

Ondes acoustiques dans les fluides



Figure 1 – Billes de polystyrène en lévitation dans une onde stationnaire ultrasonore

1 Approximation acoustique

1.1 Onde acoustique

1.1.1 Mise en évidence

Le haut-parleur est un générateur d'ondes mécaniques de compression appelées ondes acoustiques. Ceci peut être mis en évidence en disposant des billes de polystyrène sur la membrane du haut-parleur : lorsque le haut parleur est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de fréquence de l'ordre d'une centaine de Hertz, les billes de polystyrène « sautent » à la surface de la membrane.

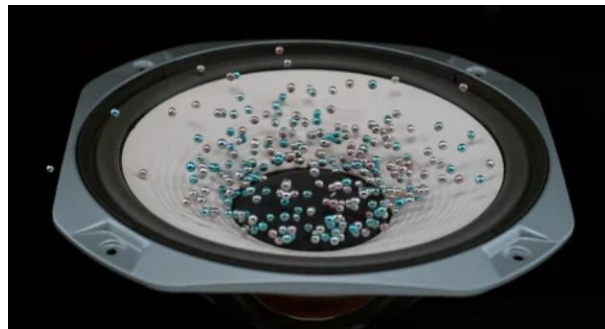


Figure 2 – Billes sur un haut parleur en fonctionnement

Explication qualitative : Les particules fluides au contact de la membrane sont comprimées puis dilatées à cause du mouvement de la membrane. Leur masse volumique μ varie donc et, en modélisant ces compressions et détentes par des transformations adiabatiques et réversibles d'un gaz parfait, on en déduit que la pression P varie également :

$$P \propto \mu^\gamma$$

Cette modification locale de la pression met en mouvement les particules fluides voisines et cette mise en mouvement entraîne à nouveau des variations de masse volumique et de pression sur les particules fluides au contact et ainsi de suite : les vibrations de la membrane engendrent ainsi une onde mécanique de compression (onde longitudinale) appelée onde acoustique.

1.1.2 Propriétés des ondes acoustiques

- ✕ Ce sont des ondes mécaniques : la présence d'un milieu matériel est obligatoire pour la propagation de ces ondes.
- ✕ La propagation des ondes acoustiques est le résultat du couplage entre deux grandeurs locales : la surpression locale $P_1(M, t)$ et la survitesse locale $\vec{V}_1(M, t)$.
- ✕ Outre ces deux grandeurs, d'autres champs varient au passage d'une onde acoustique : des grandeurs mécaniques comme le déplacement, l'accélération mais aussi des grandeurs thermodynamiques comme la température et la masse volumique.
- ✕ Dans les solides, il existe deux types d'ondes mécaniques : les ondes de compression¹ (que l'on peut appeler par analogie ondes acoustiques) et les ondes de cisaillement.

1.2 Approximation acoustique

- ✕ On considère un fluide au repos (pression P_0 , masse volumique μ_0 et vitesse moyenne $\langle \vec{V} \rangle = \vec{0}$).
- ✕ Lors du passage d'une onde acoustique, ces grandeurs varient peu :
 - ☛ $P(M, t) = P_0 + P_1(M, t)$ avec $|P_1(M, t)| \ll P_0$
 - ☛ $\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$ avec $|\mu_1(M, t)| \ll \mu_0$
 - ☛ $\langle \vec{V} \rangle = \vec{V}_1(M, t) \neq \vec{0}$ avec $\|\vec{V}_1(M, t)\| \ll c$ où c est la célérité des ondes acoustiques dans le milieu.
 - ☛ Le coefficient de compressibilité (isentropique ou isotherme) est considéré comme constant au passage de l'onde :

$$\chi_0 = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)} = \mathcal{C}$$

D'où :

$$\chi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \quad (1)$$

- ✕ Ainsi, l'approximation acoustique consiste à considérer qu'au passage d'une onde acoustique, les grandeurs mécaniques et thermodynamiques varient peu par rapport à leurs valeurs en l'absence d'onde.
- ✕ Ordre de grandeur pour la surpression : $P_1 = 0.01$ Pa pour une personne qui parle à 1m

1. Voir OD1

1.3 Équation de d'Alembert 1D (Approche lagrangienne)

- ✕ On considère une onde acoustique se propageant dans un tube de courant de section constante S . Le système est unidirectionnel : les différentes grandeurs étudiées ne dépendent que de x et de t :

- $P(M, t) = P(x, t) = P_0 + P_1(x, t)$ avec $|P_1(x, t)| \ll P_0$
- $\mu(M, t) = \mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$ avec $|\mu_1(x, t)| \ll \mu_0$
- $\langle \vec{V} \rangle = \vec{V}_1(M, t) = \vec{V}_1(x, t) = V_1(x, t) \vec{e}_x$ avec $\|\vec{V}_1(M, t)\| \ll c$

- ✕ Soit une méso-tranche comprise entre x et $x + dx$ à l'équilibre. Au passage de l'onde acoustique les limites de la méso-tranche deviennent $x + \xi(x, t)$ et $x + dx + \xi(x + dx, t)$ comme représenté figure 3.

- ✕ La dilatation de la méso-tranche est par définition :

$$\delta = \frac{\delta(d\tau)}{d\tau}$$

Où $d\tau = Sdx$ est le volume de la méso-tranche en l'absence d'onde acoustique et où $\delta(d\tau)$ est la variation de ce volume au passage de l'onde acoustique.

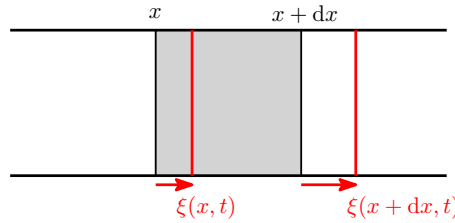


Figure 3 – Approche mésoscopique (Lagrangienne) 1D

D'après la figure 3, on a :

$$\delta = \frac{(\xi(x + dx, t) - \xi(x, t)) S}{Sdx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

La dilatation est reliée au coefficient de compression :

$$\chi_0 = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{d\tau} \frac{\delta(d\tau)}{P_1} = -\frac{\delta}{P_1}$$

D'où :

$$P_1 = -\frac{1}{\chi_0} \delta = -\frac{1}{\chi_0} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- ✕ Le BAM agissant sur la méso-tranche donne :

- $P(x, t) S \vec{e}_x$: force pressantes en x à l'instant t
- $-P(x + dx, t) S \vec{e}_x$: force pressantes en $x + dx$ à l'instant t

- ✕ Le TRC appliqué à la méso-tranche, de masse $dm = \mu Sdx \approx \mu_0 Sdx$ donne :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (P(x, t) - P(x + dx, t)) S$$

2. Approximation acoustique : on ne garde que les termes d'ordre 1, en l'occurrence ici l'accélération de la méso-tranche

Soit :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

D'où, sachant que $P_1 = -\frac{1}{\chi_0} \frac{\partial \xi}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

On retrouve bien l'équation de d'Alembert avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}$$

1.4 Equation de d'Alembert 1D (approche Eulérienne)

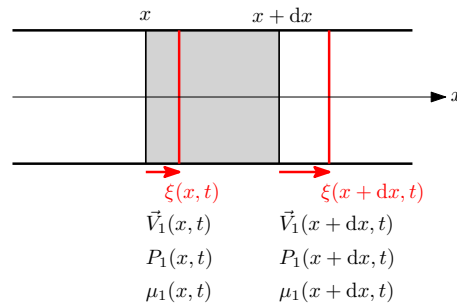


Figure 4 – Approche Eulérienne 1D

✕ À 1D les différentes grandeurs étudiées ne dépendent que de x et de t :

- ☛ $P(M, t) = P(x, t) = P_0 + P_1(x, t)$ avec $|P_1(x, t)| \ll P_0$
- ☛ $\mu(M, t) = \mu(x, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$ avec $|\mu_1(x, t)| \ll \mu_0$
- ☛ $\langle \vec{V} \rangle = \vec{V}_1(M, t) = V_1(x, t) \vec{e}_x$ avec $\|\vec{V}_1(M, t)\| \ll c$

✕ Dans l'approche eulérienne à 1D, on utilise les équations locales :

- ☛ Équation d'Euler (écoulement parfait sans autre force que les forces de pression) :

$$\mu \frac{\partial V_1}{\partial t} + \mu V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}$$

- ☛ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial (\mu V_1)}{\partial x} = 0$$

- ☛ Coefficient χ_0 :

$$\chi_0 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)}$$

✕ Dans le cadre de l'approximation acoustique, on linéarise ces équations (on ne garde que les termes d'ordre 1) :

- ☛ Équation d'Euler :

$$\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

- ☛ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0$$

- ☛ Coefficient χ_0 (voir équation 1) :

$$\chi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \Rightarrow \mu_1 = \chi_0 \mu_0 P_1$$

✕ D'où :

- ☛ Équation d'Euler :

$$\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (2)$$

- ☛ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_0} \frac{\partial V_1}{\partial x} \quad (3)$$

Notons que les équations 2 et 3 sont les équations de couplages (1D)

✕ En combinant simplement ces deux équations de couplage, on obtient les équations différentielles vérifiées par P_1 et V_1 :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$$

On reconnaît bien l'équation de d'Alembert.

1.5 Equation de d'Alembert 3D (Approche Eulérienne)

✕ Dans l'approche eulérienne, on utilise les équations locales :

- ☛ Équation d'Euler (écoulement parfait sans autre force que les forces de pression) :

$$\mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mu (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = - \text{grad} P$$

- ☛ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div} (\mu \vec{V}) = 0$$

- ☛ Coefficient χ_0 :

$$\chi_0 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)}$$

- ✕ Dans le cadre de l'approximation acoustique, on linéarise ces équations (on ne garde que les termes d'ordre 1) :

- ☛ Équation d'Euler (écoulement parfait sans autre force que les forces de pression) :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P_1$$

- ☛ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{V}_1) = 0$$

- ☛ Coefficient χ_0 (d'après l'équation 1) :

$$\chi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \Rightarrow \mu_1 = \chi_0 \mu_0 P_1$$

- ✕ D'où :

- ☛ Équation d'Euler :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P_1 \quad (4)$$

- ☛ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \text{div}(\vec{V}_1) \quad (5)$$

Les équations 4 et 5 sont les équations de couplage (3D)

- ✕ Équation différentielle vérifiée par V_1

- ☛ Équation d'Euler dérivée par rapport au temps :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

- ☛ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \text{div}(\vec{V}_1)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{V}_1) = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \Delta \vec{V}_1$$

(Car $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}_1 = \vec{0}$, d'après l'équation d'Euler)

- ✕ Équation différentielle vérifiée par P_1

- ☛ Divergence de l'équation d'Euler :

$$\mu_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \right) = -\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} P_1 = -\Delta P_1$$

- ☛ Équation de conservation de la masse :

$$\text{div}(\vec{V}_1) = \chi_0 \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \Delta P_1$$

1.6 Célérité des ondes acoustiques

✕ La célérité des ondes acoustiques dans les fluides s'exprime comme suit :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}$$

✕ Dans le cas d'un gaz assimilé à un gaz parfait, on a :

☛ Masse volumique :

$$\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$$

☛ Coefficient de compressibilité isotherme :

$$PV = \mathcal{C} \Rightarrow \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow \chi_T = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = \frac{1}{P}$$

D'où :

$$\chi_{0,T} = \frac{1}{P_0}$$

☛ Coefficient de compressibilité isentropique :

$$PV^\gamma = \mathcal{C} \Rightarrow \gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \Rightarrow \chi_S = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = \frac{1}{\gamma P}$$

D'où :

$$\chi_{0,S} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

✕ On en déduit la célérité des ondes acoustiques dans les gaz :

☛ Pour une évolution isentropique (la grande majorité des cas et le cas à prendre par défaut)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_{0,S}}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

☛ Pour une évolution isotherme

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_{0,T}}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}$$

✕ La compressibilité des liquides étant très faible devant celle des gaz, on retiendra que la célérité des ondes acoustiques dans les liquides est systématiquement supérieure à celle que l'on trouve dans les gaz. Enfin, cette célérité peut être comparée à celles des ondes de compression dans les solides (OD1), en effet, il s'agit également d'ondes acoustiques.

milieu	vitesse du son (m . s ⁻¹)
gaz	
dioxygène	317
air	331
diazote	339
dihydrogène	1 270
liquides	
eau	1 500
mercure	1 450
solides	
plomb	1 230
cuivre	3 750
fer	5 130
granit	6 000

Figure 5 – Exemples de célérités à 0 °C

2 Onde plane progressive - impédance acoustique

Rappelons tout d'abord que les impédances caractéristiques se déterminent à partir des équations de couplage. Dans le cas des ondes acoustiques (1D), elles sont de la forme :

$$\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_0} \frac{\partial V_1}{\partial x}$$

2.1 OPP(+)

- ✕ L'impédance caractéristique (ou impédance acoustique) est le rapport entre $V_1(x, t)$ et $P_1(x, t)$ dans le cas d'une OPP(+) :

$$Z_c = \left. \frac{P_1(x, t)}{V_1(x, t)} \right)_{OPP(+)}$$

- ✕ Dans le cas d'une OPP(+), on peut écrire :

$$P_1(x, t) = f(t - x/c) = f(u)$$

Avec $u = t - x/c$

Alors , l'équation de couplage 3, permet d'écrire :

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} = + \frac{1}{\mu_0 c} \frac{df}{du}$$

D'où :

$$V_1(x, t) = -\sqrt{\frac{\chi_0}{\mu_0}} f(t - x/c)$$

Et donc :

$$Z_c = \left. \frac{P_1(x, t)}{V_1(x, t)} \right)_{OPPM(+)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_0}} = \mu_0 c$$

2.2 OPPM(+)

- ✕ Notons que l'on peut également trouver Z_c directement à partir d'une OPPM(+).
- ✕ L'impédance caractéristique est alors le rapport entre $\underline{P}_1(x, t)$ et $\underline{V}_1(x, t)$ dans le cas d'une OPPM(+) :

$$\underline{Z}_c = \left. \frac{\underline{P}_1(x, t)}{\underline{V}_1(x, t)} \right)_{OPPM(+)}$$

- ✕ Dans le cas d'une OPPM(+), on peut écrire :

$$\underline{P}_1(x, t) = P_0 \exp^{j(\omega t - kx)}$$

Alors , l'équation de couplage 3, permet d'écrire :

$$\frac{\partial \underline{V}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{P}_1}{\partial x}$$

D'où :

$$j\omega \underline{V}_1(x, t) = jk \frac{1}{\mu_0} \underline{P}_1(x, t)$$

Et donc :

$$\underline{Z}_c = \left. \frac{\underline{P}_1(x, t)}{\underline{V}_1(x, t)} \right)_{OPPM(+)} = \frac{\omega \mu_0}{k} = \mu_0 c$$

2.3 Ordre de grandeur

- ✕ La notion d'impédance acoustique est une notion très importante en acoustique, elle permet en effet de prévoir les coefficients de réflexion et de transmission des ondes sonores, infrasonores et ultrasonores. Elle intervient donc dans le domaine de la médecine (échographie), la construction (isolation phonique), le monde du spectacle ...
- ✕ On retiendra les ordres de grandeur suivants :

$$Z_{\text{solides}} > Z_{\text{liquides}} \gg Z_{\text{gaz}}$$

- ✕ Pour calculer l'impédance acoustique des gaz, on peut utiliser le modèle des gaz parfaits :

☛ Pour une évolution adiabatique réversible :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_{0,S}}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0^2 M}{RT_0}}$$

☛ Pour une évolution adiabatique isotherme :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_{0,T}}} = \sqrt{\frac{P_0^2 M}{RT_0}}$$

✕ Tableau d'ordres de grandeur :

Milieu	$c(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$Z_c(\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\text{s}^{-1})$
Air	≈ 340	≈ 430
Eau	1.48×10^3	1.48×10^6
Sang	1.58×10^3	1.61×10^6
Mercure	1.45×10^3	19.58×10^6
Tissus mous ³	1.54×10^3	1.63×10^6
Os	$3 - 4 \times 10^3$	$3.8 - 7.8 \times 10^6$
Bois	$1.0 - 5.0 \times 10^3$	2.5×10^6
Plexiglass	2.68×10^3	4.0×10^6
Verre	5.7×10^3	8.6×10^6
Béton	3.1×10^3	8.0×10^6
Acier	5.6×10^3	40×10^6
Tungstène	4.8×10^3	92×10^6

3 Approche énergétique

3.1 Énergie mécanique volumique

✕ L'énergie cinétique dE_c d'un élément de volume mésoscopique est :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm (V_1)^2 = \frac{1}{2} \mu_0 d\tau (V_1)^2$$

D'où l'expression de la densité d'énergie cinétique :

$$e_c = \frac{dE_c}{d\tau} = \frac{1}{2} \mu_0 (V_1)^2$$

✕ L'énergie potentielle acquise par l'élément mésoscopique au passage de l'onde acoustique (son volume passe de $d\tau$ à $d\tau + \delta(d\tau)$ et sa pression $P_1(t)$ passe de P_0 à $P_0 + P_1$) s'exprime en considérant la définition opérationnelle de l'énergie potentielle :

$$dE_p = W_{op} = - \int P_{ext} d(d\tau) = - \int_{d\tau}^{d\tau + \delta(d\tau)} (P_0 + P_1(t)) d(d\tau)$$

Sachant que :

$$\chi_0 = - \frac{1}{d\tau} \frac{d(d\tau)}{dP_1}$$

On déduit :

$$dE_p = \chi_0 d\tau \int_0^{P_1} (P_0 + P_1(t)) dP_1 = \chi_0 d\tau \left(P_0 P_1 + \frac{1}{2} P_1^2 \right)$$

- ✕ En ne gardant que le terme quadratique de valeur moyenne non nulle, on obtient la densité d'énergie potentielle :

$$e_p = \frac{dE_p}{d\tau} = \frac{1}{2}\chi_0 (P_1)^2$$

- ✕ Ainsi, l'énergie mécanique volumique de l'onde :

$$e = \frac{1}{2}\chi_0 (P_1)^2 + \frac{1}{2}\mu_0 (V_1)^2 \quad (6)$$

3.2 Vecteur de Poynting acoustique

- ✕ Le vecteur de Poynting - ou vecteur densité de courant d'énergie acoustique - est un vecteur densité de courant dont le débit à travers une surface S doit donner la puissance de l'onde acoustique traversant cette surface :

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{V}_1 \cdot d\vec{F} = \iint_S (P_0 + P_1) \vec{V}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\Pi}_a \cdot d\vec{S}$$

- ✕ D'où, par identification et en ne gardant que le terme quadratique à valeur moyenne non nulle :

$$\vec{\Pi}_a = P_1 \vec{V}_1$$

3.3 Intensité sonore

- ✕ Par définition, l'intensité sonore est égale au flux moyen du vecteur de Poynting acoustique perpendiculairement à une surface unité : elle est donc égale à la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting :

$$I = \|\langle \vec{\Pi}_a \rangle\|$$

- ✕ L'oreille étant un récepteur logarithmique⁴, on utilise plutôt la notion d'intensité acoustique, exprimée en décibels (dB) :

$$I_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

I_0 correspondant au seuil audible à la fréquence de 4000 Hz :

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

- ✕ Échelle acoustique :

4. Quand l'intensité sonore est multipliée par 10, l'oreille ne perçoit qu'un doublement de volume

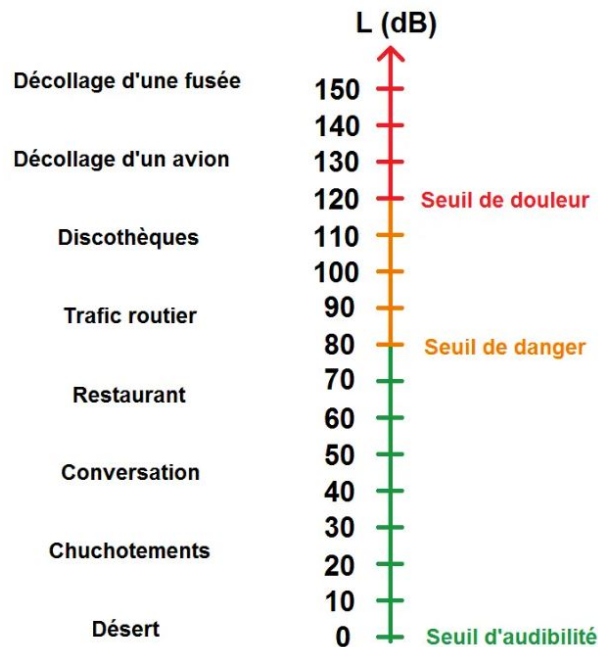


Figure 6

3.4 Équation de conservation de l'énergie mécanique

3.4.1 Équation de conservation 1D

✕ Calculons la divergence de $\vec{\Pi}_a$:

$$\text{div}(\vec{\Pi}_a) = \frac{\partial}{\partial x} (P_1 V_1) = \frac{\partial P_1}{\partial x} V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x} P_1$$

✕ On utilise ensuite les équations de couplage (1D) (équations 2 et 3)

$$\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_0} \frac{\partial V_1}{\partial x}$$

D'où :

$$\text{div}(\vec{\Pi}_a) = -\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} V_1 - \chi_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} P_1$$

$$\text{div}(\vec{\Pi}_a) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_0 (P_1)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (V_1)^2 \right)$$

D'où l'équation de conservation de l'énergie mécanique :

$$\text{div}(\vec{\Pi}_a) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

3.4.2 Equation de conservation 3D

✕ Calculons la divergence de $\vec{\Pi}_a$:

$$\text{div}(\vec{\Pi}_a) = \vec{\nabla} \cdot (P_1 \vec{V}_1) = P_1 \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}_1) + (\vec{\nabla} P_1) \cdot \vec{V}_1 = \overrightarrow{\text{grad}} P_1 \cdot \vec{V}_1 + P_1 \text{div} \vec{V}_1$$

✕ On utilise ensuite les équations de couplage (3D) (équations 4 et 5)

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P_1$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \text{div}(\vec{V}_1)$$

D'où :

$$\text{div}(\vec{\Pi}_a) = -\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} V_1 - \chi_0 \frac{\partial P_1}{\partial t} P_1$$

$$\text{div}(\vec{\Pi}_a) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_0 (P_1)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (V_1)^2 \right)$$

D'où l'équation de conservation de l'énergie mécanique :

$$\text{div}(\vec{\Pi}_a) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

4 Influence de la viscosité

4.1 Equation de propagation

✕ Dans l'approche eulérienne, on utilise les équations locales dans lesquelles on tient compte des forces de viscosité :

☛ Équation de Navier-Stokes :

$$\mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mu (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{V}_1$$

Avec η la viscosité dynamique et ν la viscosité cinématique.

☛ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{V}) = 0$$

☛ Coefficient χ_0 :

$$\chi_0 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{(T \text{ ou } S)}$$

✕ Dans le cadre de l'approximation acoustique, on linéarise ces équations (on ne garde que les termes d'ordre 1) :

☛ Équation de Navier-Stokes :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P_1 + \eta \Delta \vec{V}_1$$

- ☛ Équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div}(\vec{V}_1) = 0$$

- ☛ Coefficient χ_0 :

$$\chi_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \Rightarrow \mu_1 = \chi_0 \mu_0 P_1$$

- ✕ D'où :

- ☛ Équation de Navier-Stokes :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} P_1 + \eta \Delta \vec{V}_1$$

- ☛ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \operatorname{div}(\vec{V}_1)$$

- ✕ Équation différentielle vérifiée par V_1

- ☛ Équation d'Euler dérivée par rapport au temps :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \eta \Delta \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t}$$

- ☛ Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_0} \operatorname{div}(\vec{V}_1)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{V}_1) + \nu \Delta \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \Delta \vec{V}_1 + \nu \Delta \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \end{aligned}$$

(En supposant que $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_1 = \vec{0}$)

- ✕ Équation différentielle vérifiée par P_1

- ☛ Divergence de l'équation d'Euler :

$$\mu_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \right) = -\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} P_1 = -\Delta P_1 + \eta \operatorname{div} \Delta \vec{V}_1$$

- ☛ Équation de conservation de la masse :

$$\operatorname{div}(\vec{V}_1) = \chi_0 \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \Delta P_1 + \nu \Delta \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} \right)$$

4.2 Relation de dispersion

- ✕ Considérons une pseudo-OPPM(+) se propageant dans le fluide précédent :

$$\underline{P}_1(M, t) = P_0 \exp^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r})}$$

- ✕ En injectant $\underline{P}_1$ dans l'équation de propagation précédente, on obtient :

$$-\omega^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} (-\underline{k}^2) + \nu(j\omega)(-\underline{k}^2)$$

Soit :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$$

où : $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_0}$ et $\omega_c = c^2/\nu$

- ✕ On obtient ainsi deux domaines de propagation :
- ☛ Si $\omega \ll \omega_c$, la viscosité n'a pas d'effet, on obtient $k = \omega/c$ (propagation sans absorption ni dispersion).
 - ☛ Si $\omega \gg \omega_c$, la relation de dispersion devient :

$$\underline{k}^2 = -j \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_c}{\omega} = -j \frac{\omega \omega_c}{c^2} = -j \frac{\omega}{\nu}$$

On est dans le domaine où l'effet de peau prédomine : on a propagation avec absorption et dispersion, la distance caractéristique d'atténuation s'écrivant :

$$\delta = \frac{1}{|k''|} = c \sqrt{\frac{2}{\omega \omega_c}} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

5 Réflexion et transmission d'une OPPM(+) sous incidence normale

5.1 Position du problème

On considère une OPPM(+) ⁵, de pulsation ω , se propageant dans un milieu d'impédance caractéristique $\underline{Z}_1$ et arrivant dans un milieu d'impédance caractéristique $\underline{Z}_2$, l'interface entre les deux milieux se situant en $x = 0$.

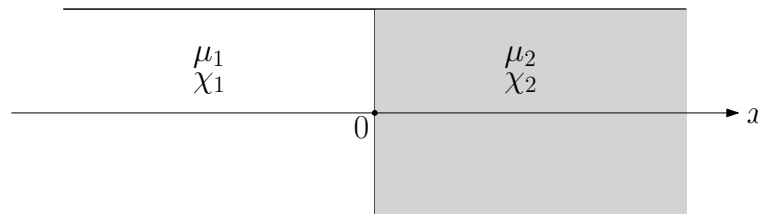


Figure 7

5. La démonstration peut être faite en considérant une OPP(+)

5.2 Amplitudes complexes

✕ Onde incidente :

$$\underline{V}_{1i}(x, t) = V_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

$$\underline{P}_{1i}(x, t) = \underline{Z}_1 V_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

$$\text{Avec } \omega = k_1 c_1 \text{ et } c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \chi_1}}.$$

✕ Onde réfléchi :

$$\underline{V}_{1r}(x, t) = \underline{r}_V V_0 e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

$$\underline{P}_{1r}(x, t) = \underline{r}_P \underline{Z}_1 V_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} = -\underline{Z}_1 \underline{r}_V V_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \Rightarrow \underline{r}_V = -\underline{r}_P$$

✕ Onde transmise :

$$\underline{V}_{1t}(x, t) = \underline{t}_V V_0 e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

$$\underline{P}_{1t}(x, t) = \underline{t}_P \underline{Z}_1 V_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} = \underline{Z}_2 \underline{t}_V V_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \Rightarrow \underline{t}_V = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \underline{t}_P$$

5.3 Continuités en $x = 0$

5.3.1 Continuité de la pression

Comme pour toutes les ondes mécaniques (OD1), on a continuité de la pression en l'absence d'interface massique. Dans le cas contraire, il faut appliquer le TRC à un élément de surface de l'interface pour déterminer la relation entre les pressions en amont et en aval de la discontinuité.

Continuité de la pression :

$$\underline{P}_{1i}(0, t) + \underline{P}_{1r}(0, t) = \underline{P}_{1t}(0, t)$$

Interface massique :

$$\sigma dS \left(\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \right)_{(0,t)} = dS [\underline{P}_{1i}(0, t) + \underline{P}_{1r}(0, t) - \underline{P}_{1t}(0, t)] \vec{e}_x$$

5.3.2 Continuité du débit volumique et de la vitesse

- ✕ La continuité du débit volumique n'est pas évidente : l'écoulement fluide étant compressible, il s'agit d'une approximation.
- ✕ En effet, considérons une conduite de section S_1 dont la section varie jusqu'à S_2 sur une distance L . Un simple bilan de masse nous donne :

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{\delta m_s}{dt} - \frac{\delta m_e}{dt}$$

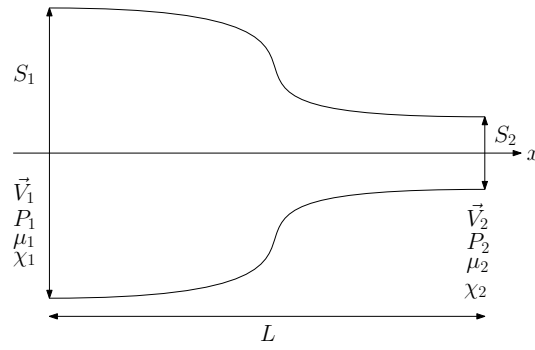


Figure 8

La conservation de la masse d'un système fermé donnant : $\frac{Dm}{Dt} = 0$, on obtient :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\delta m_e}{dt} - \frac{\delta m_s}{dt}$$

En introduisant les grandeurs caractéristiques d'entrée et de sortie, on obtient :

$$\frac{dm}{dt} = \mu_1 S_1 V_1 - \mu_2 S_2 V_2$$

Or, en introduisant la section moyenne S_m , la surpression moyenne P_m , la survitesse moyenne V_m et l'écart moyen⁶ de la masse volumique μ_m au niveau de la conduite, on a (en ordre de grandeur) :

$$\frac{dm}{dt} = S_m L \frac{\partial \mu_m}{\partial t} \approx \frac{S_m L \mu_m}{T} \approx \frac{S_m L c \mu_m}{\lambda}$$

En utilisant la relation de continuité et les relations de couplage (ou l'impédance acoustique), on peut exprimer le produit $\mu_m c$ en fonction du champ des survitesses moyen :

$$c \mu_m = c \mu_0 \chi_0 P_m = c \mu_0 \chi_0 \mu_0 c V_m = \mu_0 \chi_0 c^2 \mu_0 V_m = \mu_0 V_m$$

On obtient donc :

$$\frac{dm}{dt} \approx \frac{S_m L V_m \mu_0}{\lambda}$$

En considérant enfin que, en ordre de grandeur, la masse volumique varie peu (approximation acoustique : ordre 1), on peut écrire :

$$\mu_2 S_2 V_2 \approx \mu_0 S_2 V_2$$

$$\mu_1 S_1 V_1 \approx \mu_0 S_1 V_1$$

On obtient donc :

$$\frac{dm}{dt} = \mu_1 S_1 V_1 - \mu_2 S_2 V_2 \Rightarrow \frac{S_m L \mu_0 V_m}{\lambda} = \mu_0 S_1 V_1 - \mu_0 S_2 V_2$$

Soit :

$$\frac{S_m L V_m}{\lambda} = S_1 V_1 - S_2 V_2$$

6. Il s'agit donc de moyennes spatiales

Ainsi, en considérant que :

$$L \ll \lambda$$

On obtient :

$$S_1 V_1 \approx S_2 V_2$$

On a bien conservation du débit volumique au niveau du changement de section et conservation de la vitesse si la section est constante :

$$\underline{V}_{1i}(0, t) + \underline{V}_{1r}(0, t) = \underline{V}_{1t}(0, t)$$

✕ Notons enfin que lorsque l'onde acoustique incidente n'arrive pas perpendiculairement à la paroi, il faut utiliser les relations de passage suivantes⁷ :

- Continuité de la composante normale de la vitesse (non déplacement de la paroi)
- Discontinuité possible de la composante tangentielle de la vitesse (glissement)
- Continuité de la pression

Ce sont ces relations qui permettent d'établir les lois de Descartes relatives à l'acoustique :

$$r = i_1$$

$$\frac{\sin i_1}{c_1} = \frac{\sin i_2}{c_2}$$

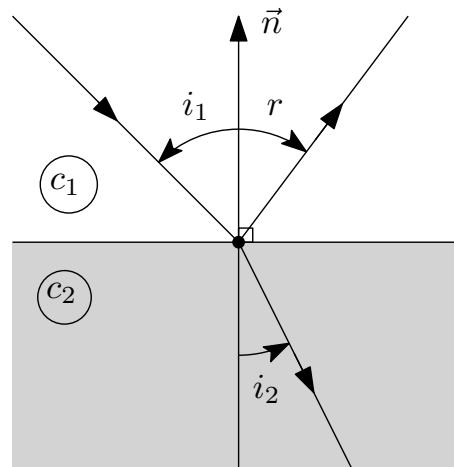


Figure 9 – Loi de Descartes sur la réflexion

5.4 Coefficients de réflexion et transmission en amplitude

✕ Partons de la continuité de la pression et de la vitesse à l'interface :

$$\underline{P}_{1i}(0, t) + \underline{P}_{1r}(0, t) = \underline{P}_{1t}(0, t)$$

$$\underline{V}_{1i}(0, t) + \underline{V}_{1r}(0, t) = \underline{V}_{1t}(0, t)$$

7. On considère une interface non massique, de section dS centrée en un point M

✕ On en déduit :

$$1 + r_P = t_P$$

$$1 + r_V = t_V \Rightarrow 1 - r_P = \frac{Z_1}{Z_2} t_P$$

Soit :

$$r_P = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$t_P = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$r_V = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$t_V = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

✕ Étude des différents cas :

- ☛ Cas où $|Z_1| \gg |Z_2|$: $r_V = 1$ et $r_P = -1$
- ☛ Cas où $|Z_1| \ll |Z_2|$: $r_V = -1$ et $r_P = 1$
- ☛ Cas où $|Z_1| = |Z_2|$: $r_V = r_P = 0$

5.5 Coefficients de réflexion et transmission en puissance

✕ La valeur moyenne du vecteur de Poynting acoustique pour une OPPM ($\pm$), se propageant suivant (Ox) s'exprime comme suit :

$$\vec{\Pi}_a = \frac{1}{2} P V^* \vec{e}_x = (\pm) \frac{1}{2} Z_c |V|^2 \vec{e}_x$$

✕ Les vecteurs de Poynting moyens des ondes incidente, réfléchie et transmise, valent donc :

☛ Vecteur de Poynting incident :

$$\vec{\Pi}_{ai} = +\frac{1}{2} Z_1 V_0^2 \vec{e}_x$$

☛ Vecteur de Poynting réfléchi :

$$\vec{\Pi}_{ar} = -\frac{1}{2} Z_1 |r_V|^2 V_0^2 \vec{e}_x$$

☛ Vecteur de Poynting transmis :

$$\vec{\Pi}_{at} = +\frac{1}{2} Z_2 |t_V|^2 V_0^2 \vec{e}_x$$

✕ On en déduit les coefficients de réflexion et transmission en puissance :

☛ Coefficient de réflexion en puissance

$$R = \frac{\|\vec{\Pi}_{ar}\|}{\|\vec{\Pi}_{ai}\|} = |r_V|^2 = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right|^2$$

☛ Coefficient de transmission en puissance

$$T = \frac{\|\vec{\Pi}_{at}\|}{\|\vec{\Pi}_{ai}\|} = \frac{|Z_2|}{|Z_1|} |t_V|^2 = \left\| \frac{4Z_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \right\|$$

6 Application aux tuyaux sonores

On considère le tuyaux sonore suivant :

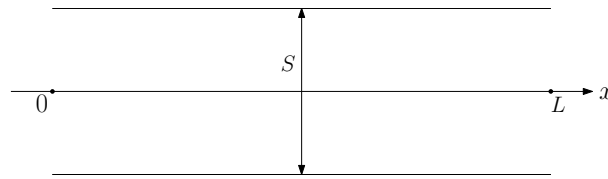


Figure 10 – Modélisation d'un tuyau sonore

- ✗ Si une des extrémités est ouverte alors au niveau de cette extrémité on a : $P = P_0$
- ✗ Si une des extrémités est fermée alors au niveau de cette extrémité on a : $V = 0$

Le tuyau sonore expérimental le plus connu est le tube de Kundt :



Figure 11 – Tube de Kundt

6.1 Recherche de solutions stationnaires

- ✗ Les solutions étant limitées, on cherche les solutions sous la forme d'ondes stationnaires :

$$P_1(x, t) = f(x) \cdot g(t)$$

- ✗ En injectant ces solutions dans l'équation de propagation (d'Alembert), on trouve :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \cdot g(t) = \frac{1}{c^2} f(x) \frac{d^2 g}{dt^2}$$

Soit :

$$c^2 \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{f(x)} = \frac{\frac{d^2 g}{dt^2}}{g(t)}$$

- ✗ Cette égalité étant vérifiée quelque soit x et t , elle est égale à une constante. Sachant que l'on cherche des solutions périodiques, cette constante doit être négative, on la pose égale à $-K^2$. On obtient donc :

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + K^2 g(t) = 0$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{K^2}{c^2} f(x) = 0$$

✕ On obtient donc comme solutions :

$$f(x) = F_0 \cos(kx + \phi)$$

$$g(t) = G_0 \cos(\omega t + \psi)$$

Avec :

$$\omega = kc$$

✕ On obtient donc comme forme générale des solutions :

$$P_1(x, t) = [A \cos kx + B \sin kx] \cos(\omega t + \psi)$$

✕ On en déduit l'expression du champ des vitesses⁸ :

$$\mu_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{k}{\mu_0} [A \sin kx - B \cos kx] \cos(\omega t + \psi)$$

Soit :

$$V_1(x, t) = \frac{1}{Z_c} [A \sin kx - B \cos kx] \sin(\omega t + \psi)$$

6.2 Cas d'un tuyau ouvert aux deux extrémités

✕ Les conditions aux limites sont donc :

$$P_1(0, t) = P_1(L, t) = 0$$

✕ On en déduit :

$$P_1(0, t) = A \cos(\omega t + \psi) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$P_1(L, t) = B \sin kL \cos(\omega t + \psi) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0$$

Soit :

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

✕ Le mode propre n s'écrit donc :

$$P_{1n}(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \psi_n\right)$$

$$V_{1n}(x, t) = \frac{-B_n}{Z_c} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \psi_n\right)$$

8. Attention ! On ne peut pas utiliser l'impédance acoustique car on n'a pas une OPP($\pm$)

- ✘ Sur la figure 12 sont représentés les premiers modes propres d'une cavité ouverte (pour $n = 1$ (fondamental), $n = 2$ et $n = 3$).

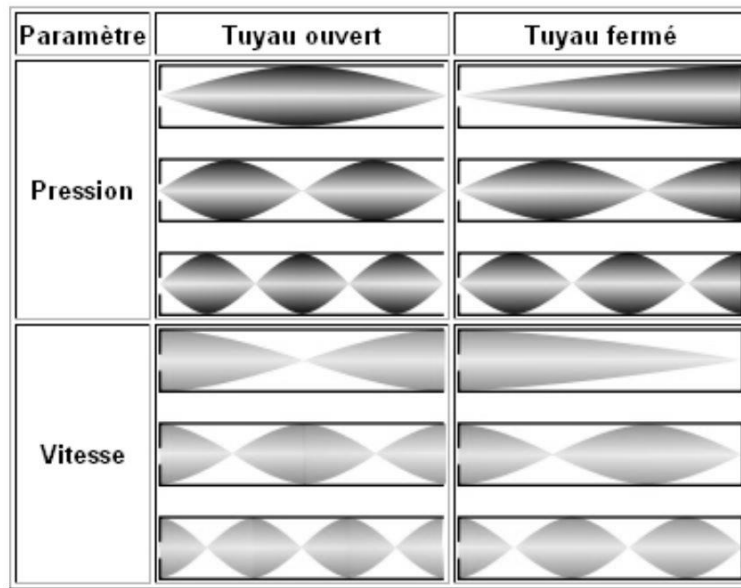


Figure 12 – Représentation des premiers modes propres d'une cavité acoustique ouverte et d'une autre cavité à moitié fermée

- ✘ Une vibration quelconque peut être alors décomposée en une combinaison linéaire de modes propres :

$$P_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \psi_n\right)$$

$$V_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-B_n}{Z_c} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \psi_n\right)$$

Les coefficients B_n, ψ_n étant déterminés par les conditions initiales.

- ✘ Exemple de tuyau sonore ouvert : Flûte à bec (voir figure 13), Clarinette



Figure 13 – Bec d'une flûte

6.3 Cas d'un tuyau fermé à une extrémité (en $x = L$) et ouvert à l'autre extrémité (en $x = 0$)

- ✘ Les conditions aux limites sont donc :

$$P_1(0, t) = 0$$

$$V_1(L, t) = 0$$

✕ On en déduit :

$$P_1(0, t) = A \cos(\omega t + \psi) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$V_1(L, t) = \frac{-B}{Z_c} \cos kL \sin(\omega t + \psi) = 0 \Rightarrow \cos kL = 0 \Rightarrow k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Soit :

$$k_n = \frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

$$\omega_n = \frac{\pi c}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

$$f_n = \left(\frac{1}{2} + n \right) \frac{c}{2L}$$

$$L = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$$

✕ Le mode propre n s'écrit donc :

$$P_{1n}(x, t) = B_n \sin \left(\frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right) x \right) \cos \left(\frac{\pi c}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right) t + \psi_n \right)$$

$$V_{1n}(x, t) = \frac{-B_n}{Z_c} \cos \left(\frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right) x \right) \sin \left(\frac{\pi c}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right) t + \psi_n \right)$$

✕ Sur la figure 12 sont représentés les premiers modes propres d'une cavité semi-ouverte (pour $n = 0$ (fondamental), $n = 1$ et $n = 2$).

✕ Une vibration quelconque peut être alors décomposée en une combinaison linéaire de modes propres :

$$P_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right) x \right) \cos \left(\frac{\pi c}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right) t + \psi_n \right)$$

$$V_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-B_n}{Z_c} \cos \left(\frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right) x \right) \sin \left(\frac{\pi c}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right) t + \psi_n \right)$$

Les coefficients B_n, ψ_n étant déterminés par les conditions initiales.

✕ Exemple de tuyau sonore ouvert : Hautbois (voir figure 14).



Figure 14 – Anche d'un hautbois

6.4 Cas particulier du diapason

- ✕ Le diapason est une tige métallique dont le mode fondamental de vibration est le La (440 Hz).
- ✕ Cette tige est fixée à une caisse de résonance fermée à une extrémité . Lorsque l'on frappe la tige, les vibrations de la tige se transmettent à la caisse de résonance via la fixation. Les dimensions de la caisse sont telles que le fondamental du tuyau acoustique correspondant est à la fréquence de 440 Hz :

$$f_0 = \frac{c}{4L} = 440 \text{ Hz} \Rightarrow L = 19 \text{ cm}$$



Figure 15 – Diapason