

Ouverture à la physique des instabilités

1. Étude d'une instabilité paramétrique

1.I. Origine physique de l'instabilité

1.I.A. Approche qualitative

1. L'énergie emmagasinée par le condensateur est donnée par :

$$U_{el} = \frac{q^2}{2C}$$

où C est la capacité du condensateur plan utilisé. On sait, par ailleurs, que $C = \frac{\epsilon_0 S}{e(t)}$ d'où l'expression /

$$U_{el} = \frac{q^2(t)}{2\epsilon_0 S} e(t)$$

Avec l'hypothèse d'une variation de l'épaisseur $e(t)$ instantanée et donc de valeur constante de $q(t)$ au cours de l'opération, on trouve aisément que :

$$\Delta U_{el} = \frac{q^2(t)}{\epsilon_0 S} \Delta e$$

En utilisant $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e_0}$, on arrive à :

$$\Delta U_{el} = \frac{q^2(t)}{C_0} \epsilon$$

2. Si $q(t) = 0$, il n'y a pas de variation d'énergie.

L'opération de modification de l'épaisseur du condensateur est neutre du point de vue énergétique aussi bien pour le système que pour **l'opérateur extérieur**. Par exemple, lorsqu'on éloigne une armature de l'autre, il faut lutter contre la force électrostatique attractive qui existe entre elles.

L'énergie électrostatique stockée dans le condensateur est une énergie potentielle : en utilisant la définition opérationnelle de l'énergie potentielle, on voit qu'elle correspond au travail d'un opérateur qui modifierait la distance entre les plaques de Δe : en l'absence de charges et donc de force d'attraction, le travail de cet opérateur est donc nul.

3. Le système a reçu de l'énergie lorsqu'entre les points A et B , on a augmenté l'épaisseur du condensateur. Synchroniser la diminution de l'épaisseur (CD) avec le moment où $q(t) = 0$ permet d'éviter de perdre l'énergie gagnée précédemment. À Chaque passage de e_{min} à e_{max} , on gagne l'énergie :

$$\Delta U_{el} = \frac{q_{max}^2}{C_0} \epsilon$$

et à chaque passage de e_{max} à e_{min} , on a :

$$\Delta U_{el} = 0$$

Le système gagne de l'énergie constamment.

4. La représentation de la courbe d'énergie est effectuée sur la figure 1. Ce diagramme peut être discuté car l'hypothèse $q(t)$ invariable lors de l'évolution de l'épaisseur est discutable. L'apport d'énergie se traduit par un apport de charges. L'énergie maximale du système croît de façon régulière, ce qui peut être à l'origine d'une instabilité.

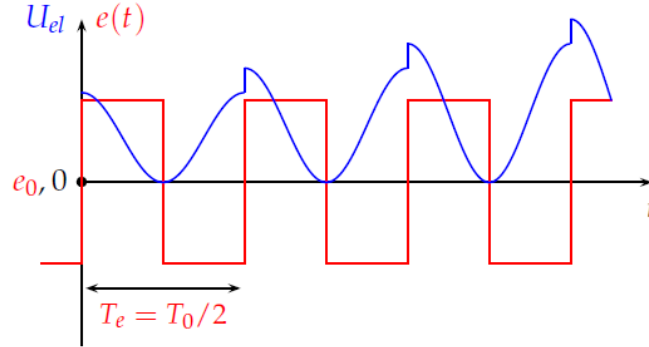


FIGURE 1 – Évolution de l'énergie lorsque $T_e = T_0/2$

5. Lorsque $T_e = T_0$, le passage de e_{min} à e_{max} s'effectue lorsque $q(t) = q_{max}$. Il y a un gain d'énergie de $\Delta U_{el} = \frac{q_{max}^2}{C_0} \epsilon$. Par contre à mi-période, lorsque s'effectue le passage de e_{max} à e_{min} la charge est $q(t) = -q_{max}$ et la variation d'énergie sera donc : $\Delta U_{el} = -\frac{q_{max}^2}{C_0} \epsilon$. On perd ce que l'on a gagné lors de la précédente évolution de l'épaisseur du condensateur. La représentation de l'évolution de $U_{el}(t)$ est donnée sur la figure 2.

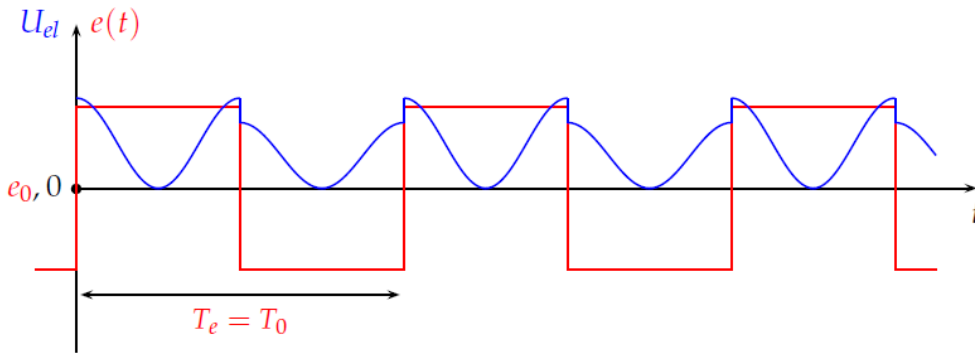


FIGURE 2 – Évolution de l'énergie lorsque $T_e = T_0$

Lorsque la période de l'excitation est $T_e = 3T_0/2$, on constate que le passage de e_{min} à e_{max} s'effectue toujours avec le gain d'énergie puisque ce passage s'effectue soit lorsque $q = q_{max}$ soit lorsque $q = -q_{max}$. Par contre, le passage de e_{max} à e_{min} s'effectue lorsque $t = 3T_0/4$ (par exemple), moment où la charge est nulle. Il n'y a donc pas de perte d'énergie à ce moment-là. On peut faire les mêmes réserves qu'à la question précédente car l'énergie augmentant au fur et à mesure, on ne passe pas tout à fait à 0 pour la charge lors de la diminution de l'épaisseur. La représentation de l'évolution de l'énergie du condensateur est effectuée sur la figure 3.

1.I.B. Mise en œuvre expérimentale

6. La tension aux bornes du condensateur est $u(t) = \frac{q}{C}$. L'intensité $i = \frac{dq}{dt}$ est celle représentée en convention récepteur par rapport à $u(t)$. Dans ces conditions, la loi des mailles donne $u_s = \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + ri$. Le circuit

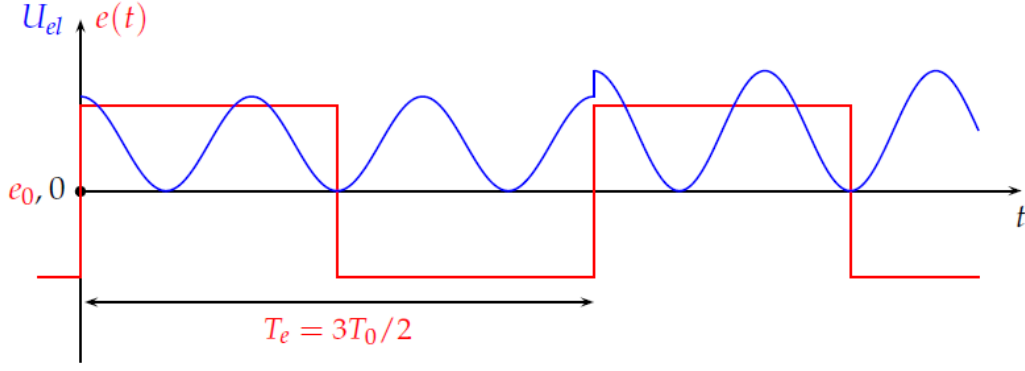


FIGURE 3 – Évolution de l'énergie lorsque $T_e = 3T_0/2$

multiplieur génère la tension $u_s(t)$ selon $u_s = kU_e \cos(\omega_e t + \pi) \frac{q(t)}{C}$. Avec $\cos(\omega_e t + \pi) = -\cos \omega_e t$, on arrive à l'équation différentielle $L\ddot{q} + r\dot{q} + \frac{q}{C} = -q \frac{kU_e}{C} \cos \omega_e t$. Cette équation s'écrit bien sous la forme proposée par l'énoncé où on identifie logiquement $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

$$\lambda = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

et

$$f = \frac{kU_e}{2}$$

1.II. Instabilité paramétrique du grand encensoir de Saint Jacques de Compostelle

1.II.A. Équation de Mathieu

7. Si on applique la relation de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}'$, il faut tenir compte des forces d'inertie car ce référentiel n'est pas galiléen. La force d'inertie de CORIOLIS est nulle car $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Il suffit de prendre en compte la force d'inertie d'entraînement qui correspond à $-m\mathbf{a}_{ent}(M)$. En raisonnant avec la notion de point coïncident, on voit rapidement que :

$$\mathbf{a}_{ent} = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}'}$$

La relation de la dynamique est donc :

$$m\mathbf{a}(M) = m\mathbf{g} + \mathbf{T} - m\mathbf{a}_{O'/\mathcal{R}'}$$

On a donc :

$$m\mathbf{a}(M) = mg_0\mathbf{e}_z + \mathbf{T} + mh_0\omega_e^2 \cos \omega_e t \mathbf{e}_z$$

On constate donc que tout se passe effectivement comme si on avait affaire à un champ de pesanteur variable au cours du temps :

$$g(t) = g_0 + h_0\omega_e^2 \cos \omega_e t$$

8. On projette la relation de la dynamique sur le vecteur $\mathbf{e}_\theta$ où l'accélération de M en mouvement circulaire est $a_\theta = \ell\ddot{\theta}$, la chaîne tenant l'encensoir est supposée toujours tendue. On a donc :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg(t) \sin \theta$$

ce qui peut s'écrire :

$$\ddot{\theta} + \frac{g_0}{\ell} \left[1 + \frac{h\omega_e^2}{g_0} \cos \omega_e t \right] \sin \theta = 0$$

On a donc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{\ell}}$$

et :

$$f = \frac{h\omega_e^2}{2g_0}$$

9. Si l'on fait l'approximation des petits mouvements, alors $\theta \simeq \sin \theta$. On obtient l'équation de MATHIEU :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + 2f \cos \omega_e t] \theta = 0$$

1.II.B. Diagramme de stabilité des solutions

10. On réécrit l'équation différentielle selon :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + 2f \cos 2\omega t] \theta = 0$$

Avec la forme de solution :

$$\theta = \theta_0 \exp \mu \omega_0 t \cos(\omega t + \phi)$$

on obtient après calcul :

•

$$\ddot{\theta} = \theta_0 \exp \mu \omega_0 t [(\mu^2 \omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \phi) - 2\mu \omega \omega_0 \sin(\omega t + \phi)]$$

•

$$\theta \cos 2\omega t = \frac{\theta_0}{2} \exp \mu \omega_0 t [\cos(3\omega t + \phi) + \cos(\omega t - \phi)]$$

On néglige le terme de pulsation 3ω et on introduit les formules précédentes dans l'équation différentielle. On obtient alors :

$$[(\mu^2 + 1)\omega_0^2 - \omega^2] \cos(\omega t + \phi) - 2\mu \omega_0 \omega \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 f \cos(\omega t - \phi) = 0$$

Développons les cosinus et sinus, on arrive à :

$$[(\mu^2 + 1 + f)\omega_0^2 - \omega^2] \cos \phi - 2\mu \omega_0 \omega \sin \phi \cos \omega t + \dots$$

$$\dots + [(-\mu^2 - 1 + f)\omega_0^2 + \omega^2] \sin \phi - 2\mu \omega_0 \omega \cos \phi \sin \omega t = 0$$

Cette équation est nulle $\forall t$ si les coefficients sont nuls. En introduisant la pulsation réduite Ω , on doit avoir les deux relations :

$$(\mu^2 + 1 + f - \Omega^2) \cos \phi = 2\mu \Omega \sin \phi$$

et

$$(-\mu^2 - 1 + f + \Omega^2) \sin \phi = 2\mu \Omega \cos \phi$$

En effectuant le produit membre à membre, on aboutit à la relation :

$$(\mu^2 + 1 + f - \Omega^2)(\mu^2 + 1 - (f + \Omega^2)) = -4\mu^2 \Omega^2$$

Après mise en forme, on obtient la relation demandée :

$$\mu^4 + 2\mu^2(\Omega^2 + 1) + (\Omega^2 - 1)^2 - f^2 = 0$$

11. Dans un premier temps, il faut préciser le critère d'instabilité : pour que θ diverge, il faut que μ ait une partie réelle positive.

L'équation précédente est une équation bicarrée. En raisonnant pour μ^2 dans un premier temps, on voit que le produit des deux racines (a, b) est :

$$ab = (\Omega^2 - 1)^2 - f^2$$

et la somme :

$$a + b = -2(\Omega^2 + 1) < 0$$

Si le produit des racines est positif, alors les deux racines sont de même signes. Ce signe est forcément négatif puisque la somme l'est. Si $\mu^2 < 0$, alors μ est un imaginaire pur et l'amplitude de θ va rester bornée puisque le facteur $\exp \mu \omega_0 t$ aura pour module 1. Il ne peut y avoir de divergence de l'amplitude et donc de déstabilisation que si $ab < 0$ puisqu'on aura alors forcément une racine positive et une racine négative. La racine positive va donner deux possibilités réelles pour μ dont l'une sera positive. C'est elle qui sera responsable de la déstabilisation. Il faut donc que :

$$(\Omega^2 - 1)^2 - f^2 < 0$$

On trouve bien la condition $f^2 > f_c^2$ avec

$$f_c^2 = (1 - \Omega^2)^2$$

12. f et Ω sont des coefficients réels positifs. La condition de déstabilisation est donc : $f > |\Omega^2 - 1|$ ce qui correspond aux deux cas suivants : si $\Omega < 1$ alors $f > 1 - \Omega^2$ et si $\Omega > 1$ alors $f > \Omega^2 - 1$. On peut voir sur la figure 4, le diagramme de stabilité de l'encensoir.

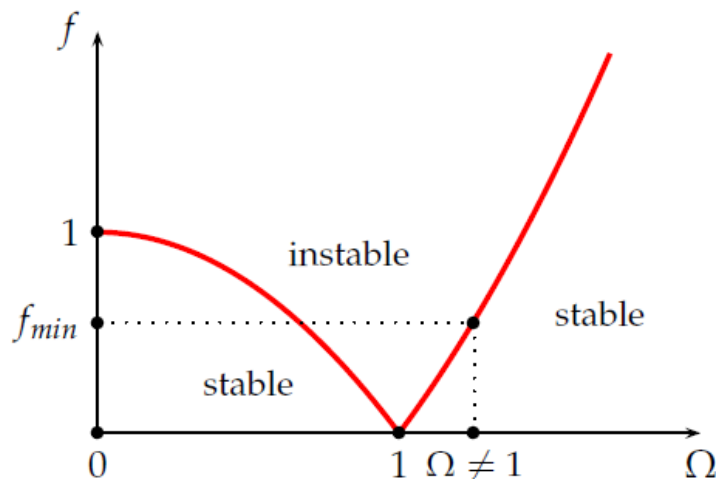


FIGURE 4 – Diagramme de stabilité de l'encensoir

13. La résonance se produit pour

$$\omega = \omega_0$$

ou encore :

$$\omega_e = 2\omega_0$$

, en clair $\Omega = 1$. Nous avons vu que $f = \frac{kU_e}{2}$ ou bien $f = \frac{\omega_e^2 h}{2g_0}$. f est donc proportionnel à l'amplitude de l'excitation à savoir U_e ou h . À la résonance ($\Omega = 1$), on constate que dès que

$$U_e \neq 0 \text{ ou que } h \neq 0, \text{ on se retrouve dans la zone instable}$$

. Par contre, pour $\Omega \neq 1$, en dehors de la résonance, il faut atteindre un f_{min} pour passer en zone instable. Voir le graphique de la figure 4.

14. On est au voisinage de $\Omega = 1$. On a :

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \Omega_2 - \Omega_1$$

tel que

$$f = \Omega_2^2 - 1$$

et

$$f = 1 - \Omega_1^2$$

On en déduit que :

$$2f = \Omega_2^2 - \Omega_1^2 = (\Omega_1 + \Omega_2)(\Omega_2 - \Omega_1)$$

On peut aisément effectuer l'approximation

$$\Omega_1 + \Omega_2 \simeq 2$$

Cela nous permet de conclure que :

$$f = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

.

15. On a, ici,

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 \cos \omega t - 9\omega^2\theta_1 \cos 3\omega t$$

mais aussi

$$2f\omega_0^2 \cos 2\omega t (\theta_0 \cos \omega t + \theta_1 \cos 3\omega t) = f\omega_0^2\theta_0 [\cos 3\omega t + \cos \omega t] + f\omega_0^2\theta_1 [\cos \omega t + \cos 5\omega t]$$

On néglige le terme de pulsation 5ω et on utilise ces expressions dans l'équation de MATHIEU. On obtient :

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)\theta_0 + f\omega_0^2(\theta_0 + \theta_1)] \cos \omega t + [(\omega_0^2 - 9\omega^2)\theta_1 + f\omega_0^2\theta_0] \cos 5\omega t = 0$$

L'équation étant vérifiée $\forall t$, les coefficients sont nuls. On obtient alors :

$$f\theta_0 = \theta_1(9\Omega^2 - 1)$$

Comme $f \ll 1$ et $\Omega \simeq 1$, on peut alors écrire que :

$$\theta_1 \simeq \frac{f}{8}\theta_0$$

On constate sur cette expression que θ_1 est bien du même ordre que f et aussi par le fait que $\theta_1 \ll \theta_0$ ce qui justifie les calculs effectués avant.

1.II.C. Introduction d'un terme de dissipation

16. Comme le frottement fluide est présenté par l'intermédiaire d'un couple, on reprend la mise en équation du problème en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire en O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$. La masse de la chaîne de longueur ℓ étant négligeable, le moment cinétique scalaire (sur l'axe $\mathbf{e}_y$) de la masse m est $m\ell^2\dot{\theta}$. Le bras de levier pour le poids étant :

$$\ell \sin \theta \simeq \ell\theta$$

, le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg_0(1 + 2f \cos 2\omega t)\ell\theta - m\ell^2 2\lambda\omega_0\dot{\theta}$$

La nouvelle équation de MATHIEU est donc :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2(1 + 2f \cos 2\omega t)\theta = 0$$

17. Le calcul à réaliser est du même type que celui de la question 10.. Après celui-ci, on obtient une expression de la forme :

$$\alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t = 0$$

vraie $\forall t$.

Cela ne peut être réalisé que pour $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 0$. On obtient alors les deux égalités suivantes :

$$(\mu^2 + 1 + 2\lambda\mu + f - \Omega^2) \cos \phi = 2(\mu + \lambda)\Omega \sin \phi$$

et

$$(-\mu^2 - 1 - 2\lambda\mu + f + \Omega^2) \sin \phi = 2(\mu + \lambda)\Omega \cos \phi$$

Toujours en effectuant le produit membre à membre, on arrive à la relation :

$$f^2 - (\mu^2 + 1 + 2\lambda\mu - \Omega^2)^2 = 4\mu^2\Omega^2 + 4\lambda^2\Omega^2 + 8\mu\lambda\Omega^2$$

En développant cette expression sous la forme d'un polynôme de μ , on arrive à :

$$\mu^4 + 4\lambda\mu^3 + \mu^2[2 + 4\lambda^2 + 2\Omega^2] + \mu[2\lambda + 4\lambda\Omega^2] + 1 + \Omega^4 + (4\lambda^2 - 2)\Omega^2 - f^2 = 0$$

On constate que le polynôme précédent possède des coefficients positifs comme 4λ , comme $2 + 4\lambda^2 + 2\Omega^2$ et comme $2\lambda + 4\lambda\Omega^2$.

Seul le terme constant est susceptible d'avoir un signe positif ou négatif en fonction de la valeur de f . On en déduit que μ ne peut être un réel positif que si le terme constant

$$1 + \Omega^4 + (4\lambda^2 - 2)\Omega^2 - f^2$$

est négatif. On arrive alors immédiatement à la condition $f^2 > f_c^2$ avec :

$$f_c^2 = (1 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2$$

et $f_c > 0$.

18. La dissipation d'énergie diminue forcément la capacité du système à être déstabilisé. On peut donc prévoir que, pour f donné, l'intervalle de pulsation autour de la résonance sera plus grand que dans le modèle sans dissipation. On peut faire l'analogie avec la bande passante d'un filtre passe-bande qui augmente lorsque le facteur de qualité diminue.

19. Pour effectuer le nouveau tracé du diagramme de stabilité, on commence par calculer la dérivée de f_c^2 . On a :

$$\frac{df_c^2}{d\Omega} = 2f_c \frac{df_c}{d\Omega}$$

Cette dérivée est donc du signe de :

$$\frac{df_c}{d\Omega} = 4\Omega(\Omega^2 + 2\lambda^2 - 1)$$

La fonction est extrémale en 0 et aussi dans le cas où $1 - 2\lambda^2 > 0$ à la valeur :

$$\Omega_{min} = \sqrt{1 - 2\lambda^2}$$

car on montre aisément qu'il s'agit d'un minimum.

Il faut donc distinguer deux cas :

$$\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pour lequel la fonction :

$$f_c = \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}$$

est décroissante puis croissante du cas où le facteur d'amortissement est plus grand, puis :

$$\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

, pour lequel la fonction est strictement croissante.

Dans le premier cas, on a :

$$f_c(\Omega_{min}) = 2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}$$

Si l'on effectue $\lambda = 0$ (pas de dissipation), on retrouve bien le cas précédent car alors $f_c(\Omega_{min}) = 0$ et $\Omega_{min} = 1$. Le diagramme de stabilité est fourni sur la figure 5. La zone d'instabilité est toujours située au-dessus de la courbe donnant $f_c(\Omega)$. On constate facilement l'élargissement de la bande de pulsation autour de la résonance (quand elle existe) prévu à la question précédente.

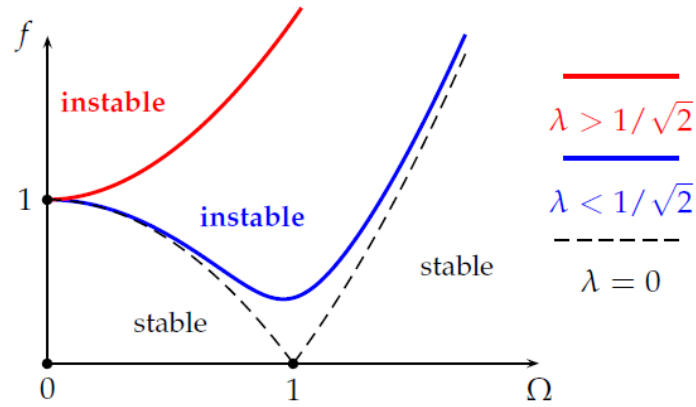


FIGURE 5 – Diagramme de stabilité de l'encensoir avec dissipation

Centrale MP 2009 – Epreuve de PHYSIQUE-CHIMIE

*Le Seigneur des Anneaux**Partie I – Bilan radiatif de Saturne*

I.A-

I.A.1)

$$\rho = \frac{M_{Sa}}{\frac{4}{3}\pi R_{Sa}^3} = 689 \text{ kg.m}^{-3}$$

Commentaire : Cette masse volumique moyenne est intermédiaire entre une masse volumique de solide (de quelques 10^3 kg.m^{-3}) et une masse volumique de gaz (quelques kg.m^{-3}) ce qui s'explique par le fait que la planète Saturne est une géante gazeuse, essentiellement constituée de gaz avec un noyau solide.

I.A.2)

a) D'après les données :

$$\vec{g}(M) = -\frac{GM_{Sa}}{R_{Sa}^2} r \vec{u}_r$$

b) Application numérique : le champ de pesanteur à la surface de Saturne est :

$$g_0 = \frac{GM_{Sa}}{R_{Sa}^2} = 11,2 \text{ m.s}^{-2}$$

Commentaire : de l'ordre de grandeur du champ de pesanteur terrestre :

$$\frac{g_{sat} - g_{ter}}{g_{ter}} = 14\%$$

I.A.3)

a) Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$\begin{aligned} \text{grad } P(M) &= \rho(M) \vec{g}(M) \\ \Rightarrow \frac{dP}{dr} &= -\rho \frac{GM_{Sa}}{R_{Sa}^2} r = -\frac{\rho g_0}{R_{Sa}} r \\ \Rightarrow P(r) &= \frac{\rho g_0}{2R_{Sa}} (R_{Sa}^2 - r^2), \end{aligned}$$

en tenant compte de la condition aux limites $P(R_{Sa}) = 0$.

b) La distance cherchée vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\rho g_0}{2R_{Sa}} (R_{Sa}^2 - r_{mét}^2) &= P_{mét} \\ \Rightarrow r_{mét} &= R_{Sa} \sqrt{1 - \frac{2P_{mét}}{\rho g_0 R_{Sa}}} = 0,33 R_{Sa} \end{aligned}$$

I.A.4)

a) La puissance surfacique émise par le Soleil est donnée par la loi de Stefan : $\phi_{émis,S} = \sigma T_S^4$.
La puissance totale émise par le Soleil est :

$$\Phi_0 = \phi_{émis,S} 4\pi R_S^2$$

soit :

$$\Phi_0 = 4\pi \sigma R_S^2 T_S^4 = 3,64 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

b) Saturne intercepte la fraction :

$$\frac{\pi R_{Sa}^2}{4\pi d_{SaS}^2} = \left(\frac{R_{Sa}}{2d_{SaS}} \right)^2$$

de Φ_0 , et absorbe la fraction a de la puissance interceptée, donc :

$$\Phi_{abs} = a \left(\frac{R_{Sa}}{2d_{SaS}} \right)^2 \Phi_0.$$

c) Si Saturne rayonne comme un corps noir, la puissance émise par Saturne est :

$$\Phi_{émis} = \sigma T_{Sa}^4 \times 4\pi R_{Sa}^2.$$

La condition d'équilibre thermique pour Saturne s'écrit : $\Phi_{émis} = \Phi_{abs}$ et conduit à :

$$T_{Sa} = T_S a^{\frac{1}{4}} \left(\frac{R_S}{2d_{SaS}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

d) Application numérique : $T_{Sa} = 80,1K$. La valeur réelle est notablement plus élevée ; la différence est due à l'existence d'un processus dégageant de l'énergie thermique à l'intérieur de la planète.

I.B-

I.B.1) Les forces s'appliquant sur la gouttelette sont :

- ✓ Son poids : $m\vec{g}(M)$,
- ✓ La force de frottement : $-\lambda\vec{v}_{He}$,
- ✓ La poussée d'Archimède : $-m \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \vec{g}(M)$.

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit donc :

$$m \frac{d\vec{v}_{He}}{dt} = m \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right) \vec{g}(M) - \lambda \vec{v}_{He}$$

Remarque : En l'absence de précision de l'énoncé, le TRC en l'absence de poussée d'Archimède a été noté

I.B.2)

a)
Schéma obligatoire avec longueur du cylindre attendue.

Les gouttelettes traversant la surface $\vec{dS}$ pendant la durée dt sont celles qui se situent à l'instant t dans un cylindre oblique tel que celui qui est dessiné sur l'énoncé, de base $\vec{dS}$ et de hauteur $\vec{v}_{He} dt$, donc de volume $\vec{v}_{He} dt \cdot \vec{dS}$. Leur nombre est $n\vec{v}_{He} dt \cdot \vec{dS}$ et leur masse totale :

$$dm_{He} = mn\vec{v}_{He} dt \cdot \vec{dS} = (nm\vec{v}_{He}) \cdot \vec{dS} dt$$

Ainsi le vecteur densité de courant d'hélium est : $\vec{j}_{He} = nm\vec{v}_{He}$.

b) En régime permanent les gouttelettes d'hélium ont une vitesse constante donnée par l'équation différentielle du I.B.1) avec $\frac{d\vec{v}_{He}}{dt} = 0$:

$$\vec{v}_{He} = \frac{m}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right) \vec{g}$$

Il vient donc :

$$\vec{j}_m = \vec{j}_{He} + \vec{j}_H = nm \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right) \vec{v}_{He} = \frac{nm^2}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right)^2 \vec{g} = \gamma \vec{g}$$

avec $\gamma = \frac{nm^2}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right)^2$

n est en m^{-3} , m en kg, λ en $kg.s^{-1}$ (car $-\lambda\vec{v}_{He}$ est homogène à $m \frac{d\vec{v}_{He}}{dt}$) donc γ est en $m^{-3}.kg.s$.

c) Cette formule est analogue à la loi d'Ohm locale : $\vec{j}_{el} = \gamma_{el} \vec{E}$ reliant le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}_{el}$ au champ électrique $\vec{E}$, où γ_{el} est la conductivité électrique.

I.B.3)a) La puissance de la force de frottement sur une gouttelette est :

$$P_F = \vec{F} \cdot \vec{v}_{He} = -\lambda v_{He}^2.$$

La densité volumique de puissance de ces forces est :

$$P_V = nP_F = -n\lambda v_{He}^2 = -\frac{nm^2}{\lambda} \left(1 - \frac{\rho_H}{\rho_{He}} \right)^2 g^2$$

soit :

$$P_V = -\gamma g^2 = -\vec{j}_m \cdot \vec{g}.$$

b) On a des expressions analogues pour la puissance volumique des forces électromagnétiques dans un milieu ohmique :

$$P_{V,el} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$$

. Le signe est opposé parce qu'on a considéré la puissance des forces de frottement d'un coté et la puissance des forces motrices (forces électriques) de l'autre.

c) L'énergie dissipée par frottement est convertie en énergie interne. Il y a « production d'énergie thermique » au sein de la planète ce qui augmente sa température. La puissance thermique créée au sein de la planète est :

$$\begin{aligned}
P_{\text{diss}} &= \iiint_{\text{volume de Saturne}} -P_V d\tau = \int_{r=0,2R_{Sa}}^{0,55R_{Sa}} \gamma g(r)^2 4\pi r^2 dr \\
P_{\text{diss}} &= 4\pi\gamma \left(\frac{GM_{Sa}}{R_{Sa}^3} \right)^2 \int_{r=0,2R_{Sa}}^{0,55R_{Sa}} r^4 dr \\
P_{\text{diss}} &= \frac{4\pi\gamma(GM_{Sa})^2}{5R_{Sa}} (0,55^5 - 0,2^5).
\end{aligned}$$

Il se trouve que : $\frac{4 \times (0,55^5 - 0,2^5)}{5} \approx \frac{1}{25}$ (erreur relative de 10^{-5}), on peut donc écrire :

$$P_{\text{diss}} \approx \frac{\pi}{25} \frac{\gamma(GM_{Sa})^2}{R_{Sa}}.$$

D'autre part le bilan thermique de Saturne s'écrit, en tenant compte de cette puissance :

$$P_{\text{diss}} + \Phi_{\text{abs}} = \Phi_{\text{emis}}$$

soit :

$$P_{\text{diss}} = 4\pi R_{Sa}^2 \sigma T_{Sa}^4 - \Phi_{\text{abs}}.$$

On en déduit la valeur de γ , la température $T_{Sa} = 130K$ étant connue :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{100R_{Sa}^3 \sigma}{(GM_{Sa})^2} \left(T_{Sa}^4 - a \left(\frac{R_S}{2d_{SaS}} \right)^2 T_S^4 \right) \\
\gamma &= \underline{1,9 \cdot 10^{-7} m^{-3} \cdot kg \cdot s}.
\end{aligned}$$

Partie III – Les anneaux de Saturne

III.A- Circularisation de la trajectoire

III.A.1) D'après le théorème de Koenig, l'énergie cinétique du nuage est :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M v_G^2.$$

G étant repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) ,

$$\vec{v}_G = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

(avec les notations habituelles) ; il en découle :

$$\vec{L}_{Oorb} = \vec{OG} \wedge M \vec{v}_G = M r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

Ainsi :

$$v_G^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L_{Oorb}^2}{M^2 r^2}$$

et :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{L_{Oorb}^2}{2Mr^2}.$$

Dans l'hypothèse où l'extension du nuage est très inférieure à r , on peut calculer son énergie potentielle gravitationnelle en faisant comme si toute la masse était concentrée en G :

$$E_p \approx - \frac{GM_{Sa}M}{r}$$

Finalement :

$$E_m = E_c + E_p = E_c^* + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{L_{Oorb}^2}{2Mr^2} - \frac{GM_{Sa}M}{r}$$

III.A.2) Sachant que $r = \frac{\frac{L_{Oorb}^2}{GM_{Sa}M^2}}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$, on a :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{L_{Oorb}^2}{GM_{Sa}M^2} \frac{e \sin(\theta - \theta_0)}{(1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2} \frac{L_{Oorb}}{Mr^2} = \frac{eGM_{Sa}M}{L_{Oorb}} \sin(\theta - \theta_0)$$

Il vient donc :

$$E_m = E_c^* + \frac{1}{2} M \left(\frac{e G M_{Sa} M}{L_{Oorb}} \sin(\theta - \theta_0) \right)^2 + \frac{L_{Oorb}^2}{2M \left(\frac{L_{Oorb}^2}{G M_{Sa} M^2} \right)^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2 - \frac{G M_{Sa} M}{\frac{L_{Oorb}^2}{G M_{Sa} M^2}} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

$$= E_c^* + \frac{1}{2} \frac{G^2 M_{Sa}^2 M^3}{L_{Oorb}^2} (e^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + (1 + e \cos(\theta - \theta_0))^2 - 2(1 + e \cos(\theta - \theta_0)))$$

soit :

$$E_m = E_c^* + \frac{1}{2} \frac{G^2 M_{Sa}^2 M^3}{L_{Oorb}^2} (e^2 - 1)$$

III.A.3) Le système « saturne+nuage » étant isolé, son énergie mécanique est constante. Si E_c^* augmente, e^2 doit diminuer, donc se rapprocher de 0 : la trajectoire se circularise.

III.B- Localisation équatoriale

III.B.1) Si l'on raisonne dans le référentiel de Saturne, la force d'inertie d'entraînement, est la cause de l'aplatissement des pôles.

III.B.2) Le champ gravitationnel créé par la superposition de différentes distributions de masse est la somme des champs gravitationnels créés par chacune de ces distribution prise seule. La distribution modèle est évidemment la superposition des trois distributions proposées.

III.B.3)a) On commence par calculer le potentiel gravitationnel créé par une distribution à symétrie sphérique de masse M , en un point P situé à une distance r du centre de la distribution (à l'extérieur de cet distribution) :

$$V(P) = -\frac{GM}{r}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de superposition on trouve :

$$V(r, \alpha) = -\frac{GM_0}{r} + \frac{Gm}{r_A} + \frac{Gm}{r_B}$$

$$V(r, \alpha) = -\frac{GM_0}{r} + Gm \left(\frac{1}{(r^2 + b^2 - 2rb \sin(\alpha))^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(r^2 + b^2 + 2rb \sin(\alpha))^{\frac{1}{2}}} \right).$$

b) On suppose $b < R_{Sa} \ll r$. Alors, en faisant un développement limité au 2^{ème} ordre en $\frac{b}{r} \ll 1$:

$$\frac{1}{(r^2 + b^2 \pm 2rb \sin(\alpha))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\left(1 + \frac{b^2}{r^2} \pm 2 \frac{b}{r} \sin(\alpha) \right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{r^2} \pm 2 \frac{b}{r} \sin(\alpha) \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{b^2}{r^2} \pm 2 \frac{b}{r} \sin(\alpha) \right)^2 \right)$$

$$\approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{b}{r} \sin(\alpha) + \frac{b^2}{r^2} \frac{3 \sin^2(\alpha) - 1}{2} \right)$$

et ::

$$V(r, \alpha) \approx -\frac{GM_{Sa}}{r} \left(1 - \frac{2m}{M_{Sa}} \frac{b^2}{r^2} \frac{3 \sin^2(\alpha) - 1}{2} \right)$$

, expression de la forme attendue avec :

$$J_2 = \frac{2mb^2}{M_{Sa} R_{Sa}^2}$$

c) *Application numérique* : $m = M_{Sa} \frac{b^3}{R_{Sa}^3}$ donc $J_2 = 2 \left(\frac{b}{R_{Sa}} \right)^5$. On donne $\frac{b}{R_{Sa}} = \frac{100}{111}$, donc

$$J_2 = 1.19$$

III.B.4) En adaptant le résultat de II.A.1) on a :

$$E_m = E_c + E_p = E_c^* + \frac{L_{Oorb}^2}{2Mr^2} + MV(r, \alpha)$$

III.B.5) L'énergie mécanique est constante : si E_c^* augmente, $E_{p_{eff}} = \frac{L_{Oorb}^2}{2Mr^2} + MV(r, \alpha)$ diminue.

Pour une trajectoire circulaire, le rayon r est tel que $E_{p,eff}$ est minimal. $E_{p,eff}$ ne peut donc diminuer que si α varie. Or pour α compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3 \sin^2 \alpha - 1}{2}$ est minimum en $\alpha = 0$, et $V(r, \alpha)$ aussi. Ainsi, α diminue : la trajectoire se rapproche du plan équatorial.

III.C. Etalement du nuage

III.C.1) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à une portion d'anneau de masse dM assimilable à une masse ponctuelle en mouvement circulaire uniforme de rayon r_0 autour de Saturne. L'anneau étant fait de petites particules, la seule force non négligeable agissant sur dM est l'attraction gravitationnelle de Saturne. En projection sur le vecteur radial $\vec{u}_r$ on a :

$$dM \frac{v^2}{r_0} = \frac{GM_{Sa}dM}{r_0^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_{Sa}}{r_0}}$$

où v est la vitesse.

Le moment cinétique par rapport à O de cette portion d'anneau est :

$$d\vec{L}_{Oorb} = (r_0 \vec{u}_r) \wedge (dM v \vec{u}_\theta) = dM r_0 v \vec{u}_z = dM \sqrt{GM_{Sa} r_0} \vec{u}_z$$

Ainsi :

$$\vec{L}_{Oorb} = \int d\vec{L}_{Oorb} = M r_0 v \vec{u}_z$$

d'où :

$$L_{Oorb} = M \sqrt{GM_{Sa} r_0}$$

L'énergie mécanique de la portion d'anneau et :

$$dE_m = \frac{1}{2} dM v^2 - \frac{GM_{Sa} dM}{r_0} = -\frac{GM_{Sa} dM}{2r_0}$$

L'énergie mécanique de l'anneau est donc :

$$E_m = -\frac{GM_{Sa} M}{2r_0}$$

III.C.2) D'après la question précédente :

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM_{Sa}}{r}}$$

Considérons une portion d'anneau comprise entre r et $r + dr$, et entre θ et $\theta + d\theta$, de masse

$$dM = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$$

avec :

$$\sigma = \frac{M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

- son moment cinétique est :

$$d\vec{L}_{Oorb} = dM r v(r) \vec{u}_z = \sigma \sqrt{GM_{Sa}} r^{\frac{3}{2}} dr d\theta \vec{u}_z$$

- son énergie mécanique est :

$$dE_m = -\frac{GM_{Sa} dM}{2r} = -\frac{GM_{Sa} \sigma}{2} dr d\theta$$

On en déduit, pour l'anneau entier :

$$\vec{L}_{Oorb} = \sigma \sqrt{GM_{Sa}} \int_{r=r_1}^{r_2} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^{\frac{3}{2}} dr d\theta \vec{u}_z = \frac{4\pi}{5} \sigma \sqrt{GM_{Sa}} \left(r_2^{\frac{5}{2}} - r_1^{\frac{5}{2}} \right) \vec{u}_z$$

soit :

$$L'_O = \frac{4}{5} M \sqrt{GM_{Sa}} \frac{r_2^{\frac{5}{2}} - r_1^{\frac{5}{2}}}{r_2^2 - r_1^2}$$

et :

$$E_m = -\frac{GM_{Sa}\sigma}{2} \int_{r=r_1}^{r_2} \int_{\theta=0}^{2\pi} dr d\theta = -\pi GM_{Sa}\sigma(r_2 - r_1)$$

Soit :

$$E'_m = -\frac{GM_{Sa}M}{r_2 + r_1}$$

III.C.3)a) La conservation du moment cinétique impose la condition :

$$\frac{4}{5} \frac{r_2^{\frac{5}{2}} - r_1^{\frac{5}{2}}}{r_2^2 - r_1^2} = \sqrt{r_0}$$

Soit :

$$\frac{r_1}{r_0} = f(X)$$

avec :

$$f(X) = \frac{25}{16} \left(\frac{X^2 - 1}{X^{\frac{5}{2}} - 1} \right)^2$$

b)

$$\frac{\Delta E_m}{E_m} = \frac{E'_m - E_m}{E_m} = \frac{-\frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{2r_0}}{\frac{1}{2r_0}} = 1 - \frac{2r_0}{r_1 + r_2} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right) \frac{r_2}{r_0}}$$

En utilisant le graphe fournit on remplit les 3 premières lignes du tableau ci-dessous, et la 4^{ème} en appliquant la formule ci-dessus :

$\frac{r_1}{r_2}$	1	0,8	0,6	0,5
$\frac{r_1}{r_0}$	1	0,88	0,74	0,64
$\frac{r_2}{r_0}$	1	1,1	1,23	1,28
$\frac{\Delta E_m}{E_m}$	0	<u>-0,010</u>	<u>-0,016</u>	<u>-0,042</u>

c) D'après le tableau, lorsque 1% de l'énergie mécanique initiale a été dissipée :

$$\frac{r_2 - r_1}{r_0} = 1,1 - 0,88 = \underline{\underline{0,22}}.$$