Physique

TSI 2012

4 heures — Calculatrices autorisées

De la Terre à la Lune : Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune. La troisième étudie l'écoulement des gaz dans la tuyère d'un des cinq moteurs-fusées du premier étage de la fusée.

I De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

I.A – Décollage

I.A.1) Choix du référentiel

a) Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_G$.

b) Définir un référentiel galiléen.

Dans toute la suite, $\mathcal{R}_G$ *sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.*

c) Justifier ce choix.

I.A.2) Influence de la base de lancement

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (**figure 1**) autour de l'axe Sud-Nord Tz, à la vitesse angulaire $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad · s^{-1}.

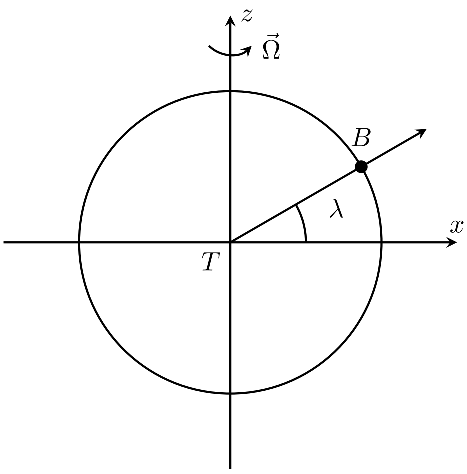

Figure 1 Latitude

a) Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ.

b) Établir l'expression du module v_B de sa vitesse.

c) Application numérique : Calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 28,5$ °) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2$ °).

Une fusée de masse m_F décolle du point B, sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à $\mathcal{R}_G$.

d) Déterminer l'expression de la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B, v_0 et m_F.

e) Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\dfrac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8$ km · s^{-1}. Commenter.

f) Quel(s) autre(s) avantage(s) présente la base de Kourou ?

I.B – Orbite circulaire

I.B.1) Généralités

a) Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}_G$ exercée par une masse ponctuelle m_1 située en O sur une masse ponctuelle m_2 située en M en fonction de m_1, m_2, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $r = \|\vec{r}\|$ et la constante de gravitation $\mathcal{G}$.

b) Rappeler de même l'expression de la force électrique $\vec{F}_E$ exercée par une charge q_1 située en O sur une charge q_2 située en M.

c) Rappeler le théorème de Gauss de l'électrostatique.

d) Par analogie, donner le théorème de Gauss gravitationnel, donnant l'expression du champ gravitationnel $\vec{G}(M)$ créé par une distribution de masse $\mu(M)$.

I.B.2) Champ gravitationnel terrestre

La Terre est approximativement une boule à symétrie sphérique de centre T, de masse totale m_T.

a) Quelle est la direction de $\vec{G}(M)$?

b) De quelle(s) variable(s) dépend-t-il ?

c) Déterminer $\vec{G}(M)$ en tout point M à l'extérieur de la Terre.

d) Calculer son module g_T à la surface de la Terre, avec $\mathcal{G} \times m_T = 4{,}0 \times 10^{14}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

e) Justifier enfin que la force exercée par la Terre sur un satellite de masse m_F situé au point M soit donnée par

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r^3}\overrightarrow{TM}$$

où r est la distance TM.

I.B.3) Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \to \infty$.

b) Montrer que la trajectoire est plane. Quelle est sa nature ?

La trajectoire est maintenant considérée circulaire.

c) Exprimer la vitesse v_0 de la fusée, ainsi que son énergie cinétique E_{c0}, en fonction de $\mathcal{G}$, m_F, m_T et r.

d) Exprimer le rapport $\dfrac{T_0^2}{r^3}$, où T représente la période de révolution du satellite, en fonction de $\mathcal{G}$ et m_T.

Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

e) Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) .

f) Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\dfrac{K}{2r}$, en précisant la valeur de K. Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

II ... à la Lune.

II.A – Objectif Lune

II.A.1) Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune (Figure 2).

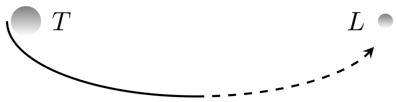

Figure 2 Orbite de transfert

a) Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.

b) En déduire l'expression de la vitesse v_1. Application numérique.

c) Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ?

d) Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^8$ m.

II.A.2) Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L, l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable .

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

a) Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.

b) Déterminer numériquement v_2, vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4{,}9 \times 10^{12}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$ et $R_L = 1{,}74 \times 10^3$ km.

II.B – Déplacements sur la Lune

II.B.1) Caractéristiques du sol lunaire

a) Exprimer le module du champ gravitationnel lunaire g_L à la surface de la Lune, en fonction de g_T, m_T, R_T, m_L et R_L.

b) Un bon athlète possède sur Terre une détente verticale de 1 m. Quelle serait cette détente sur la Lune ?

Le sol lunaire est accidenté et modélisé par une surface ondulée de période spatiale λ, d'équation $z(x) = A\cos(2\pi x/\lambda)$.

Un véhicule assimilé à un point matériel M se déplace sur cette surface suivant la loi $x_M(t) = v \times t$, où v est une constante.

c) Montrer que $z_M(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω. Relier ω, λ et v.

d) Déterminer la valeur maximale de A qui assure le maintien du véhicule au sol.

e) Application numérique : Calculer A_{max} pour $v = 14\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ et $\lambda = 1$ m. Conclure.

II.B.2) Rover lunaire

Les astronautes des missions Apollo XV et suivantes ont utilisé pour leurs déplacements un véhicule spécialement adapté : le rover lunaire. Ce véhicule est sommairement modélisé par un parallélépipède de masse m_R, de centre de gravité G, reposant sur une roue de centre O de masse négligeable. Le vecteur $\overrightarrow{OG}$ reste toujours vertical (figure **3**).

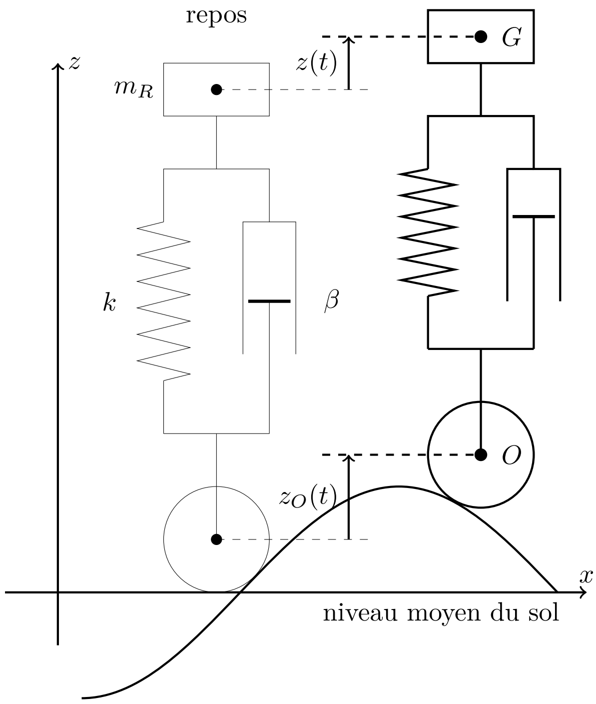

Figure 3 Rover lunaire.

Les positions du centre de gravité et du centre de la roue par rapport à la position de repos sont notées respectivement $z(t) = z_G(t)$ et $z_O(t)$. Le véhicule est relié à la roue par une suspension modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 et un amortisseur fluide de constante d'amortissement β. La force exercée sur la masse m_R est donnée par

$$\vec{F}_f = -\beta \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_O}{\mathrm{d}t} \right) \vec{u}_z$$

a) Préciser l'allongement Δl du ressort au repos.

La roue restant en contact avec le sol, $z_O(t) = A\cos(\omega t)$.

b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m_R, Montrer que $z(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{z} + \omega_1 \dot{z} + \omega_0^2 z = f(t)$$

en précisant les valeurs de ω_0, ω_1 et de la fonction $f(t)$ en fonction des données.

c) Montrer que l'amplitude complexe du mouvement du point G est donnée en régime sinusoïdal forcé par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{z}_O} = \frac{1 + j\dfrac{\omega\omega_1}{\omega_0^2}}{1 + j\dfrac{\omega\omega_1}{\omega_0^2} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

d) Montrer que pour k suffisamment faible, $\underline{H}$ se réduit à la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre, dont on exprimera la pulsation de coupure ω_c en fonction de β et m_R.

L'amplitude du mouvement vertical de G doit être limitée à environ le dixième de celle de O, pour $v = 14\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}, \lambda = 1\ \mathrm{m}$ et $m_R = 700\ \mathrm{kg}$.

e) Proposer une valeur pour β.

f) Proposer une valeur pour k. À quoi sert le ressort ?

g) Quel serait le comportement de ce véhicule sur un terrain de même nature, à la surface de la Terre ?

III Propulsion de la fusée

Cette partie étudie le fonctionnement des moteurs F-1 du premier étage de la fusée Saturn V. La propulsion de la fusée est assurée par des moteurs qui éjectent les produits gazeux de la combustion d'ergols liquides (oxygène/kérosène) à travers une tuyère.

L'écoulement du gaz à travers la tuyère est supposé *permanent*, *isentropique* et *unidirectionnel*.

$T(z)$, $P(z)$, $u(z)$, $h(z)$, $v(z)$, $\rho(z)$, $w(z)$ et $S(z)$ représentent respectivement la température, la pression, l'énergie interne massique, l'enthalpie massique, le volume massique, la masse volumique, la vitesse des gaz et l'aire au niveau de la section de cote z de la tuyère. Le gaz est assimilé à un gaz parfait caractérisé par son indice adiabatique γ et sa masse molaire M.

III.A – Étude du gaz

III.A.1) Modèle du gaz parfait

a) Rappeler le modèle du gaz parfait.

b) Donner son équation d'état reliant P, v, T et $r = R/M$ constante du gaz parfait massique pour le gaz étudié.

III.A.2) Transformation isentropique

a) Montrer que pour une transformation adiabatique réversible, Pv^γ reste constant.

b) Quel est le nom de cette loi ?

c) Mettre cette loi sous forme différentielle :

$$a\,\mathrm{d}P + b\,\mathrm{d}v = 0$$

Exprimer a et b en fonction de P, v et γ.

d) Justifier la relation différentielle $\mathrm{d}h = v\,\mathrm{d}P$.

III.B – Tuyère

Le gaz étudié s'écoule dans une tuyère de section variable $S(z)$. Au cours d'une transformation élémentaire, le gaz compris dans le volume délimité par le contour $A_1A_2D_2D_1$ (système fermé Σ) se déplace en $B_1B_2C_2C_1$. Durant cette transformation, chaque section droite de l'écoulement est traversée par la masse élémentaire δm (figure 4).

III.B.1) Premier principe

a) Déterminer le travail élémentaire des forces de pression δW_p en fonction de P_1, v_1, P_2, v_2 et δm, où l'indice 1 (respectivement 2) est relatif à l'état du gaz au voisinage de A_1B_1 (respectivement A_2B_2).

b) Montrer, par application du premier principe, que la quantité $h + w^2/2$ se conserve le long de l'écoulement.

c) Mettre cette loi sous forme différentielle :

$$a'\,\mathrm{d}w + b'\,\mathrm{d}h = 0$$

Exprimer a' et b'.

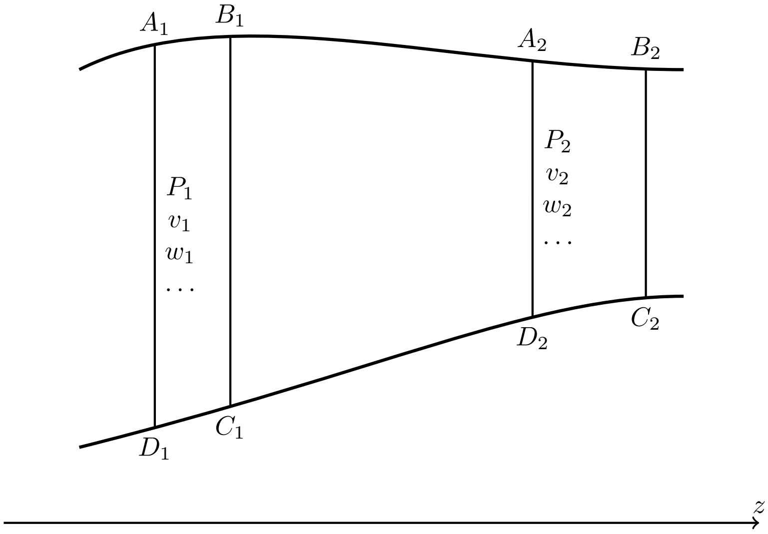

Figure 4 Tuyère

Le nombre de Mach est défini par $\mathcal{M} = w/c$, où c représente la vitesse du son. La vitesse du son est de plus liée à la température par $c = \sqrt{\gamma r T}$.

d) Établir à partir des relations précédentes que

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{1}{\gamma \mathcal{M}^2} \frac{\mathrm{d}P}{P}$$

III.B.2) Conservation du débit

a) Exprimer le débit massique q en fonction de S, w et v.

b) Traduire la conservation de ce débit sous forme différentielle

$$a'' \,\mathrm{d}S + b'' \,\mathrm{d}w + c'' \,\mathrm{d}v = 0$$

Exprimer a'', b'' et c''.

III.B.3) Relation de Hugoniot

a) Déduire des résultats précédents la relation de Hugoniot :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \left(\mathcal{M}^2 - 1\right) \frac{\mathrm{d}w}{w}$$

b) Discuter du signe de dS en fonction de $\mathcal{M}$ pour que le fluide accélère dans la tuyère.

III.B.4) Tuyère de Laval

La tuyère est convergente puis divergente. On appelle col la section de plus faible aire (figure 5). L'indice e (respectivement s et c) est relatif à l'état du gaz à l'entrée (respectivement à la sortie et au col) de la tuyère. La vitesse w_e en entrée de tuyère est négligeable.

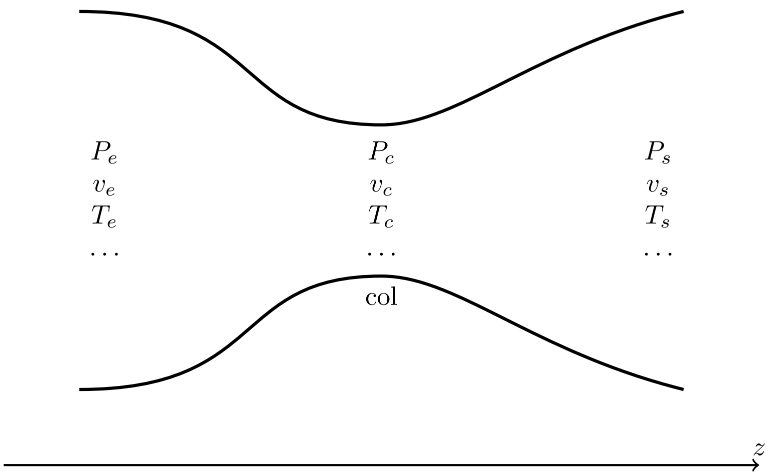

Figure 5 Tuyère de Laval

a) Quelle doit être la valeur $\mathcal{M}_s$ de $\mathcal{M}$ au col pour que le fluide puisse accélérer en chaque point de la tuyère ?

b) Tracer l'allure des courbes $w(z)$ et $P(z)$, en supposant $w(0) \simeq 0$.

c) Montrer enfin que

$$w_s^2 = \frac{2c_e^2}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{(\gamma-1/\gamma)}\right)$$

III.C – Propulsion

III.C.1) Poussée

La force de poussée subie par la fusée en réaction à l'éjection des gaz est donnée par $F_P = qw_s$. Pour la fusée Saturn V, les conditions en entrée de tuyère sont :

$$P_e = 67,5 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$T_e = 3600 \text{ K}$$

a) Calculer la vitesse d'éjection w_s des gaz pour $P_s = 10^5$ Pa, $r = 510$ J $\cdot$ K^{-1} $\cdot$ kg^{-1} et $\gamma = 1{,}2$.

La fusée possède 5 moteurs ayant chacun un débit $q = 2{,}4 \times 10^3$ kg $\cdot$ s^{-1}.

b) Calculer la poussée F_p de la fusée.

III.C.2) Séquence de lancement

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit, en négligeant les frottements, à

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = F_P - m(t)g_T$$

avec $m(t) = m_0 - q_t t$ où m_0 représente la masse initiale totale de la fusée Saturn V et $q_t = 5q$ le débit éjecté total considéré comme constant.

a) Montrer que, si $v(0) = 0$,

$$v(t) = -w_s \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - g_T t$$

b) Montrer que l'altitude $H(t)$ atteinte est donnée, si $H(0) = 0$, par

$$H(t) = w_s\frac{m_0}{q_t}\left[\frac{m(t)}{m_0}\left(\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - 1\right) + 1\right] - g_T\frac{t^2}{2}$$

Note : Une primitive de $\ln(x)$ est $x(\ln x - 1)$.

c) Application numérique : on donne $m_0 = 3000$ t. La masse de carburant utilisée par le premier étage est $m_c = 2000$ t et $q_t = 5q$.

En déduire l'altitude et la vitesse atteinte grâce à cet étage, ainsi que la durée de cette phase, si tout le carburant est consommé.

• • • FIN • • •