

Cordes vibrantes

I. Équation de propagation

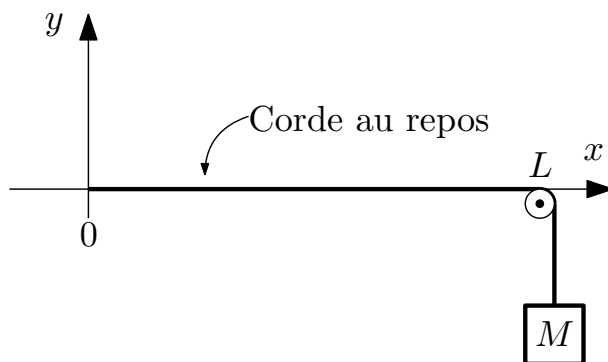
1. Hypothèses et modèle

- ✗ On considère une corde de masse linéique μ , de longueur L et de section de rayon r .
- ✗ La corde est considérée sans raideur. En toute rigueur, à cause de l'élasticité du matériau, il faudrait prendre en compte la raideur de la corde. Ceci est surtout vrai pour les cordes de grande section ($L \gg \sqrt{S}$ non vérifiée). Dans ce cas-là, il faut rajouter un couple :

$$\Gamma(x, t) = \frac{\pi r^2}{4} E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Cela revient à rajouter un terme en $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ dans l'équation de propagation.

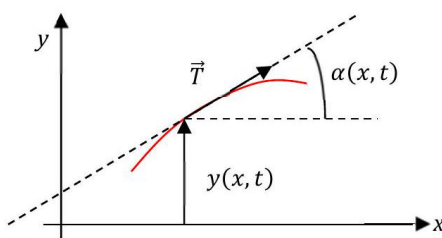
- ✗ On néglige les effets de la pesanteur (attention cela ne signifie pas que la masse de la corde soit nulle!)
- ✗ On néglige le couplage de la corde avec l'air. Dans le cas contraire, ce couplage se traduit par une force de frottement visqueux.
- ✗ La corde est tendue par une tension $\vec{T}$. Cette tension peut être fixée par une masse fixée à l'une des extrémités de la corde :



Avec :

$$T_0 = Mg$$

- ✗ On étudie de part et d'autre de la position d'équilibre les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy , en admettant qu'un élément de corde en x au repos reste à la même abscisse x à l'instant t . L'élongation est notée $y(x, t)$.
- ✗ La tension $\vec{T}(x, t) = \vec{T}_d(x, t)$ est définie comme étant la force s'exerçant en x à l'instant t par la partie de corde située à droite de x sur la partie de la corde située à gauche de x .
- ✗ La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x, t)$.

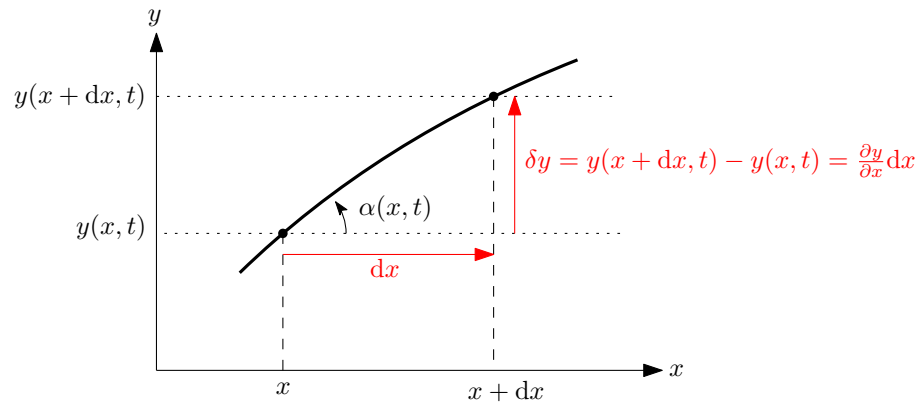


✘ Un élément de longueur de la corde est alors donné par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) = dx^2 (1 + \alpha^2) \cong dx^2$$

Car,

$$\tan \alpha \cong \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$$



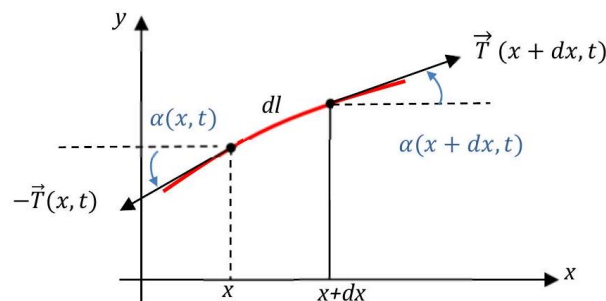
✘ Au premier ordre en α , on a donc :

$$ds = dx$$

2. Équation de propagation

✘ Le principe fondamental de la dynamique pour un élément de longueur $dl = ds \approx dx$ de la corde donne :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)$$



✘ En projection sur Ox , on a :

$$0 = (T \cos \alpha)(x + dx, t) - (T \cos \alpha)(x, t)$$

D'où¹ :

$$T \cos \alpha = C^{ste} = T_0$$

✕ En projection sur Oy , on a :

$$\begin{aligned} \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= (T \sin \alpha)(x + dx, t) - (T \sin \alpha)(x, t) = \frac{\partial T \sin \alpha}{\partial x} dx \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial T \sin \alpha}{\partial x} = \underbrace{T \cos \alpha}_{T_0} \frac{\partial \tan \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

✕ On en déduit l'équation de propagation de la corde vibrante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

3. Grandeurs couplées, impédance caractéristique

✕ Pour déterminer les grandeurs couplées partons des équations qui nous ont permis d'établir l'équation d'onde :

☛ première équation :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T \sin \alpha}{\partial x} \Rightarrow \mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial T_g}{\partial x} \text{ où } v = \frac{\partial y}{\partial t} \text{ et } T_g = -T \sin \alpha = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

☛ deuxième équation :

$$T \sin \alpha = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T_g}{\partial t} = -T_0 \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Les grandeurs couplées dans le cas de la corde vibrante sont : v et T_g

✕ Plaçons-nous dans le cas d'une OPP+, telle que :

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \Rightarrow \mu \frac{\partial v}{\partial t} = \mu f'\left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{\partial (T_g)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow T_g = \mu c \cdot f\left(t - \frac{x}{c}\right) + h(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T_g}{\partial t} = \mu c \cdot f'\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{dh}{dt} = -T_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{T_0}{c} f'\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

avec :

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

1. En toute rigueur, on obtient : $T(x, t) \cos \alpha(x, t) \approx T(x, t) = T(t)$, mais en pratique, on obtient bien une constante. En effet, en négligeant l'inertie de la poulie, on peut écrire : $T(t) = m(g + a)$ où $\vec{a}$ est l'accélération de la masse M . En négligeant l'accélération de cette masse devant g , on obtient donc : $T(t) = Mg = C^{ste}$

On a donc :

$$\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow h = cste = 0$$

on a donc :

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ et } T_g = Z_c \cdot f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

où :

$$Z_c = \mu c = \sqrt{T_0 \mu}$$

✕ Pour une OPP(-)², on aura donc :

$$v = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \text{ et } T_g = -Z_c \cdot g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

✕ Dans un cas général, on aura donc :

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

et,

$$T_g = Z_c \left(f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right)$$

II. Approche énergétique

1. Équation de conservation

a. Bilan d'énergie

✕ De manière générale, on peut définir pour tout phénomène de propagation un vecteur $\vec{R}$ qui traduit la propagation de l'énergie : il s'agit du vecteur densité de courant de propagation d'énergie de l'onde. Nous allons voir son expression dans le cas des cordes vibrantes.

✕ Ici on définit :

$$\vec{R} = (\vec{T}_g \cdot \vec{V}) \vec{e}_x = -(\vec{T} \cdot \vec{V}) \vec{e}_x = \text{vecteur densité de courant d'énergie de l'onde.}$$

$$\Rightarrow \|\vec{R}\| \text{ est homogène à une puissance}$$

avec :

$$\vec{R} = -T \sin \alpha \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_x = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_x$$

2. Si l'on avait choisi comme grandeurs couplées v et $+T \sin \alpha$, le signe moins serait affecté à l'OPP(+)

✕ Pour comprendre la signification physique de $\vec{R}$, calculons :

$$\operatorname{div} \vec{R} = \frac{\partial R}{\partial x} = -T_0 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -T_0 \left(\frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)$$

On obtient l'équation de conservation de l'énergie mécanique (linéique) de la corde :

$$\operatorname{div} \vec{R} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique par unité de longueur de la corde, et le second à son énergie potentielle par unité de longueur (Attention, il s'agit de grandeurs d'ordre 2) :

☛ $e_c = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$ = densité d'énergie cinétique de la corde (en J/m)

☛ $e_p = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$ = densité linéique d'énergie potentielle de la corde (en J/m)

⇒ On a donc la relation :

$$\operatorname{div} \vec{R} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

où :

$$\vec{R} = (\vec{T}_g \cdot \vec{V}) \vec{e}_x = -(\vec{T} \cdot \vec{V}) \vec{e}_x = \text{vecteur densité de courant d'énergie de l'onde.}$$

Et :

$$e = e_c + e_p = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \text{densité linéique d'énergie de la corde}$$

⇒ On retrouve la forme classique d'une équation de conservation.

b. Cas d'une OPP(+)

✕ Pour une onde progressive, telle que $y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} = -\sqrt{\frac{\mu}{T_0}} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\mu}{T_0} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

⇒ Pour une OPP+ , on a donc :

$$e_c = e_p = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

et :

$$e = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Ainsi : Dans le cas d'une OPP(+), on a équipartition des densités linéiques d'énergie cinétique et potentielle

✕ De plus :

$$\operatorname{div} \vec{R} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] = c\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]$$

car :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} \\ \Rightarrow R &= Z_c \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

c. Cas d'une OPP(-)

✕ pour une onde régressive, telle que $y = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ on aura également :

$$e_c = e_p = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

et :

$$e = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Ainsi : Dans le cas d'une OPP(-), on a équipartition des densités linéiques d'énergie cinétique et potentielle

✕ De plus :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{R} &= \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] = -c\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] \text{ car } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} \\ \Rightarrow R &= -Z_c \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

2. Calcul direct des densités d'énergie

a. Énergie cinétique

L'énergie cinétique de l'élément de longueur dx est :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

$\Rightarrow$ La densité d'énergie cinétique vaut :

$$e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

b. Énergie potentielle

3

- ✕ L'élément de longueur dx au repos, a une longueur :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) \text{ au passage de l'onde.}$$

$\Rightarrow$ L'allongement de l'élément de longueur est donc :

$$dl = ds - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

- ✕ Le travail que doit fournir un opérateur pour faire passer l'élément de longueur dx de la corde, de la longueur dx à la longueur ds , vaut donc :

$$\delta W_{op} = T_0 dl = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = dE_p$$

- ✕ La densité linéique d'énergie potentielle est donc :

$$e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

c. Calcul direct de $\vec{R}$

- ✕ On part de la définition de $\vec{R}(x, t)$:

$\vec{R}(x, t) \cdot \vec{e}_x$ est la puissance reçue par l'élément de corde situé à droite de x à l'instant t

puis on fait un bilan de puissance sur un élément de longueur dx situé entre x et $x + dx$

- ✕ Bilan en utilisant $\vec{R}(x, t)$:

$$dP = \vec{R}(x, t) - \vec{R}(x + dx, t) = -\frac{\partial \vec{R}}{\partial x} dx$$

- ✕ Bilan en utilisant $\vec{T}(x, t)$:

$$dP = (\vec{V} \cdot (-\vec{T}))_{x,t} + (\vec{V} \cdot \vec{T})_{x+dx,t} = -\frac{\partial(-\vec{V} \cdot \vec{T})}{\partial x} dx$$

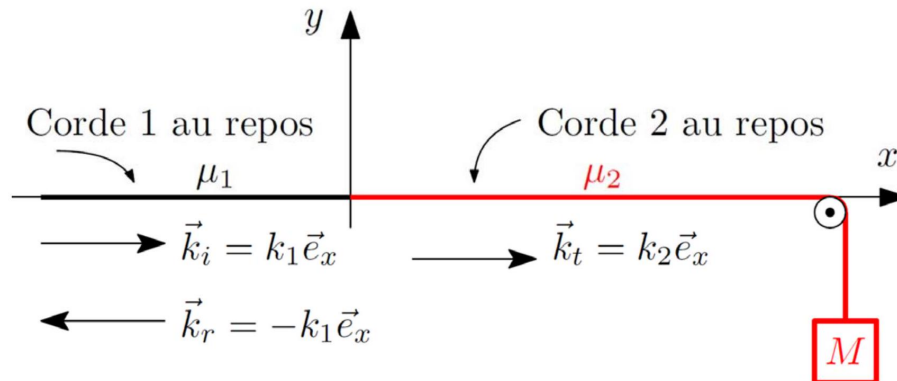
- ✕ Par indentation, on obtient :

$$\vec{R} = -(\vec{V} \cdot \vec{T}) \vec{e}_x$$

3. Attention ! on travaille à l'ordre 2 (grandeurs énergétiques)

III. Réflexion - transmission

On étudie la réflexion et la transmission d'une OPPM(+) à l'interface entre deux cordes de densité linéiques différentes.



1. Calcul en utilisant les impédances

- ✘ Supposons qu'une OPPM, de pulsation ω , se propage sur une corde, soumise à une tension T , d'impédance Z_1 et rencontre sur son chemin un changement brutal de milieu, en $x = 0$, passant à une corde l'impédance Z_2 .

Avec :

$$Z_1 = \mu_1 c_1 = \sqrt{\mu_1 T}$$

$$Z_2 = \mu_2 c_2 = \sqrt{\mu_2 T}$$

- ✘ Ce changement de milieu va donner naissance, en plus de l'onde progressive normale (incidente), à une onde transmise et une onde réfléchie :

$$\underline{v}_i(x, t) = A \exp(j(\omega t - k_1 x))$$

$$\underline{v}_r(x, t) = A_r \exp(j(\omega t + k_1 x))$$

$$\underline{v}_t(x, t) = A_t \exp(j(\omega t - k_2 x))$$

$$\underline{T}_{gi}(x, t) = AZ_1 \exp(j(\omega t - k_1 x))$$

$$\underline{T}_{gr}(x, t) = -AZ_1 r \exp(j(\omega t + k_1 x))$$

$$\underline{T}_{gt}(x, t) = AZ_2 t \exp(j(\omega t - k_2 x))$$

Avec :

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \omega \sqrt{\frac{\mu_1}{T}}$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2} = \omega \sqrt{\frac{\mu_2}{T}}$$

- ✘ L'onde résultante pour $x \leq 0$ vaut donc :

$$\underline{v}_1(x, t) = \underline{v}_i(x, t) + \underline{v}_r(x, t) = A \exp(j(\omega t - k_1 x)) + A_r \exp(j(\omega t + k_1 x))$$

$$\underline{T}_1(x, t) = (\underline{T}_{gi}(x, t)) + (\underline{T}_{gr}(x, t)) = AZ_1 \exp(j(\omega t - k_1 x)) - AZ_1 r \exp(j(\omega t + k_1 x))$$

- ✕ L'onde résultante pour $x \geq 0$ vaut donc :

$$\begin{aligned} \underline{v}_2(x, t) &= \underline{v}_t(x, t) = A \underline{t} \exp(j(\omega t - k_1 x)) \\ \underline{T}_2(x, t) &= -\underline{T}_{gt}(x, t) = A Z_2 \underline{t} \exp(j(\omega t - k_2 x)) \end{aligned}$$

- ✕ On utilise la continuité de la vitesse et de la tension en $x = 0$:

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

- ✕ On utilise également la continuité de la tension en $x = 0$:

$$Z_1(1 - \underline{r}) = Z_2 \underline{t}$$

D'où :

$$\underline{r} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \text{ et } \underline{t} = t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

2. Calcul sans utiliser les impédances

- ✕ Le changement de milieu va donner naissance, en plus de l'onde progressive normale (incidente), à une onde transmise et une onde réfléchie :

$$\begin{aligned} \underline{y}_i(x, t) &= A \exp(j(\omega t - k_1 x)) \\ \underline{y}_r(x, t) &= A \underline{r} \exp(j(\omega t + k_1 x)) \\ \underline{y}_t(x, t) &= A \underline{t} \exp(j(\omega t - k_2 x)) \end{aligned}$$

- ✕ L'onde résultante pour $x \leq 0$ vaut donc :

$$\underline{y}_1(x, t) = \underline{y}_i(x, t) + \underline{y}_r(x, t) = A \exp(j(\omega t - k_1 x)) + A \underline{r} \exp(j(\omega t + k_1 x))$$

- ✕ L'onde résultante pour $x \geq 0$ vaut donc :

$$\underline{y}_2(x, t) = \underline{y}_t(x, t) = A \underline{t} \exp(j(\omega t - k_2 x))$$

- ✕ On utilise la continuité du déplacement et de la tension en $x = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{y}_1(0, t) &= \underline{y}_2(0, t) \\ \underline{y}_i(0, t) + \underline{y}_r(0, t) &= \underline{y}_t(0, t) \\ 1 + \underline{r} &= \underline{t} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \underline{y}_1}{\partial x} \right|_{0^-, t} &= \left. \frac{\partial \underline{y}_2}{\partial x} \right|_{0^+, t} \\ \left. \frac{\partial \underline{y}_i}{\partial x} \right|_{0^-, t} + \left. \frac{\partial \underline{y}_r}{\partial x} \right|_{0^-, t} &= \left. \frac{\partial \underline{y}_t}{\partial x} \right|_{0^+, t} \\ k_1(1 - \underline{r}) &= k_2 \underline{t} \end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \text{ et } \underline{t} = t = \frac{2k_1}{k_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

3. Approche énergétique

✖ D'un point de vue énergétique, on a :

$$\begin{aligned}\langle R_i \rangle &= \text{Re}(\underline{R}_i) = \frac{1}{2} (\underline{T}_{gi}) (\underline{v}_i^*) = \frac{1}{2} Z_1 (\underline{v}_i) (\underline{v}_i^*) = \frac{1}{2} Z_1 A^2 \\ \langle R_r \rangle &= \text{Re}(\underline{R}_r) = \frac{1}{2} (\underline{T}_{gr}) (\underline{v}_r^*) = \frac{1}{2} Z_1 (\underline{v}_r) (\underline{v}_r^*) = \frac{1}{2} Z_1 A^2 |\underline{r}|^2 \\ \langle R_t \rangle &= \text{Re}(\underline{R}_t) = \frac{1}{2} (\underline{T}_{gt}) (\underline{v}_t^*) = \frac{1}{2} Z_2 (\underline{v}_t) (\underline{v}_t^*) = \frac{1}{2} Z_2 A^2 |\underline{t}|^2\end{aligned}$$

✖ D'où les coefficients de réflexion et de transmission en puissance :

$$\begin{aligned}R &= \frac{\langle R_r \rangle}{\langle R_i \rangle} = |\underline{r}|^2 = \left(\frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \right)^2 \\ T &= \frac{\langle R_t \rangle}{\langle R_i \rangle} = \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}} |\underline{t}|^2 = \frac{4\sqrt{\mu_1}\sqrt{\mu_2}}{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2}\end{aligned}$$

✖ On vérifie aisément que⁴ :

$$R + T = 1$$

Ainsi :

- ☛ Si $Z_1 = Z_2$, $R = 0$ et $\underline{r} = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie
- ☛ Si $Z_1 \gg Z_2$, $R = 1$ et $\underline{r} = 1$: il n'y a pas d'onde transmise
- ☛ Si $Z_1 \ll Z_2$, $R = 1$ et $\underline{r} = -1$: il n'y a pas d'onde transmise

IV. Ondes stationnaires

- ✖ On reprend l'exemple précédent et on étudie le comportement de l'onde dans le cas où $r > 0$ en se concentrant sur le milieu 1 ($x < 0$).
- ✖ Dans le milieu 1, l'onde totale va s'écrire :

$$\underline{v}_1(x, t) = A \exp(j(\omega t - k_1 x)) + Ar \exp(j(\omega t + k_1 x))$$

Soit :

$$\underline{v}_1(x, t) = 2Ar \cos k_1 x \exp(j\omega t) + (1 - r)A \exp(j(\omega t - k_1 x))$$

et donc :

$$v_1(x, t) = 2Ar \cos k_1 x \cos \omega t + (1 - r)A \cos(\omega t - k_1 x)$$

4. Ce qui traduit la conservation de l'énergie. Attention ! on a donc : $\underline{r} + \underline{t} \neq 1$

✗ Il apparaît alors deux types d'ondes :

- Une OPPM : $(1 - r)A \cos(\omega t - k_1 x)$
- Une onde dont les variables temporelles et spatiales sont découplées : c'est l'onde stationnaire.

$$2Ar \cos k_1 x \cos \omega t$$

✗ On définit alors un taux d'ondes stationnaires par le rapport des amplitudes de ces deux ondes, soit :

$$TOS = \frac{2r}{1 - r}$$

✗ Les puissances transportées dans les deux milieux sont :

$$\underline{R}_1 = \frac{1}{2} \underline{T}_1 (\underline{v}_1^*) = \frac{1}{2} Z_1 A^2 (1 - |\underline{r}|^2 - 2jr \sin(2k_1 x + \phi))$$

D'où :

$$\langle R_1 \rangle = \text{Re}(\underline{R}_1) = \frac{1}{2} Z_1 A^2 (1 - |\underline{r}|^2)$$

$$\langle R_2 \rangle = \langle R_t \rangle = \text{Re}(\underline{R}_t) = \frac{1}{2} Z_2 (\underline{v}_t) (\underline{v}_t^*) = \frac{1}{2} Z_2 A^2 |\underline{t}|^2$$

✗ Dans le cas très courant où $r = 1$, (par exemple la corde lorsqu'elle est attachée en $x = 0$), on a une onde purement stationnaire pour $x < 0$ d'expression :

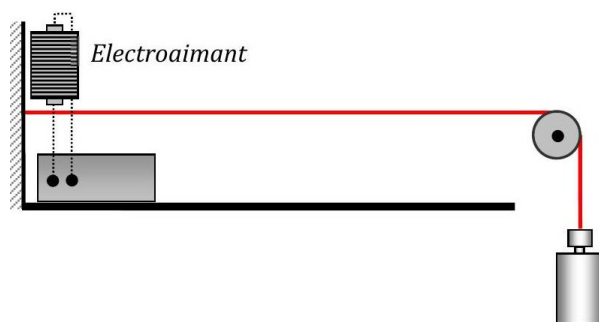
$$v_1(x, t) = 2Ar \cos k_1 x \cos \omega t$$

- Le taux d'ondes stationnaires est infini : l'onde ne se propage plus.
 - Plus précisément, on observe en des points des nœuds de vibration pour : $k_1 x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, et en d'autres des ventres de vibration $k_1 x_n = n\pi$.
- ✗ On montre facilement que dans le cas où $|\underline{r}| = 1$, l'énergie de l'onde ne se propagent plus dans le domaine où $x < 0$. En effet, comme dans toute onde stationnaire, l'énergie fait alors «du sur place», cela se traduit ici par $\langle R_1 \rangle = 0$. En ce qui concerne l'onde transmise, plus aucune énergie n'est transférée dans ce cas-là ($|\underline{r}| = 1 \Rightarrow T = 0$) :

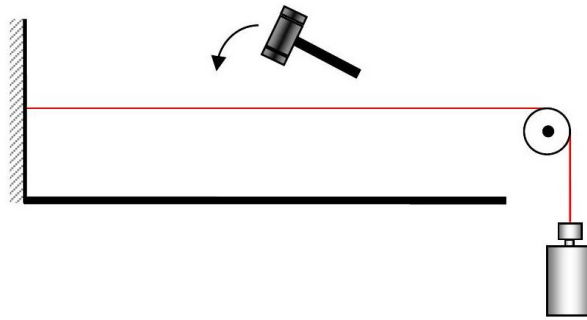
V. Corde de Melde

La corde de Melde est une corde fixée à ses deux extrémités (malgré le vibreur) :

✗ Oscillations forcées :



✕ Oscillations libres :



1. Modes propres

✕ Nous cherchons ainsi des solutions sous formes d'ondes stationnaires (modes propres) :

$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \varphi') \quad \text{où } \omega = kc$$

✕ Ecrivons les deux conditions aux limites :

☛ en $x = 0$: $y(x = 0, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos \varphi' = 0 \Rightarrow \cos \varphi' = 0$

☛ en $x = L$: $y(x = L, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \varphi') = 0 \Rightarrow \cos(kL + \varphi') = 0$

✕ On a donc les deux conditions :

$$\cos \varphi' = 0$$

et :

$$\cos(kL + \varphi') = 0$$

✕ En prenant :

$$\varphi' = -\frac{\pi}{2}$$

, on obtient :

$$\sin(kL) = 0$$

D'où :

$$kL = n\pi$$

Sachant que : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on obtient :

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

✕ D'où la solution (mode propre n) :

$$y_n(x, t) = Y_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{ct}{L} + \varphi_n\right)$$

2. Solution générale

a. Expression de $y(x, t)$

- ✕ La solution générale est obtenue par superposition des modes propres :

$$y(x, t) = \sum_n Y_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{ct}{L} + \varphi_n\right)$$

- ✕ Dans le cas de l'acoustique, l'ensemble des $\{Y_n\}$ constitue le timbre responsable de la richesse du son (violon par exemple), le diapason ne fournissant que le fondamental, donc purement sinusoïdal.

- ✕ $y(x, t)$ s'écrit également :

$$y(x, t) = \sum_n \left(A_n \cos\left(n\pi \frac{ct}{L}\right) + B_n \sin\left(n\pi \frac{ct}{L}\right) \right) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$$

- ✕ Les conditions initiales permettent de déterminer les coefficients A_n et B_n .
En effet, on définit :

$$y(x, 0) = \sum_n A_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) = f(x) = \text{la déformée initiale}$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x, t=0} = \sum_n B_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) = g(x) = \text{la vitesse initiale.}$$

b. Détermination des coefficients A_n et B_n

- ✕ On introduit les fonctions $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{g}(x)$ transformées des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ en fonctions impaires de période $2L$. Dans le cas d'une corde pincée (clavecin), on obtient par exemple⁵ :

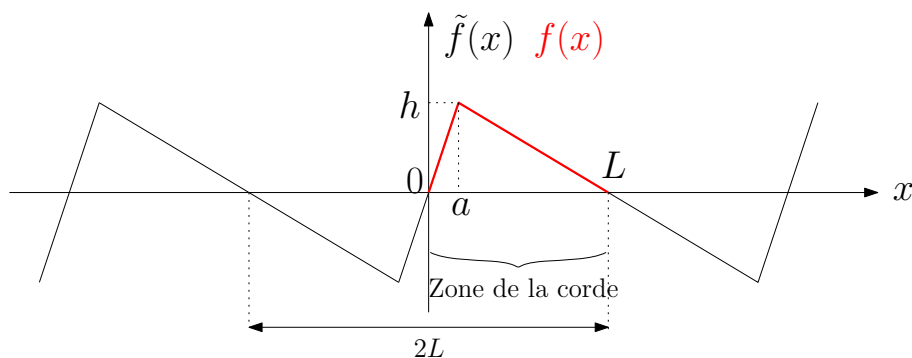


Figure 1 – Fonctions f et $\tilde{f}$

- ✕ Les fonctions $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{g}(x)$, de période $2L$, se décomposent en série de Fourier :

$$\tilde{f}(x) = \sum_n a_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_n a_n \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right)$$

$$\tilde{g}(x) = \sum_n b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) = \sum_n b_n \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right)$$

5. Les fonctions g et $\tilde{g}$ sont nulles

- ✕ Les fonctions $\tilde{f}(x)$ et $\tilde{g}(x)$ coïncidant avec les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, on a :

$$A_n = a_n$$

$$B_n = b_n \frac{L}{n\pi c}$$

- ✕ Exemple : Dans le cas de la corde pincée, la décomposition en série de Fourier de $\tilde{f}(x)$ donne :

$$a_n = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2a(L-a)} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \text{ et } b_n = 0$$

VI. Résonance

1. Résultats expérimentaux

- ✕ Reprenons le dispositif correspondant aux oscillations forcées : l'électroaimant impose $y(0, t) = y_0 \cos(\omega t)$ et la masse m à l'autre extrémité impose une tension : $T_0 = Mg$.
- ✕ Pour une fréquence d'excitation f quelconque, on observe des ondes stationnaires de très faibles amplitudes. Pour certaines valeurs de la fréquence, on observe en revanche des amplitudes de vibrations importantes : on a résonance.
- ✕ Pour la plus petite fréquence de résonance f_0 , on observe un seul fuseau (ventre de vibration au milieu). Les autres fréquences de résonance sont des multiples de f_0 et pour $f_n = n \cdot f_0$, la corde présente n fuseaux.

2. Interprétation

- ✕ Afin d'interpréter ces résultats, cherchons des solutions sous formes d'ondes stationnaires de même pulsation que l'excitation :

$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \varphi') \text{ où } \omega = kc$$

Et vérifiant les conditions aux limites :

• en $x = 0$: $y(x = 0, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos \varphi' = y_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \phi = 0$ et $y_0 = A \cos \varphi'$

• en $x = L$: $y(x = L, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \varphi') = 0 \Rightarrow \cos(kL + \varphi') = 0$

• L'égalité $\cos(kL + \varphi') = 0$ entraîne : $kL + \varphi' = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$

$$\Rightarrow \cos(kx + \varphi') = \cos\left(k(x - L) + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \sin(k(L - x))$$

$$\Rightarrow y_0 = A \cos \varphi' = A \cos\left(-kL + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = A(-1)^n \sin(kL) \Rightarrow A = \frac{y_0(-1)^n}{\sin(kL)}$$

$$y(x, t) = y_0 \underbrace{\frac{\sin(k(L - x))}{\sin(kL)}}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t)$$

- ✕ Ainsi, l'amplitude des vibrations est maximale lorsque $kL = n\pi$ donc lorsque $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ et $f_n = \left(\frac{c}{2L}\right) n$

$\Rightarrow$ Les pulsations de résonance sont les pulsations propres de la corde et la 1ère fréquence d'excitation est $f_0 = \frac{c}{2L}$

3. Application aux instruments de musique

- ✕ La corde, tendue entre deux points fixes, vibre en un nombre entier de fuseaux, donc sa longueur est égale à un multiple de la demi-longueur d'onde

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f} = \frac{n}{2f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

avec n = nombre de fuseaux

c = célérité le long de la corde

f = fréquence de la vibration

T_0 = tension de la corde

μ = masse linéaire de la corde

- ✕ Pour T_0 , c et μ donnés, on obtient une onde stationnaire seulement pour les fréquences vérifiant la relation

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad \text{avec } n \text{ entier (formule des cordes vibrantes)}$$

- ✕ La valeur $n = 1$ correspond au son le plus grave que la corde puisse émettre : c'est le son fondamental. La corde vibre alors en un seul fuseau. Aux valeurs $n = 2, 3 \dots$ correspondent des sons plus aigus, appelés harmoniques.
- ✕ La formule des cordes vibrantes montre que :
- ✕ La fréquence du son fondamental augmente avec la tension de la corde, propriété utilisée pour accorder les instruments.
- ✕ Plus la masse linéaire est grande, plus la fréquence du son émis est faible, donc plus le son est grave, pour une tension et une longueur donnée
- ✕ plus la corde est courte, plus la fréquence est élevée, donc plus le son émis est aigu, pour une tension et une masse linéaire données
- ✕ Une corde pincée, grattée ou frappée vibre toujours simultanément selon plusieurs modes, et produit donc plusieurs notes. C'est cette superposition des notes qui donne à l'instrument son timbre particulier.
- ✕ Une corde vibrante ne peut pas ébranler une grande quantité d'air. Elle ne peut donc pas à elle seule produire un son d'une grande intensité. C'est pourquoi les instruments à cordes sont toujours soit reliés à des caisses de résonance (table d'harmonie), soit reliés à des amplificateurs électroniques.