

# TD DE MECANIQUE DES FLUIDES

## 1 STATIQUE DES FLUIDES



FIGURE 1 – Commenter ces planches de BD

### 1.1 Masse de l'atmosphère

Déterminer la masse de l'atmosphère terrestre.

*Données*

- ✗ Masse molaire de l'air :  $M_T = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .
- ✗ Pression atmosphérique :  $P_0 = 1 \text{ atm}$ .

### 1.2 Le baromètre de Goethe



FIGURE 2 – Baromètre de Huygens vendus dans le commerce

On trouve dans le commerce des baromètres, appelés baromètres de Goethe comme représentés figure 2.

Ce baromètre est composé d'un réservoir et d'un tube latéral (appelé tube de lecture) que l'on remplit d'eau, de sorte que entre eux l'air ne passe pas. Après remplissage, le réservoir est fermé hermétiquement par le haut, de sorte que l'air qui se trouve à l'intérieur, soit enfermé.

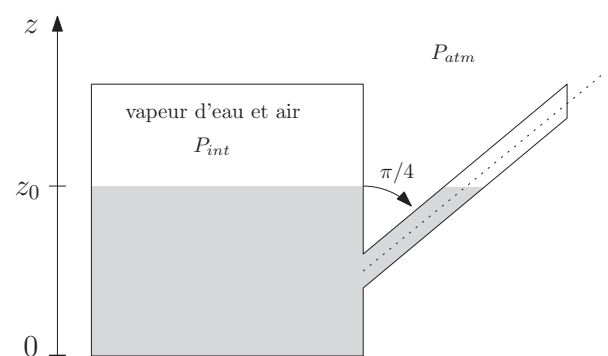


FIGURE 3 – Modélisation du baromètre

Après avoir analysé qualitativement le principe de ce baromètre, utiliser la modélisation représentée figure 3 pour comparer sa sensibilité  $s$  à celle d'un baromètre de Toricelli classique. Quel est le principal défaut de ce baromètre ?

On rappelle la définition de la sensibilité de ce type de baromètre :  $s$  est le rapport entre la dénivellation du liquide le long du tube de lecture sur la variation de pression extérieure correspondante.

Données

- ✗ Masse volumique de l'eau  $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .
- ✗ Densité du mercure liquide  $d=13.6$ .

### 1.3 Évolution de la température dans la troposphère

La troposphère, partie de l'atmosphère comprise entre 0 et 12 km, ne peut pas être considérée comme une atmosphère isotherme comme indiqué figure 4. Dans cette zone, on peut modéliser l'évolution de la température par un gradient constant  $-a$ .

1. En utilisant le diagramme de figure 4, donner un ordre de grandeur de  $a$ .

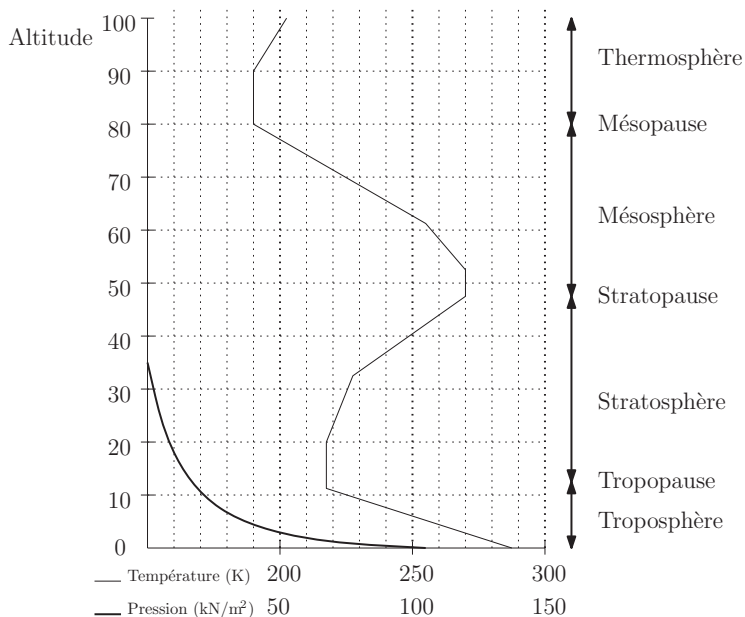


FIGURE 4 – Évolution de la température dans l'atmosphère

2. En considérant que, dans cette atmosphère, l'évolution d'une particule fluide est adiabatique réversible, déterminer la valeur théorique de  $a$ . Sachant que  $a$  est de l'ordre de  $10^\circ\text{C}\cdot\text{km}^{-1}$  en atmosphère sèche, et plutôt de l'ordre de  $6^\circ\text{C}\cdot\text{km}^{-1}$  en atmosphère humide, commenter la valeur trouvée.
3. En déduire l'évolution de la pression en fonction de l'altitude que donne ce modèle dans la troposphère.
4. Commenter les relevés météorologiques ci-dessous, des valeurs de température et de pression au même instant, en deux villes différentes :
  - ✗ Perpignan (altitude  $h_1 = 43 \text{ m}$ ) :  $P_1 = 1026.4 \text{ mBar}$  et  $T_1 = 7.8^\circ\text{C}$ .
  - ✗ La Molina (altitude  $h_2 = 1704 \text{ m}$ ) :  $P_2 = 1021.2 \text{ mBar}$  et  $T_2 = -4.2^\circ\text{C}$ .

### 1.4 Le ludion

Le ludion est un montage de physique, représenté figure 5, illustrant la forte compressibilité de l'air par rapport à celle de l'eau : un objet creux, présentant une petite ouverture sur sa partie inférieure, et partiellement rempli d'air, est immergé dans un récipient fermé par une membrane. L'air qu'il contient sert à le faire flotter. L'apparition d'une pression sur la membrane fait descendre l'objet creux et l'arrêt de la pression le fait remonter.

1. Expliquer précisément le principe de ce montage et notamment le rôle de la poussée d'Archimède.
2. On souhaite construire un ludion avec une ampoule dans un vase de forme cylindrique de hauteur  $H$ , comme indiqué figure 6. Quel volume d'air, à pression atmosphérique, doit-on laisser dans l'ampoule pour que le ludion flotte à environ la moitié de la hauteur du vase, sans qu'aucune pression ne soit exercée sur la surface libre de l'eau ?



FIGURE 5 – Expérience du ludion

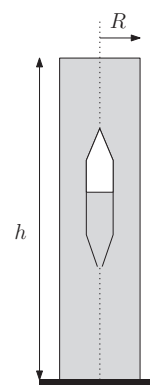


FIGURE 6 – Ludion « fait-maison »

### Données

- ✗ Masse de l'ampoule :  $m = 10 \text{ g}$ .
- ✗ Hauteur du vase :  $h = 30 \text{ cm}$ .
- ✗ Masse volumique de l'air :  $\rho_0 = 1.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .
- ✗ Masse volumique de l'eau :  $\rho_e = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .
- ✗ Pression atmosphérique :  $P_0 = 1 \text{ atm}$ .

## 1.5 Exercice ouvert : quelle est la forme de la Terre ?

Déterminer la forme de la Terre.

On pourra considérer que la Terre est un astre constitué d'un fluide incompressible et homogène en rotation uniforme autour d'un axe fixe (l'axe sud/nord) à la vitesse angulaire  $\Omega$ .

Dans le référentiel terrestre, l'équilibre d'une particule fluide, assimilée à un point  $M$  de masse  $dm = \rho d\tau$ , est obtenu grâce aux différentes forces en présence : l'interaction gravitationnelle, la résultante des forces de pression et les forces d'inertie.

## 2 CINÉMATIQUE DES FLUIDES



FIGURE 7 – Expliquer cette image et indiquer l'orientation du vecteur tourbillon

## 2.1 Étude d'un écoulement

On considère un écoulement bidimensionnel dont le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v} = -(kx + ky + at)\vec{e}_x + (kx + ky + b \sin(\omega t))\vec{e}_y,$$

1. Caractériser cet écoulement.
2. Déterminer les trajectoires des particules de fluide et les lignes de courant.
3. Calculer l'accélération d'une particule de fluide de deux manières différentes

## 2.2 Écoulement entre deux cylindres

L'écoulement entre deux cylindres d'axe ( $Oz$ ) en rotation est donné par le champ des vitesses suivant, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \vec{e}_\theta$$

1. Ce champ des vitesses correspond-il à : un écoulement stationnaire ? un écoulement incompressible ? un écoulement rotationnel ?
2. Vérifier si les conditions aux limites sur les deux cylindres sont correctes. Existe-t-il un potentiel des vitesses ?

## 2.3 Champ des vitesses et des accélérations d'une sphère pulsante

On considère une bulle sphérique de rayon  $R(t)$ , dont les variations engendrent un écoulement dans le fluide, caractérisé par un champ des vitesses de la forme  $\vec{v} = v(r, t)\vec{e}_r$ , en coordonnées sphériques, le fluide étant supposé parfait et incompressible.

1. En utilisant la conservation de la masse, donner l'expression de  $v(r, t)$  fonction de  $r$ , du rayon de la bulle  $R(t)$  et de sa dérivée.
2. Déterminer le champ des accélérations.

## 2.4 Écoulement autour d'un cylindre

On considère un écoulement autour d'un cylindre d'axe ( $Oz$ ), de base rayon  $R$  comme indiqué figure 8. On suppose l'écoulement parfait, incompressible (de masse volumique  $\mu$ ), irrotationnel et stationnaire.

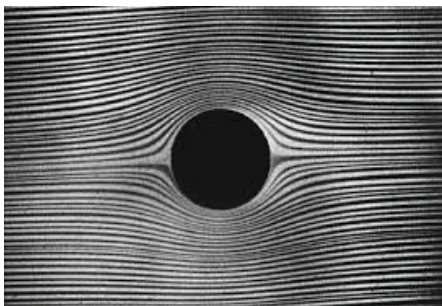


FIGURE 8

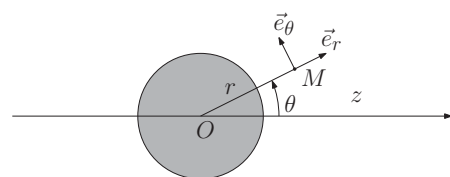


FIGURE 9

1. Justifier que l'écoulement considéré est potentiel et proposer des conditions limites.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel des vitesses  $\phi(M) = \phi(r, \theta)$ .
3. On cherche des solutions sous la forme :  $\phi(r, \theta) = f(r) \cos(\theta)$ .
  - (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $f(r)$  et la résoudre en cherchant des solutions sous la forme  $f(r) = r^n$ .
  - (b) En déduire le champ des vitesses ainsi que le champ des accélérations.

## 2.5 Écoulement autour d'une sphère

Reprendre l'exercice précédent en considérant cette fois l'écoulement autour d'une sphère.

## 2.6 De la tornade au vortex

On modélise une tornade par un écoulement incompressible à symétrie cylindrique autour d'un axe ( $Oz$ ), décrit en coordonnées cylindriques par un champ de vitesses de la forme  $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e}_\theta$  et un vecteur tourbillon  $\vec{\Omega}$  uniforme au sein de la tornade et nul en dehors :

$$\vec{\Omega} = \begin{cases} \Omega_0 \vec{e}_z & \text{pour } r \leq a \\ \vec{0} & \text{pour } r > a \end{cases}$$

- En utilisant le théorème de Stokes sur un cercle de rayon  $r$ , établir l'expression de  $v_\theta(r)$  pour  $r \leq a$  et  $r > a$ . Où la norme de la vitesse est-elle maximale ?
- On appelle vortex le cas limite obtenu lorsque  $a \rightarrow 0$  et  $\Omega_0 \rightarrow \infty$  avec  $\Omega_0 a^2 = \frac{\Gamma}{2\pi}$  où  $\Gamma$  est une constante finie.
  - Chercher un potentiel des vitesses  $\phi$  tel que :  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$  pour  $r \neq 0$ . Comparer  $\phi(r, \theta = 0)$  et  $\phi(r, \theta = 2\pi)$  et conclure.
  - Montrer que la superposition d'un vortex d'axe ( $Oz$ ) à l'écoulement dérivant du potentiel  $\phi = -\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta$  correspondant à l'écoulement autour d'un cylindre satisfait encore aux conditions aux limites et est irrotationnel. Commenter

## 2.7 Modélisation

Proposez une modélisation pour l'écoulement de l'eau dans un lavabo qui se vide.

## 3 DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS



FIGURE 10 – Voilier Flettener fonctionnant grâce à l'effet Magnus. Expliquer.

### 3.1 Pression sur le nez d'un sous-marin

Un sous-marin se déplace horizontalement à la vitesse de 20 noeuds par 300 m de fond, comme représenté figure 11. Déterminer l'ordre de grandeur de la pression s'exerçant sur le nez du sous-marin, c'est-à-dire au point A.

*Indication* : un nœud nautique correspond à 1.852 kilomètre par heure.

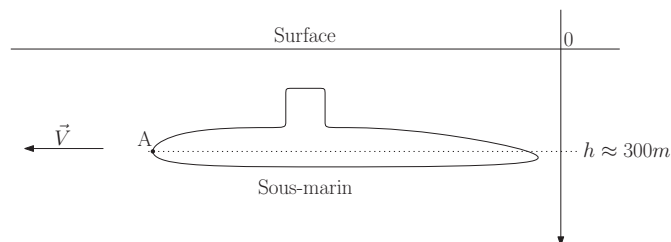


FIGURE 11 – Sous marin en déplacement horizontal

### 3.2 Siphons

On permet l'écoulement de l'eau contenue dans un réservoir de section libre constante  $S$ , par l'intermédiaire d'un siphon BCDE, tube cylindrique de section constante de diamètre  $d = 8$  cm comme indiqué figure 12. L'extrémité E du tube débouché à l'air libre à une distance  $Z = 7.2$  m sous le niveau de la surface libre de l'eau dans le réservoir. La pression atmosphérique est de 1020 hPa.

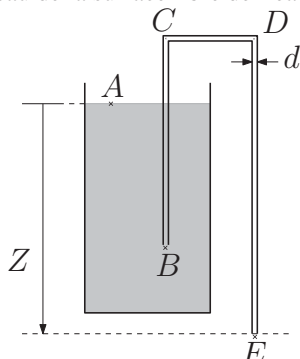


FIGURE 12

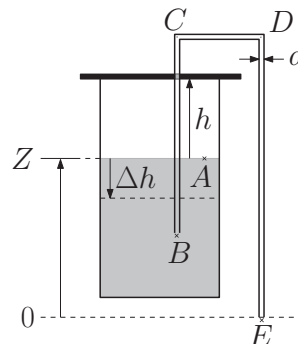


FIGURE 13

En prenant la masse volumique de l'eau  $\rho = 10^3 \text{ Kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  :

- Donner le débit volumétrique de ce siphon.
- A quelle hauteur au dessus de la surface libre dans le réservoir, devrait se situer le point le plus haut du siphon pour que, en ce lieu se produise la cavitation ? La pression de vapeur saturante de l'eau à la température de l'écoulement est  $P_{vs} = 20 \text{ hPa}$ . On négligera la vitesse d'abaissement dans le réservoir par rapport à la vitesse d'écoulement dans le tube. On supposera l'écoulement permanent. Le réservoir est maintenant fermé, de l'air à pression atmosphérique est emprisonné dans la chambre de ce réservoir, l'espace libre a ainsi une hauteur  $h$ , comme indiqué figure 13. En prenant comme horizontale référence celle passant par la sortie E du tube, on appelle  $Z$  la cote initiale de la surface libre dans le réservoir. Le pression atmosphérique correspond à une hauteur d'eau de  $\frac{P_a}{\rho g} = H$ .
- En supposant que le siphon est amorcé pour permettre l'écoulement, donner l'abaissement  $\Delta h$  du niveau de l'eau dans le réservoir lorsque l'écoulement cessera.
- Exprimer le résultat en fonction de  $H$ ,  $Z$  et  $h$ .  
On négligera la vitesse d'abaissement dans le réservoir par rapport à la vitesse d'écoulement dans le tube et on assimilera l'air à un gaz parfait et on supposera que sa température reste constante. On négligera la pression de vapeur de l'eau.

### 3.3 Trompe à eau

La trompe à eau, schématisée figure ci-dessous, est utilisée pour générer une dépression importante par effet venturi à l'aide d'un écoulement d'eau. Cela est mis à profit en chimie pour la filtration Büchner. On suppose l'écoulement parfait, homogène, incompressible stationnaire dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

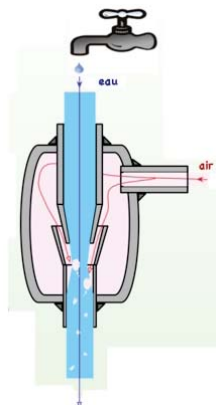


FIGURE 14

- Préciser le sens physique des termes utilisés dans la phrase ci-dessus.
- A l'aide d'une équation de conservation, déterminer la relation entre les vitesses au point A (à la sortie du robinet, dans le tube de rayon  $R_A$ ) et la vitesse au point B (dans la zone de rétrécissement, de rayon  $R_B < R_A$ ).

3. A l'aide d'une équation d'évolution, en déduire la dépression  $P_B - P_A$  en fonction des rayons des tuyaux et de la masse volumique de l'eau.
4. La dépression est limitée par la pression de vapeur saturante de l'eau à température ambiante qui vaut 2500 Pa. Que se passe-t-il si  $P_B < 2500$  Pa ?
5. Calculer la vitesse maximale et le débit maximal du robinet dans ces conditions. Application numérique avec  $R_A = 1$  cm et  $R_B = 0.2$  cm.

### 3.4 Tube Pitot

Le tube pitot est une sonde essentielle à la sécurité des avions puisqu'elle donne une mesure de la vitesse de l'avion. La vitesse de l'avion s'obtient en mesurant la différence de pression aux points A et B des deux entrées du tube.



FIGURE 15

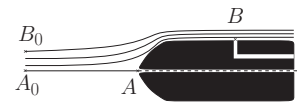


FIGURE 16

1. Déterminer la différence de pression  $P_A - P_B$  en fonction de la vitesse de l'avion.
2. Application numérique pour un avion volant à  $300 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ .

### 3.5 Oscillations dans un tube en U

On s'intéresse à de l'eau contenue dans un tube en U.

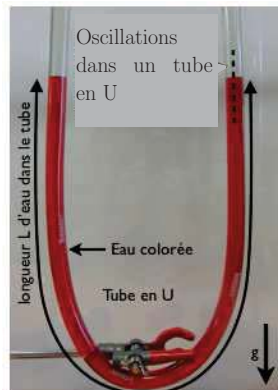


FIGURE 17

Au repos le fluide est à une hauteur  $h_0$  dans chacune des deux branches verticales du U. En présence d'une perturbation de hauteur sur une des branches, on observe une oscillation sinusoïdale de la hauteur du fluide de pulsation  $\omega_0$ . Déterminer la pulsation  $\omega_0$  en fonction de données pertinentes.

### 3.6 Cavitation

L'hélice des navires génèrent une forte dépression ce qui crée des bulles de gaz (vapeur d'eau). Ce phénomène de cavitation est responsable d'une érosion de l'hélice (explosion des bulles) et aussi d'un bruit très caractéristique de l'hélice. On imagine alors une bulle de gaz de rayon  $a_0$  à la date  $t = 0$  et de pression interne très faible. On souhaite étudier l'évolution de son rayon  $a(t)$  dans l'eau en négligeant d'une part les effets de pesanteur et d'autre part les autres bulles. Le fluide autour de l'unique bulle est donc mis en mouvement par les variations du rayon de la bulle et on note  $\vec{v}(M, t) = v(r, t)\vec{u}_r$  le champ des vitesses en coordonnées sphériques dans le fluide.

Loin de la bulle, les conditions aux limites sont  $v(r = \infty, t) = 0$  et  $p(r = \infty, t) = p_\infty$ . L'écoulement de l'eau est supposé parfait, incompressible et homogène, dans le référentiel galiléen où la bulle est immobile.

1. Par une analyse dimensionnelle, en supposant que le temps d'implosion de la bulle s'écrit en fonction de la masse volumique  $\mu$  de l'eau, de  $p_\infty$  et de  $a_0$  :

$$T = ka_0^\alpha \mu^\beta p_\infty^\gamma,$$



déterminer les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$ . Que représente  $k$ ? Donner un ordre de grandeur de  $T$  pour une bulle de rayon millimétrique avec  $p_\infty = 1 \text{ bar}$ .

2. En exploitant la conservation du débit volumique et les conditions aux limites sur la bulle, montrer que :

$$v(r, t) = \frac{a^2 \dot{a}}{r^2}$$

3. Montrer alors que l'écoulement est potentiel. Calculer  $\phi$  pour  $\phi(r \rightarrow \infty, t) = 0$ . Conclure.

4. En exploitant l'intégrale 1ère de l'équation d'Euler entre  $r = a_0$  et  $r = \infty$ , montrer que :

$$a(t) \frac{d^2 a}{dt^2} + 3/2 \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = -\frac{p_\infty}{\mu}$$

5. On fait le changement de variable :  $a^* = \frac{a(t)}{a_0}$  et  $t^* = \frac{t}{\tau}$ . Trouver l'équation dont  $a^*$  est solution. Choisir  $\tau$  de manière à avoir une équation universelle. Retrouver alors le temps d'implosion.

6. L'équation d'Euler impose pour  $a^* = 1/10$  (juste avant l'explosion) et pour  $p^* = \frac{p}{p_\infty}$  :

$$\frac{\partial p^*}{\partial r} = \frac{2}{15} \frac{a_0}{r^2} \left( \frac{a_0^3}{r^3} - 2580 \right)$$

Montrer que la pression passe par un maximum  $p_M$  pour une distance  $r_M$ . Evaluer cette distance et commenter.



FIGURE 18

### 3.7 Effet Magnus

Dans de nombreux jeux utilisant des boules ou des balles, du billard au golf en passant par le football, les balles sont souvent frappées de manière à entrer en rotation pour modifier leur comportement : c'est l'effet Magnus.

Lorsqu'un joueur frappe la balle afin d'utiliser cet effet, il crée, en plus d'une vitesse  $\vec{V}_0$  du centre de gravité, une forte vitesse de rotation  $\vec{\Omega}_0$  de la balle sur elle-même, en profitant des frottements solides entre la balle et le support utilisé pour la frapper (raquette, club, chaussure..).

Pour étudier cet effet, on considère une balle sphérique de vitesse  $V_0 \vec{e}_x$  et possédant un mouvement de rotation propre caractérisé par le vecteur rotation  $\Omega_0 \vec{e}_z$ . On se place dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  de la balle et on suppose que l'écoulement de l'air autour de la balle est parfait, incompressible et stationnaire.

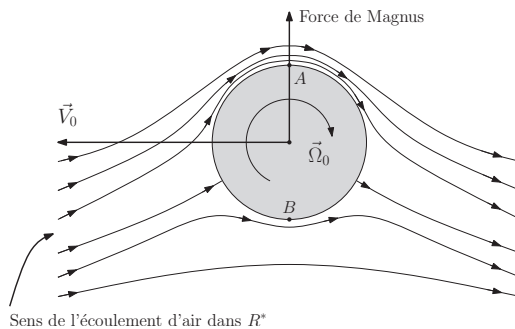


FIGURE 19

1. Calculer les vitesses  $\vec{V}_A$  et  $\vec{V}_B$  des points A et B représentés figure 19 dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$ .



- L'air au voisinage de la balle est partiellement entraîné par la rotation propre de la balle, tant est si bien que la vitesse du fluide au voisinage de  $A$  (en  $A'$ ) est  $\vec{V}_{A'} = -\vec{V}_0 + \varepsilon \vec{V}_A$  et en  $B'$ , situé au voisinage de  $B$  :  $\vec{V}_{B'} = -\vec{V}_0 + \varepsilon \vec{V}_B$  où  $\varepsilon$  est une constante positive. En déduire alors la différence de pression entre  $A'$  et  $B'$  en fonction de  $\varepsilon$  et des autres paramètres pertinents du problème.
- Quelle est alors la direction et le sens de la résultante des forces due à cette différence de pression ?
- Quelle est qualitativement l'effet de cette force sur le trajectoire de la balle en fonction de l'orientation du vecteur rotation ?

### 3.8 Portance

On s'intéresse à l'écoulement bidimensionnel autour d'une aile d'avion. L'aile d'avion est modélisée par un cylindre de rayon  $R$  et d'axe horizontal ( $Oz$ ) infini et de rayon  $R$ . On étudie cette aile dans une soufflerie qui génère sur l'aile immobile une vitesse  $\vec{V}_\infty = -v_0 \vec{u}_x$  à la pression  $P_\infty = P_0$ .

- Justifier les hypothèses suivantes : Écoulement stationnaire, incompressible, potentiel.
- Justifier du potentiel de l'écoulement :

$$\phi(r, \theta) = -v_0 \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

- Calculer les vitesses en tout point de l'espace.
- En déduire la pression en tout point du cylindre.
- Calculer la résultante des forces de pression sur l'aile de l'avion. Montrer que sa norme est proportionnelle à  $\Gamma$ . Justifier alors qu'il est impossible d'obtenir une portance verticale sans vortex.

### 3.9 Force exercée sur un hangar

Un hangar demi-cylindrique, de rayon  $R$  et de longueur  $L$ , est soumis à l'action du vent dont la vitesse, à des distances grandes devant  $R$ , est donnée par  $\vec{V}_0 = V_0 \vec{i}$ . Une ouverture est aménagée en  $A$  au milieu du hangar.

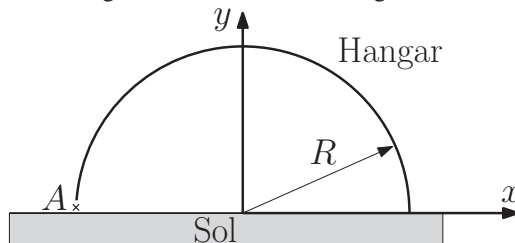


FIGURE 20

Pour évaluer la force  $\vec{F}$  s'exerçant sur le hangar, on suppose les approximations suivantes :

- ✗ L'air est un fluide en écoulement parfaitement incompressible et irrotationnel.
- ✗ On néglige les effets de pesanteur.
- ✗ On suppose  $L \gg R$
- ✗ L'air est au repos dans le hangar.

- Après avoir commenté brièvement les hypothèses, montrer que le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi \text{ avec } \phi = \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \cos \theta$$

On précise que  $\Delta(r \cos \theta) = 0$  et  $\Delta\left(\frac{\cos \theta}{r}\right) = 0$  en coordonnées cylindriques.

- En déduire la force  $\vec{F}$ .
- Proposer des ordres de grandeurs. Pour quelle vitesse du vent, un Hangar peut-il être arraché ?

### 3.10 Modèle de la houle

Pour modéliser simplement les vagues de houle, on adopte les hypothèses suivantes :

- ✗ L'eau est un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  sans viscosité.
- ✗ Les mouvements sont de faible amplitude; on peut donc négliger les termes du second ordre en  $v$ , et en particulier l'accélération convective.
- ✗ On limite l'étude à des mouvements dans le plan  $(xOz)$ ; l'axe  $(Oz)$  étant dirigé vers le haut.
- ✗ Les grandeurs variables sont toutes des fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation  $\omega$ .
- ✗ On cherche les solutions qui présentent une propagation dans le sens des  $x$  croissants.
- ✗ On ne tient pas compte des phénomènes liés à la tension superficielle.
- ✗ L'origine des altitudes est prise au niveau de l'interface air/eau en l'absence de houle.
- ✗ En présence de houle, l'amplitude de l'interface air/eau est :  $h(x, t) = h_0 \cos(\omega t - kx)$ . Les oscillations étant de faible amplitude, on suppose  $h_0 \ll 1/k$ .
- ✗  $H$  est la profondeur moyenne : L'altitude du fond est donc égale à  $-H$ .
- ✗ On introduit la surpression dans l'eau :  $p(x, z, t) = P(x, z, t) - P_0 + \rho g z$ , la différence entre la pression dans l'eau et sa valeur statique en l'absence de houle ( $P_0$  étant la pression atmosphérique).
- ✗ On note  $p_0$  la valeur maximale de la surpression pour  $z = 0$ .
- ✗ On note  $\underline{v}_z(x, z, t) = \underline{v}_z(z)e^{j(\omega t - kx)}$ ;  $\underline{v}_z(x, z, t) = \underline{v}_z(z)e^{j(\omega t - kx)}$  et  $\underline{p}(x, z, t) = \underline{p}(z)e^{j(\omega t - kx)}$  les représentations complexes de  $v_x(x, z, t)$ ;  $v_z(x, z, t)$  et  $p(x, z, t)$ .

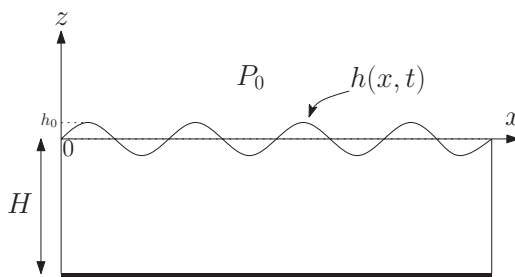


FIGURE 21

1. Justifier la forme donnée aux représentations complexes de  $v_x(x, z, t)$ ;  $v_z(x, z, t)$  et  $p(x, z, t)$ . Quelles relations a-t-on entre la célérité  $c$  des ondes de houle,  $\omega$ ,  $k$  et la longueur d'onde  $\lambda$ ?
2. En tenant compte des hypothèses simplificatrices, écrire les trois équations aux dérivées partielles linéaires liant  $v_x(x, z, t)$ ;  $v_z(x, z, t)$  et  $p(x, z, t)$ . En déduire les équations vérifiées par  $\underline{v}_x(z)$ ;  $\underline{v}_z(z)$  et  $\underline{p}(z)$ .
3. En introduisant les conditions limites, déterminer les fonctions  $v_x(x, z, t)$ ;  $v_z(x, z, t)$  et  $p(x, z, t)$ . On les exprimera en fonction de  $p_0$ . Quelles sont les équations  $(X(t), Z(t))$  de la trajectoire de la particule fluide dont la position moyenne est  $(X_0, Z_0)$ ?
4. Houle en eau profonde.
  - (a) A condition la profondeur peut-elle être considérée comme infinie? Dans cette hypothèse, quelles sont les expressions de  $v_x(x, z, t)$ ;  $v_z(x, z, t)$  et  $p(x, z, t)$ ? Quelle est la nature des trajectoires des particules fluides?
  - (b) En déduire une expression de l'équation de la surface libre  $h(x, t)$  puis une première relation entre  $h_0$  et  $p_0$ .
  - (c) Quelle est l'expression de la surpression au niveau de la surface libre? En supposant toujours que  $\lambda \gg h_0$ , déterminer une seconde relation entre  $h_0$  et  $p_0$ . En déduire la relation de dispersion reliant  $\omega$  et  $k$ . En déduire la célérité en fonction de  $\omega$ .
  - (d) AN : la fréquence est de 0.2 Hz. Quelle est la distance entre deux crêtes? Préciser le critère « profondeur infinie ».
5. Houle en faible profondeur.
  - (a) On considère maintenant la situation où la longueur d'onde est très grande devant la profondeur  $H$  et où l'amplitude  $h_0$  des ondes de houle est très petite devant  $H$ . Déterminer la relation de dispersion liant  $\omega$  et  $k$ . En déduire la célérité  $c$ .
  - (b) AN : la fréquence est de 0.2 Hz et la profondeur est de 1 m. Calculer la célérité; l'hypothèse « eau peu profonde » est-elle correcte?
  - (c) Expliquer qualitativement, pourquoi les vagues se brisent à l'approche du rivage.

## 4 DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS



FIGURE 22 – Planche de Kite avec foil. Expliquer le principe

### 4.1 Différents régimes d'écoulement dans une conduite

Les figures présentées ci-dessous, représentent différents régimes d'écoulement d'eau dans une conduite de rayon  $R = 1$  cm. Ces régimes d'écoulement sont visualisés grâce à un colorant injecté sur l'axe de la conduite.

1. Classer ces images par ordre croissant de nombre de Reynolds. Dans quel(s) cas a-t-on un régime d'écoulement laminaire, intermédiaire ou turbulent ?
2. Donner un ordre de grandeur de la vitesse dans le cas d'un écoulement laminaire et d'un écoulement turbulent.

Donnée : Viscosité de l'eau :  $\eta = 10^{-3}$  Pa



FIGURE 23

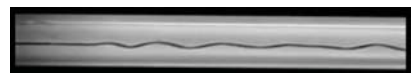


FIGURE 24

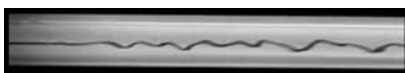


FIGURE 25



FIGURE 26



FIGURE 27



FIGURE 28

### 4.2 Écoulement autour d'une sphère

Classer les figures ci-dessous par nombre de Reynolds croissants et commenter.

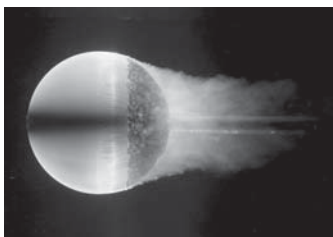


FIGURE 29

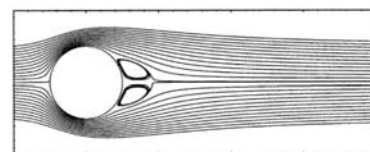


FIGURE 30

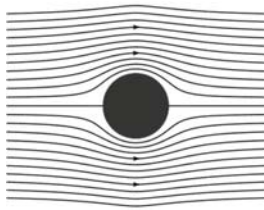


FIGURE 31

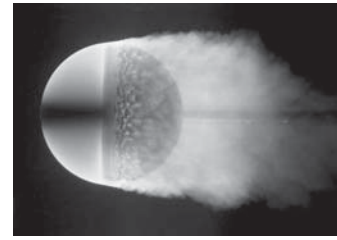


FIGURE 32



FIGURE 33

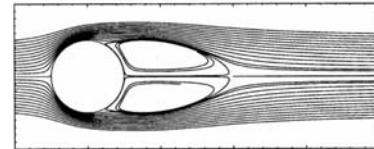


FIGURE 34

### 4.3 Recherche documentaire : estimation du nombre de Reynolds

En effectuant une recherche documentaire, déterminer l'ordre de grandeur de la distance caractéristique, de la vitesse et du nombre de Reynolds, dans les exemples ci-dessous :

- ✗ une voiture roulant sur l'autoroute,
- ✗ un sous marin en mer,
- ✗ un paquebot en mer,
- ✗ un nageur dans de l'eau,
- ✗ un nageur dans du sirop,
- ✗ un avion de modélisme,
- ✗ un avion léger,
- ✗ un avion de ligne,
- ✗ une guêpe,
- ✗ une graine de pollen dans l'air.

### 4.4 Ordre de grandeur de l'épaisseur d'une couche limite laminaire

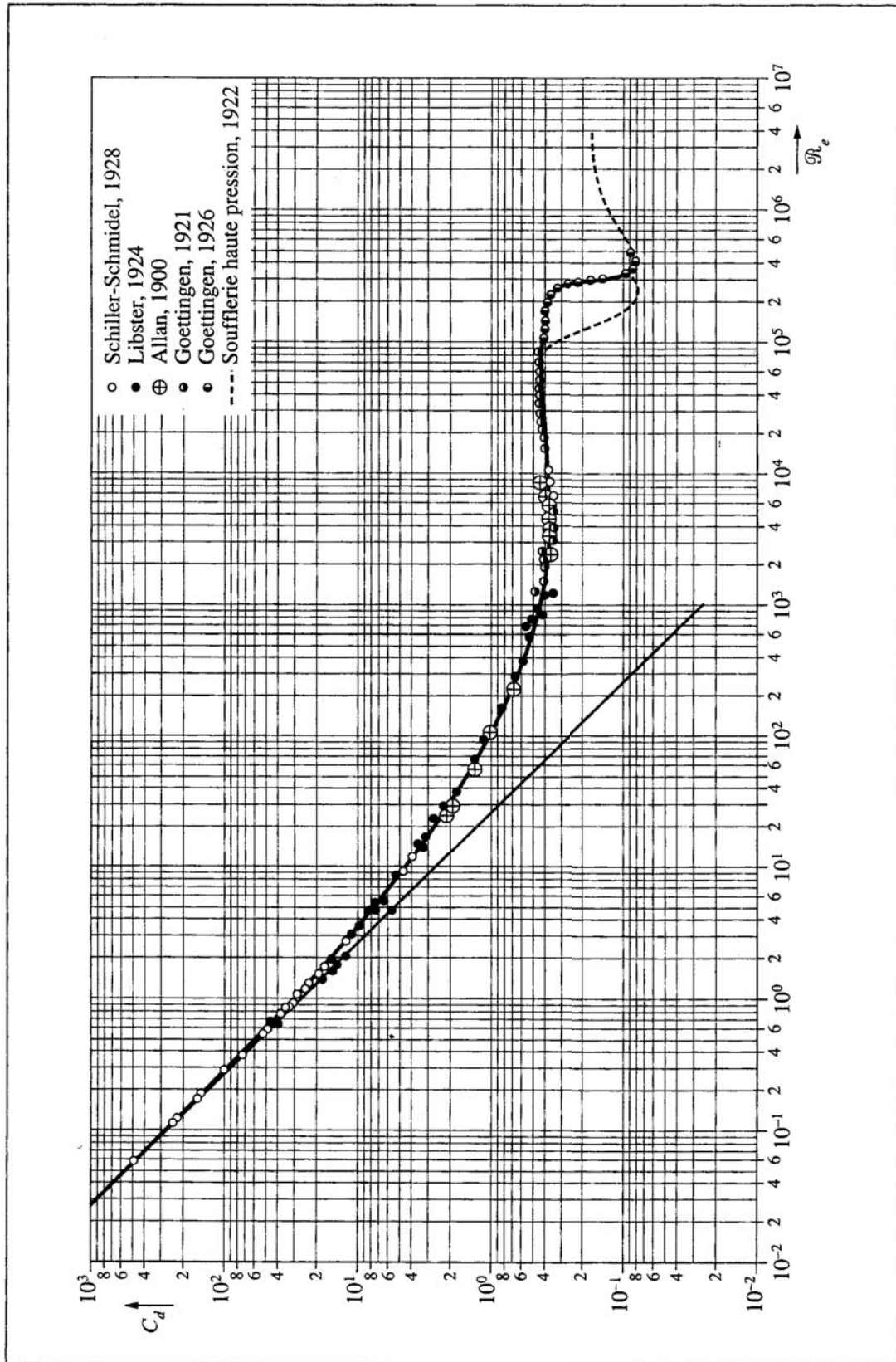
1. Soit un obstacle de longueur caractéristique  $L$  se déplaçant à la vitesse  $V$  dans un fluide de viscosité cinématique  $\nu$ . Déterminer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  en supposant que celle-ci soit laminaire.
2. Déterminer  $\delta$  pour :
  - ✗ une voiture se déplaçant dans l'air à 100 km/h,
  - ✗ une planche à voile se déplaçant dans l'eau à 20 km/h,
  - ✗ une olive tombant dans de l'huile d'olive à la vitesse de 1 cm/s.

Conclure.

Données  $\nu_{\text{air}} = 15.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\nu_{\text{eau}} = 1.00 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\nu_{\text{huile d'olive}} = 90 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 4.5 Vitesse limite d'un ballon de foot

En vous aidant du graphe donné figure 35, déterminer la vitesse limite atteinte par un ballon de foot en chute libre dans l'air. Viscosité dynamique de l'air :  $1.7 \times 10^{-5} \text{ Pl}$ . Diamètre d'un ballon de foot : 23 cm. Masse d'un ballon de foot : 450 g.



**Fig. 4 :** Coefficient de traînée  $C_d$  d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ . Pour les faibles valeurs de ce nombre,  $C_x = 24/Re$  (formule de Stokes) expression représentée par la droite de pente  $-1$  sur le graphe.

FIGURE 35

## 4.6 Force de viscosité

On étudie un écoulement visqueux dont le champ des vitesses est :

$$\vec{V}(z, t) = V_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{e}_x$$

l'axe ( $Ox$ ) étant horizontal.

1. Calculer la densité volumique des forces de viscosité et l'accélération.
2. En déduire une relation entre  $\omega$ ,  $k$  et la viscosité cinématique  $\nu$  en supposant qu'il n'y a pas de gradient de pression horizontal.

## 4.7 Miel sur une tartine

On étale du miel sur une tartine horizontale à l'aide d'un couteau assimilé à une plaque en mouvement à vitesse constante  $\vec{V}$ . On suppose que le miel est un fluide incompressible et newtonien.

1. Déterminer le débit volumique du miel.
2. Calculer la force nécessaire pour faire avancer le couteau.
3. La tartine, recouverte d'une couche de miel de 2 mm, est maintenant inclinée d'un angle  $\alpha = 30^\circ$ . Déterminer le débit volumique dans la couche de miel.

Données : Viscosité dynamique du miel : 10 Pl. Masse volumique du miel :  $1.422 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ .

## 4.8 Calcul de la traînée sur une balle de tennis

Calculer la traînée s'exerçant sur une balle de tennis allant à  $V = 200 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , de rayon  $R = 3.3 \text{ cm}$  et de masse  $m = 58 \text{ g}$ . Données

- ✗ Viscosité de l'air :  $\eta_{air} = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .
- ✗ Masse volumique de l'air :  $\rho_{air} = 1.23 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .
- ✗ Différentes formules permettant de déterminer le coefficient de traînée  $C_D$  en fonction du nombre de Reynolds  $R_e$  pour différentes valeurs de  $R_e$  (dont certaines sont empiriques) :

$$\text{— } 0 < R_e \ll 1 : C_D = \frac{24}{R_e} \text{ Formule de Stokes.}$$

$$\text{— } R_e < 5 : C_D = \frac{24}{R_e} \left(1 + \frac{3}{16} R_e\right) \text{ Formule de Oseen-Lamb.}$$

$$\text{— } 5 < R_e < 800 : C_D = \frac{24}{R_e} \left(1 + 0.15 R_e^{0.687}\right) \text{ Formule de Schiller- Naumann}$$

$$\text{— } 800 < R_e < 400000 : C_D = \frac{24}{R_e} + \frac{6}{1 + \sqrt{R_e}} + 0.4 \text{ Formule de White}$$

## 4.9 Viscosimètre de Poiseuille

Le dispositif de la figure 36 représente un viscosimètre de Poiseuille.

Le liquide dont on veut déterminer la viscosité est placé dans un réservoir ( $R$ ) et s'écoule à travers un tube capillaire de longueur  $L$  et de rayon  $r \ll R$  branché sur le bas du réservoir. On mesure alors le temps  $\tau$  de descente du fluide entre deux niveaux d'altitudes  $h_1$  et  $h_2$  ( $h_2 < h_1$ ).

1. Montrer que la connaissance de  $R$ ,  $r$ ,  $L$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  et  $\tau$  permet effectivement de déterminer la viscosité du fluide.
2. Proposer des ordres de grandeurs permettant de déterminer la viscosité de l'eau grâce à ce dispositif.



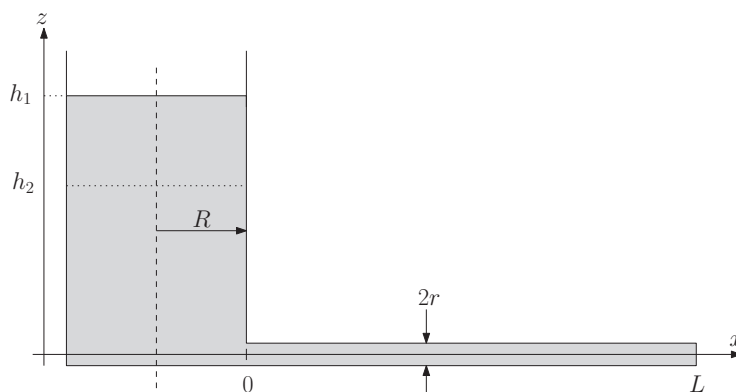


FIGURE 36 – Viscosimètre de Poiseuille

#### 4.10 Formule de Stokes

Pour des faibles vitesses, en régime linéaire et permanent, le champ des vitesses autour d'un fluide incompressible a pour expression, en coordonnées sphériques :

$$v_r = v_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right)$$

$$v_\theta = v_\infty \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right)$$

1. Vérifier que ce champ est solution de l'équation locale linéarisée, et respecte les conditions limites.
2. Déterminer les forces de pression et de cisaillement sur les parois de la sphère. En déduire la force s'exerçant sur la sphère. On négligera les effets de la pesanteur.

#### 4.11 Écoulement de Couette cylindrique

Un fluide incompressible, de masse volumique  $\mu$ , de viscosité dynamique  $\eta$ , se trouve dans l'interstice entre deux longs cylindres coaxiaux ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ . Le cylindre extérieur ( $C_2$ ) est immobile ; le cylindre intérieur ( $C_1$ ) est en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire  $\Omega$ . On se place en régime établi et on suppose que l'écoulement est laminaire.

Déterminer le couple qu'il faut exercer sur le cylindre ( $C_2$ ) pour qu'il reste immobile.

On supposera que  $R_2 \gg R_1$  et on négligera les effets de la pesanteur.

#### 4.12 Sphère en rotation dans un fluide visqueux

On considère une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$ , en rotation autour de son axe de diamètre  $\Delta = (Oz)$ , à la vitesse angulaire constante  $\Omega$  dans un fluide visqueux incompressible, de masse volumique  $\mu$  et de viscosité dynamique  $\eta$ , occupant tout l'espace autour de la sphère.

- ✘ Déterminer le champ des vitesses dans le fluide en supposant l'écoulement rampant.
- ✘ En déduire le moment des forces de frottement agissant sur la sphère.