(r)}{n_2(0)}$$

Où respectivement $n_1(r)$ et $n_2(r)$ sont les densités particulières de $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ à la distance r de l'axe (Oz).

360 Commenter.

2. Déterminer le nombre $N_1(r)$ (resp. $N_2(r)$) de molécules $^{235}\text{UF}_6$ (resp. $^{238}\text{UF}_6$) contenues dans le cylindre de rayon r et d'axe (Oz) en fonction de $n_1(0)$ (resp. $n_2(0)$) et des données de l'énoncé.
3. On récupère les particules grâce à un système de pales aspirant toutes les molécules dans un cylindre de rayon r_0 proche du rayon a du cylindre. Déterminer le rapport des fractions molaires en $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ avant et après centrifugation (notés respectivement α et α'). En déduire que :

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon \text{ où } \varepsilon \ll 1$$

On exprimera ε et on donnera sa valeur numérique sachant que $r_0 = 9.95$ cm.

4. Déterminer le nombre de centrifugeuses à mettre en cascade pour atteindre le taux d'enrichissement requis pour du combustible nucléaire. Commenter.
- 365

