

1 ÉTUDE CINÉMATIQUE D'UN MOUVEMENT BIDIRECTIONNEL

1.1 Première expérience

□ 1 -

$$z(G_1) = \frac{1}{m_T} \int_A^B \mu z'(M) dz'$$

La contribution de A à C est nulle, il reste :

$$z(G_1) = \frac{1}{m_T} \int_0^z \mu z' dz'$$

, avec $m_T = \mu L$, donc :

$$z(G_1) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{L}$$

□ 2 - On dérive cette expression par rapport au temps, en utilisant $\dot{z} = v_0$, il vient :

$$\dot{z}(G_1) = \frac{1}{L} z \dot{z} = \frac{v_0}{L} z$$

, puis :

$$\ddot{z}(G_1) = \frac{v_0^2}{L} = \text{cste}$$

□ 3 - De la même façon :

$$z(G_2) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{L}$$

et cette fois $\dot{z} = -v_0$, ce qui donne :

$$\dot{z}(G_2) = -\frac{v_0}{L} z$$

, puis :

$$\ddot{z}(G_2) = \frac{v_0^2}{L} = \dot{z}(G_1)$$

□ 4 - Dans le premier cas, G_1 monte avec une vitesse qui augmente, dans le deuxième cas, G_2 descend avec une vitesse qui diminue. Donc $\mathbf{a}(G_1) = \mathbf{a}(G_2)$.

Le point C (c'est le point de l'espace, pas celui de la corde qui est immobile ni celui de la table lui aussi immobile) de la corde se déplace horizontalement à la même vitesse (en norme) que l'extrémité B le fait verticalement, donc à la vitesse v_0 constante. L'accélération de C est donc nulle.

1.2 Seconde expérience

□ 5 - La composante selon $\hat{\mathbf{z}}$ de l'accélération de B est $-g = \text{cste}$, donc :

$$\dot{z}(B) = -gt + \dot{z}(B, t=0) = -gt$$

, puis :

$$z(B) = -\frac{1}{2}gt^2 + z(B, t=0) = -\frac{1}{2}gt^2 + L$$

B atteint la table pour $t = \tau$ et $z(B) = 0$, ce qui donne :

$$\tau = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \times 24 \times 10^{-1}}{10}} \text{ donc } \tau = 0,69 \text{ s.}$$

□ 6 -

$$z(G) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{L}$$

avec :

$$z = z(B) = L - \frac{1}{2}gt^2, \dot{z} = -gt$$

Donc :

$$\mathbf{AG} = \frac{1}{2L} \left(L - \frac{1}{2}gt^2 \right)^2 \hat{\mathbf{z}}$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\mathbf{v}(G) = -\frac{g}{L} \left(Lt - \frac{1}{2}gt^3 \right) \hat{\mathbf{z}} = -g \left(t - \frac{t^3}{\tau^2} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

, puis :

$$\mathbf{a}(G) = -g \left(1 - \frac{3g}{2L}t^2 \right) \hat{\mathbf{z}} = -g \left(1 - 3\frac{t^2}{\tau^2} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

□ 7 -

✕ On note :

$$a(t) = -g \left(1 - 3\frac{t^2}{\tau^2} \right)$$

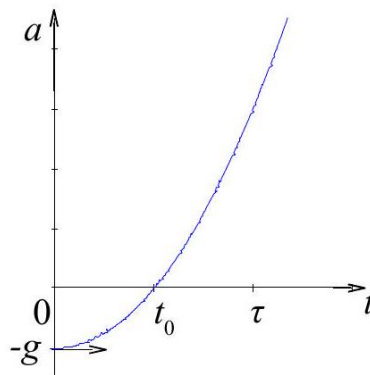


Figure 1

✕ Immédiatement après $t = 0, v \approx 0$; si $t \rightarrow \tau, v \rightarrow 0$, donc puisque $v < 0$ au départ, il existe une valeur minimale de v , pour une date comprise entre 0 et τ .

✕ La vitesse de G présente un minimum lorsque $a(G)$ s'annule, donc pour :

$$t_0 = \tau / \sqrt{3}$$

✕ AN :

$$t_0 = \sqrt{\frac{2L}{3g}} = \sqrt{\frac{2 \times 24 \times 10^{-1}}{3 \times 10}}$$

d'où : $t_0 = 0,40 \text{ s.}$

✕ Vitesse minimale :

$$v_{\min} = v(t = \tau/\sqrt{3}) = \frac{-2L}{\tau\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{L}{\tau}$$

✕ AN :

$$v_{\min} = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{24 \times 10^{-1}}{0,69}$$

, donc : $v_{\min} = -2,7 \text{ m.s}^{-1}$.

2 ÉTUDE DYNAMIQUE DE LA CHUTE VERTICALE

□ 8 - Le principe fondamental de la dynamique (appelé dans la suite PFD) appliqué à la corde donne :

$$m_T \mathbf{a}(G) = m_T \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{balance} \rightarrow \text{corde}}$$

Le PFD appliqué à la balance (on note ressort le système qui maintient l'équilibre de la balance) donne :

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_{\text{corde} \rightarrow \text{balance}} + \mathbf{F}_{\text{ressort}}$$

, avec $\mathbf{F}_{\text{ressort}} = -\mathbf{P}_a$, où $\mathbf{P}_a$ est le poids apparent (indication de la balance).

Dans le cas d'une corde statique $\mathbf{a}(G) = \mathbf{0}$, on en déduit :

$$\mathbf{P}_a = -\mathbf{F}_{\text{ressort}} = \mathbf{F}_{\text{corde} \rightarrow \text{balance}} = -\mathbf{F}_{\text{balance} \rightarrow \text{corde}} = m_T \mathbf{g}$$

Donc dans le cas d'une corde statique, le poids apparent est le poids réel.

Dans cette expérience :

$$\mathbf{a}(G) = -g \left(1 - 3\frac{t^2}{\tau^2}\right) \hat{\mathbf{z}} = \left(1 - 3\frac{t^2}{\tau^2}\right) \mathbf{g}$$

La masse de la corde sur la balance est :

$$m(t) = \mu(L - z(t)) = \mu \frac{1}{2} g t^2$$

, avec $m_T = \mu L$, ce qui donne :

$$m(t) = m_T \frac{t^2}{\tau^2}$$

Le PFD (principe fondamental de la dynamique) appliqué à la corde donne :

$$m_T \mathbf{a}(G) = m_T \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{balance} \rightarrow \text{corde}}$$

En supposant encore l'équilibre de la balance :

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_{\text{corde} \rightarrow \text{balance}} + \mathbf{F}_{\text{ressort}}$$

, avec :

$$\mathbf{F}_{\text{ressort}} = -\mathbf{P}_a$$

Donc :

$$\mathbf{P}_a = m_T (\mathbf{g} - \mathbf{a}(G)) = m_T \mathbf{g} \left(1 - \left(1 - 3\frac{t^2}{\tau^2}\right)\right) = m_T \mathbf{g} 3\frac{t^2}{\tau^2}$$

, d'où :

$$\mathbf{P}_a = 3m(t)\mathbf{g}$$

□ 9 - La balance indique le poids total de la corde lorsque :

$$m(t) = \frac{m_T}{3}$$

, donc pour :

$$t_1 = \tau / \sqrt{3} = t_0$$

En effet, pour $t = t_0$, la vitesse de G est minimale, donc l'accélération de G est nulle : c'est comme en statique :

$$\mathbf{P}_a = m_T \mathbf{g}$$

□ 10 - La partie de corde $[0, z']$ exerce une tension $T(z') \hat{\mathbf{z}}$ sur la partie $[z', z]$.

Le PFD appliqué au morceau de corde compris entre z' et $z' + dz'$, de vitesse constante $-\mathbf{v}_0$, donne :

$$\mathbf{0} = d\mathbf{m}\mathbf{a} = T(z') \hat{\mathbf{z}} - T(z' + dz') \hat{\mathbf{z}} - \mu dz' g \hat{\mathbf{z}}$$

Donc :

$$\frac{dT}{dz'} = -\mu g$$

et donc :

$$T(z') = -\mu g z' + cste$$

Or en $z' = 0$, on a : $T(z' = 0) = 0$, donc :

$$T(z') = -\mu g z'$$

De plus en $z' = z = L - v_0 t$, on a : $-T(z') \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{F}$, d'où :

$$\mathbf{F} = \mu g z \hat{\mathbf{z}}$$

et donc :

$$\mathbf{F} = -\mu (L - v_0 t) \mathbf{g}$$

□ 11 - Le PFD appliqué à la corde s'écrit :

$$m_T \mathbf{a}(G) = \mathbf{F} + m_T \mathbf{g} - \mathbf{P}_a$$

, donc :

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{F} + m_T \mathbf{g} - m_T \mathbf{a}(G)$$

Comme :

$$\mathbf{v}(B) = -v_0 \hat{\mathbf{z}}$$

, la question 2 donne :

$$\mathbf{a}(G) = \frac{v_0^2}{L} \hat{\mathbf{z}}$$

De plus $m_T = \mu L$, donc :

$$\mathbf{P}_a = -(\mu v_0 t g + \mu v_0^2) \hat{\mathbf{z}}$$

Or le poids réel est :

$$\mathbf{P}_{\text{réel}} = m(t) \mathbf{g} = -\mu v_0 t g \hat{\mathbf{z}}$$

On voit donc que la norme du poids apparent est plus grande que celle du poids réel et la différence vaut :

$$P_0 = \mu v_0^2$$

qui est bien une constante.

3 CHUTE BIDIRECTIONNELLE DE LA CORDE

□ 12 - À la date t , tous les points de la corde ont la même norme de vitesse qui vaut :

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

, donc l'énergie cinétique vaut :

$$E_C = \frac{1}{2}m_T \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{2}\mu L \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

L'énergie potentielle vaut :

$$E_P = -m_V g z (G_V) = -\mu z g \frac{1}{2} z = -\frac{1}{2}\mu g z^2$$

Comme la corde est parfaitement flexible et sans frottements, la puissance des actions intérieures est nulles, donc :

$$0 = \frac{dE_m}{dt} = \mu \left(L \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} - g z \frac{dz}{dt} \right)$$

Cette relation est vraie pour tout :

$$\frac{dz}{dt}$$

, donc :

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{g}{L} z = 0$$

□ 13 - En posant $\alpha = \sqrt{\frac{g}{L}}$, la solution générale de l'équation est :

$$z(t) = A \operatorname{ch}(\alpha t) + B \operatorname{sh}(\alpha t)$$

De plus à $t = 0$, $z = 0$, donc $A = 0$, et $\frac{dz}{dt} = V_0$, donc $B = \frac{V_0}{\alpha}$.
D'où :

$$z(t) = \frac{V_0}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha t)$$

Pour une chute libre, $\frac{d^2 z_{CL}}{dt^2} = g$, donc :

$$\frac{dz_{CL}}{dt} = gt + V_0$$

puis :

$$z_{CL}(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$$

On peut comparer les deux expressions pour des dates petites telles que $\alpha t \ll 1$. dans ce cas :

$$z(t) \approx \frac{V_0}{\alpha} \left(\alpha t + \frac{1}{6}(\alpha t)^3 \right) = V_0 t + \frac{1}{6}V_0 \alpha^2 t^3 = V_0 t + \frac{1}{6} \frac{g}{L} t^3$$

Donc $z(t) - z_{CL}(t) \approx -\frac{1}{2}gt^2 + \dots$

Les deux courbes ont la même allure au départ (même tangente), puis $z_{CL}(t)$ augmente un peu plus vite que $z(t)$.

4 VIBRATIONS DE LA CORDE HORIZONTALE FIXÉE AUX DEUX EXTRÉMITÉS

4.1 Modes propres de vibrations

□ 14 -

- ✕ Hypothèses supplémentaires : on néglige les effets de la pesanteur, on néglige les couplage avec l'air et on se place dans l'approximation des petites vibrations.
- ✕ La démonstration est du COURS : on trouve l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

avec :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

□ 15 -

- ✕ On cherche les solutions sous la forme :

$$z(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \phi)$$

- ✕ L'équation de d'Alembert permet de trouver l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

où : $\omega = kc$

- ✕ Les conditions aux limites permettent de trouver le mode propre n :

$$B_n = 0 \text{ et } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

et donc :

$$z_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \phi_n\right)$$

□ 16 - Forme générale de $z(x, t)$ pour des conditions initiales quelconques :

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \phi_n\right)$$

4.2 Corde frappée

□ 17 - Conditions initiales :

$$z(x, 0) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{pour } x \in [0, a - e/2[\cup]a + e/2, L] \\ \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = u & \text{pour } x \in]a - e/2, a + e/2[\end{cases}$$

avec :

$$z(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\phi_n)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} z_{0n} \left(\frac{n\pi c}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin(\phi_n)$$

□ 18 - $z(x, 0) = 0$ implique $\phi_n = \pm\pi/2$ (on prendra $-\pi/2$). On a donc :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} z_{0n} \left(\frac{n\pi c}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

□ 19 - Expression générale du développement en série de Fourier d'une fonction impaire $2L$ - périodique :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

□ 20 - On utilise la fonction $f(t)$ en remplaçant :

$$\begin{cases} a & \text{par } u \\ \Delta t & \text{par } e \\ t_0 & \text{par } a \\ T & \text{par } 2L \end{cases}$$

On a donc :

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_{0n} \left(\frac{n\pi c}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

et :

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ue}{L} \sin \left(\frac{n\pi}{L} a \right) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

D'où, par identification :

$$z_{0n} = \frac{2ue}{n\pi c} \sin \left(\frac{n\pi}{L} a \right)$$

□ 21 - Pour supprimer l'harmonique n , il faut choisir le rapport a/L tel que :

$$\frac{n\pi}{L} a = \pi \Rightarrow \frac{L}{a} = n$$

Pour supprimer $n = 7$, il faut donc prendre :

$$a = \frac{L}{7}$$

5 VIBRATIONS DE LA CORDE HORIZONTALE LIÉE A UNE TABLE D'HARMONIE

5.1 Première modélisation : liaison élastique avec la table d'harmonie

□ 22 - L'équation de propagation est inchangée et les solutions sous forme de variables séparées également :

$$z(x, t) = Z(x) \cdot g(t)$$

avec :

$$Z(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

et :

$$g(t) = A \cos(\omega t)$$

□ 23 - Conditions limites :

En $x = L$:

$$z(x = L, t) = 0 \Rightarrow A \cos(kL) + B \sin(kL) = 0$$

$$\Rightarrow Z(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) = \frac{1}{\cos(kL)} \underbrace{(A \cos(kL) \cos(kx) + B \sin(kx) \cos(kL))}_{-B \sin kL} = \frac{B}{\cos(kL)} \sin(k(x-L))$$

□ 24 - PFD appliqué à l'extrémité (sans masse) de la corde en $x = 0$ et projeté sur l'axe (Oy) :

$$k'y(0, t) = T \sin(\alpha(0, t))$$

$$k'y(0, t) = T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{0, t}$$

$$kB = \frac{k'A}{T}$$

□ 25 -

On a donc le système homogène :

$$\begin{cases} A \cos(kL) + B \sin(kL) = 0 \\ kB = \frac{k'A}{T} \end{cases}$$

A et B étant non nuls, le déterminant est nul :

$$k \cdot \cos(kL) = -\frac{k'}{T} \sin(kL) \Rightarrow \tan(kL) = -\frac{Tk}{k'} \Rightarrow \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = -\frac{T\omega}{k'c}$$

□ 26 - Représentation graphique des solutions :

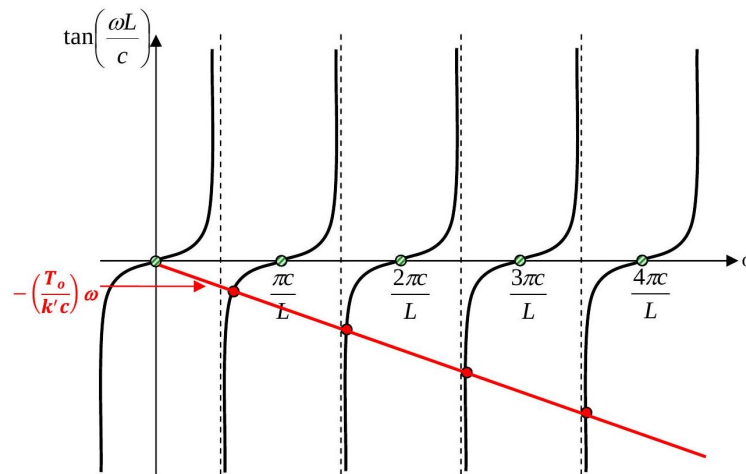


Figure 2

0 = modes propres de la corde (L) fixée à ses deux extrémités.

• = modes propres de la corde (L) fixée à une extrémité et liée à un ressort à l'autre extrémité.

5.2 Deuxième modélisation : liaison massique avec la table d'harmonie

Nous adoptons maintenant un modèle simplifié en considérant que l'extrémité mobile de la corde est liée à une masse M_0 en $x = 0$ (Fig. 3). Cette masse peut se déplacer librement le long de l'axe Oz . Une masse M_0 se trouve à l'extrémité $x = 0$ de la corde ; elle peut se déplacer librement le long de l'axe (Oy). Les solutions de l'équation d'onde sont cherchées sous la forme $z(x, t) = Z(x) \cdot \cos(\omega t)$ où $Z(x)$ vérifie l'équation différentielle établie en 28. La condition en $x = L$, inchangée, conduit à l'expression de $Z(x)$ établie en 30.

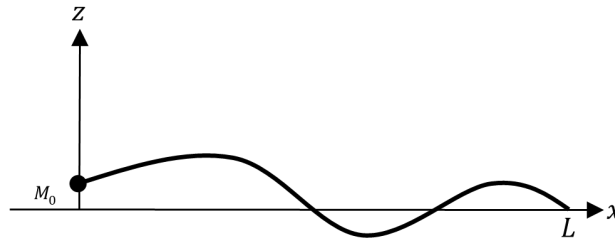


Figure 3 – Liaison massique de la corde avec la table d'harmonie

- 27 - A l'aide de la condition en $x = 0$, établir une relation entre $\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=0}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\bigg|_{x=0}$

Le PFD appliqué à la masse M_0 donne :

$$M_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} = T \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

- 28 - En déduire que k vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète k_n . Établir cette même équation vérifiée par les pulsations propres ω_n .

On a toujours :

$$Z(x) = \frac{B}{\cos(kL)} \sin(k(x - L))$$

Le PFD donne donc :

$$M_0 \omega^2 \tan kL = Tk$$

D'où :

$$\tan kL = \frac{T}{M_0 c^2 k} \propto \frac{1}{k}$$

Soit :

$$\tan \frac{\omega L}{c} = \frac{T}{M_0 c \omega} \propto \frac{1}{\omega}$$

- 29 - Par une représentation graphique appropriée, comparer ω_n à $n \cdot \omega_1$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité massique ?

On obtient le graphe donné par la figure 4 :

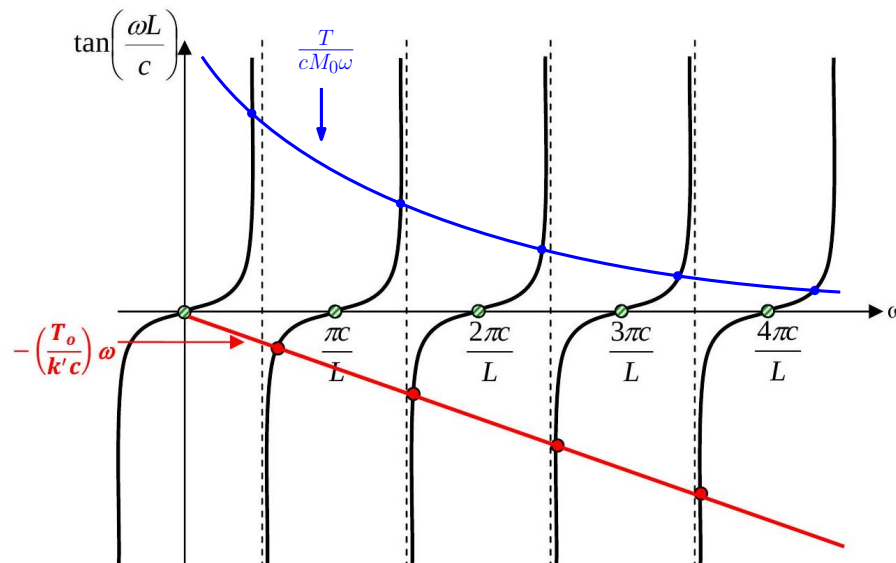


Figure 4 – Modes propres d'une liaison massique

Comme précédemment il y a apparition d'une basse fréquence. Puis on obtient des modes propres décalés par rapport aux modes propres de la corde fixée à ses deux extrémités plus aigus.

6 VIBRATIONS DE LA CORDE VERTICALE FIXÉE AUX DEUX EXTRÉMITÉS

6.1 Position d'équilibre

□ 30 - La tension en M , $\mathbf{T}(M)$, est la force exercée par la partie $[MA]$ sur la partie $[BM]$ (ou par la partie $[z, L]$ sur la partie $[0, z]$). On pose $\mathbf{T}(M) = T(z)\hat{\mathbf{z}}$.
L'équilibre du morceau de corde $[z, z + dz]$ s'écrit :

$$\mathbf{T}(z + dz) - \mathbf{T}(z) + d\mathbf{m}\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

La composante selon $\hat{\mathbf{z}}$ s'écrit :

$$T(z + dz) - T(z) + \mu dz g = 0$$

, d'où :

$$\frac{dT}{dz} = -\mu g$$

et donc :

$$T(z) = -\mu g z + cste$$

De plus $T(z = L) = T(A)$, donc :

$$T(z) = T(A) + \mu g(L - z) = T(A) + m_T g - \mu g z$$

Donc $T(z) > T(A) \gg m_T g$. On en déduit $T(M) \approx T(A)$.

6.2 Vibration

□ 31 - Le PFD appliqué à l'élément compris au repos entre z et $z + dz$ s'écrit :

$$\mu dz \mathbf{a}(G_z) = \mathbf{T}(z + dz) - \mathbf{T}(z) + d\mathbf{m}\mathbf{g}$$

En supposant qu'il n'y a pas de mouvement vertical, la projection sur $\hat{\mathbf{z}}$ redonne le résultat de la question précédente, soit :

$$T(M) \approx T(A)$$

La projection sur $\hat{\mathbf{x}}$ donne :

$$\mu dz \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = T(z + dz) \sin \theta(z + dz, t) - T(z) \sin \theta(z, t) \approx T(A) (\sin \theta(z + dz, t) - \sin \theta(z, t)) \approx T(A) (\theta(z + dz, t) - \theta(z, t))$$

avec :

$$\theta(z, t) \approx \tan \theta(z, t) = \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}$$

, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\mu}{T(A)} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2}$$

C'est bien une équation de propagation (de d'Alembert) avec la célérité :

$$c = \sqrt{\frac{T(A)}{\mu}}$$

AN : $c = \sqrt{\frac{1}{10^{-3}}}$ donne $c = 32 \text{ m.s}^{-1}$.

□ 32 - On cherche $x(z, t) = X(z)A(t)$. L'équation précédente devient :

$$X''(z)A(t) = \frac{1}{c^2}X(z)A''(t)$$

, d'où :

$$\frac{X''(z)}{X(z)} = \frac{1}{c^2} \frac{A''(t)}{A(t)}$$

Le premier membre est indépendant de t , le second indépendant de z , on en déduit que cette expression est une constante qu'on suppose négative (si on la prend positive, on ne peut pas annuler $X(z)$ en 0 et L). On la note $-k^2$.

Nous obtenons :

$$X''(z) + k^2 X(z) = 0$$

, donc :

$$X(z) = X_1 \cos(kz) + X_2 \sin(kz)$$

Comme la corde est fixée en A et B pour tout t , $X(0) = 0$, donc $X_1 = 0$, et $X(L) = 0$, donc $X_2 \sin(kL) = 0$. Comme la solution $X_2 = 0$ ne nous intéresse pas (elle donne $x(z, t) = 0$, donc la corde immobile), nous obtenons $\sin(kL) = 0$, d'où $kL = p\pi$ où p est un entier.

Donc :

$$k = k_p = p \frac{\pi}{L}$$

D'autre part :

$$A''(t) + k^2 c^2 A(t) = 0$$

donne, en posant $\omega_p = k_p c$:

$$A(t) = A_{1p} \cos(\omega_p t) + A_{2p} \sin(\omega_p t)$$

La solution générale est la somme de toutes les solution, donc

$$x(z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \left[A_{1p} \cos\left(p\pi \frac{c}{L} t\right) + A_{2p} \sin\left(p\pi \frac{c}{L} t\right) \right] \sin\left(p\pi \frac{z}{L}\right).$$

Ici, seul le mode 1 est excité, donc il restera :

$$x(z, t) = \left[A_1 \cos\left(\pi \frac{c}{L} t\right) + A_2 \sin\left(\pi \frac{c}{L} t\right) \right] \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$$

De plus, $x(z, t = 0) = a \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$, ce qui donne $A_1 = a$ et $A_2 = 0$, soit :

$$x(z, t) = a \cos\left(\pi \frac{c}{L} t\right) \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$$

□ 33 - $x(z, t = 0) = a \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) + b \sin\left(4\pi \frac{z}{L}\right)$. Comme l'équation différentielle est linéaire, on étudie séparément l'effet des deux termes. Le premier (mode 1) donne le résultat de la question précédente, le second (mode 4) donne $b \cos\left(4\pi \frac{c}{L} t\right) \sin\left(4\pi \frac{z}{L}\right)$. La solution est donc :

$$x(z, t) = a \cos\left(\pi \frac{c}{L} t\right) \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) + b \cos\left(4\pi \frac{c}{L} t\right) \sin\left(4\pi \frac{z}{L}\right)$$

7 VIBRATIONS DE LA CORDE FIXÉE À UNE EXTRÉMITÉ

7.1 Position d'équilibre

□ 34- En A la tension est nulle donc $T(z = L) = 0$. L'équation d'équilibre de la question 20 est toujours valable. Elle donne $T(z) = T(A) + \mu g(L - z) = \mu g(L - z)$.

7.2 Oscillations libres

□ 35 - En négligeant le déplacement vertical de la corde, on peut garder la même valeur de $T(z)$ qu'à l'équilibre.

Le PFD appliqué à l'élément compris au repos entre z et $z + dz$, en projection sur $\hat{\mathbf{x}}$, donne :

$$\mu dz \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = T(z + dz) \sin \theta(z + dz, t) - T(z) \sin \theta(z, t) \approx T(z + dz) \theta(z + dz, t) - T(z) \theta(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} (T(z) \theta(z, t)) dz$$

Donc :

$$\mu \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu g(L - z) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \right)$$

, soit :

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = g(L - z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} - g \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}$$

□ 36 - En rajoutant $\vec{df} = -\alpha \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} dz \hat{\mathbf{x}}$, il vient :

$$\frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} = g(L - z) \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} - g \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} - \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$$

□ 37 - En remplaçant par $\underline{x}(z, t) = \underline{x}_0 \exp[j(\omega t - kz)]$, on obtient la relation de dispersion

$$-\omega^2 = g(L - z) (-k^2) - g(-jk) - \frac{\alpha}{\mu} j\omega$$

Soit :

$$\omega^2 = gLk^2 - jkg + \frac{\alpha}{\mu} j\omega$$

Il y a propagation sans atténuation si k est une constante réelle. La partie imaginaire de l'équation précédente donne :

$$gk = \frac{\alpha}{\mu} \omega$$

, d'où :

$$\alpha = \alpha_0 = g\mu \frac{k}{\omega}$$

La partie réelle donne :

$$\omega^2 = g(L - z)k^2 \approx gLk^2$$

lorsque $z \ll L$ On en déduit :

$$\omega = \sqrt{gL}k$$

, puis :

$$\alpha_0 = \mu \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Commentaires : le frottements sont compensés par la baisse d'énergie potentielle.

□ 38 - La vitesse de phase est définie par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Donc :

$$v_\varphi = \sqrt{gL}$$

La vitesse de groupe est définie (pour k réel) par :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

, d'où :

$$v_g = \sqrt{gL} = v_\varphi$$

Dans ce cas, la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont des constantes (indépendantes de la pulsation), donc le milieu est non dispersif.

□ 39 - En négligeant le terme de frottement et en supposant $z \ll L$, la relation de dispersion de la question 37 devient :

$$\omega^2 = gL\underline{k}^2 - jg\underline{k}$$

En posant $\underline{k} = k_1 + jk_2$, il vient :

$$\omega^2 = gL(k_1^2 - k_2^2 + 2jk_1k_2) - jg(k_1 + jk_2)$$

La partie imaginaire donne :

$$2gLk_1k_2 = gk_1$$

, donc si $k_1 \neq 0$ (nécessaire pour avoir propagation), :

$$k_2 = \frac{1}{2L}$$

$$\underline{x}(z, t) = \underline{a} \exp[j(\omega t - (k_1 + jk_2)z)] = \underline{a} \exp[k_2z] \exp[j(\omega t - k_1z)]$$

Le terme d'amplitude $\underline{a} \exp[k_2z] = \underline{a} \exp[z/(2L)]$ augmente bien lorsque z augmente (sens de la propagation). Ceci est dû au signe positif de k_2 .

Ce terme d'amplification peut compenser les éventuels frottements, une propagation avec frottements est donc possible, ce qui est cohérent avec la question 28.

□ 40 - La partie réelle de l'équation donne :

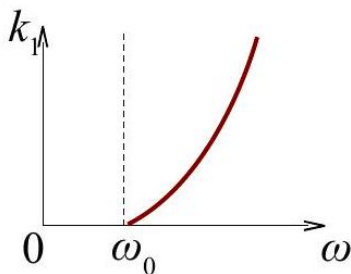
$$\omega^2 = gL(k_1^2 - k_2^2) + gk_2$$

, d'où, en remplaçant k_2 par son expression et en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{4L}}$:

$$\omega^2 = gLk_1^2 + \omega_0^2$$

, ou encore :

$$k_1^2 = \frac{1}{gL}(\omega^2 - \omega_0^2)$$



Les fréquences basses correspondant à $\omega < \omega_0$ conduisent à $k_1^2 < 0$, donc il n'y a pas de propagation (k_1 serait imaginaire pur) pour les basses fréquences. C'est un filtre passe-haut.

□ 41 - En différenciant la relation précédente, on obtient :

$$2k_1 dk_1 = \frac{1}{gL} 2\omega d\omega$$

et donc :

$$\frac{\omega}{k_1} \frac{d\omega}{dk_1} = gL$$

, soit :

$$v_\varphi v_g = gL$$

Évolution d'un paquet d'onde : il y a dispersion et amplification, un paquet d'onde va donc se propager en se déformant et en s'amplifiant.

□ 42 - La puissance traversant la corde à la cote z dans le sens des z croissants est :

$$P(z, t) = -\mathbf{T} \cdot \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} \hat{\mathbf{x}}$$

(produit scalaire entre la force et la vitesse). Donc :

$$P(z, t) = -T(z) \theta(z, t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = -T(z) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} \frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$$

$\frac{\partial x(z, t)}{\partial z}$ et $\frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$ sont tous les deux proportionnels à l'amplitude de $x(z, t)$, donc $P(z, t)$ et sa valeur moyenne sont proportionnels au carré de l'amplitude du mouvement $x(z, t)$ de la corde.

$$\text{Avec } \underline{x}(z, t) = \underline{a} \exp[j(\omega t - \underline{k}z)], \frac{\partial \underline{x}(z, t)}{\partial z} = -j\underline{k}\underline{a} \exp[j(\omega t - \underline{k}z)]$$

et :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = j\omega \underline{a} \exp[j(\omega t - \underline{k}z)]$$

$$\langle P(z, t) \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(T(z) \frac{\partial \underline{x}(z, t)}{\partial z} \left[\frac{\partial \underline{x}(z, t)}{\partial t} \right]^* \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (T(z) j\omega \underline{a} j\underline{k}^* \underline{a}^*) = \frac{1}{2} \omega a^2 T(z) \operatorname{Re}(\underline{k}^*)$$

, donc :

$$\langle P(z, t) \rangle = \frac{1}{2} \omega a^2 T(z) k_1$$

Cette puissance reçue est positive.

Puisque $T(z) = \mu g(L - z)$, $T(z)$ et donc $\langle P(z, t) \rangle$ diminuent lorsque z augmente. La puissance moyenne reçue par l'élément de corde situé entre z et $z + dz$ ($\langle P(z, t) \rangle - \langle P(z + dz, t) \rangle$) est donc positive. On en déduit que son énergie et donc son amplitude augmentent au cours du temps.

7.3 Oscillations forcées

□ 43 - L'équation différentielle vérifiée par $X(z)$ est donc :

$$g(L - z) \frac{d^2 X}{dz^2} - g \frac{dX}{dz} + \omega^2 X(z) = 0$$

□ 44 -

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dx} &= \frac{dF}{du} \frac{du}{dx} = \frac{dF}{du} \left(\frac{-1}{2u} \right) \\ \frac{d^2X}{dx^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{dF}{du} \left(\frac{-1}{2u} \right) \right) \frac{du}{dx} = \left(\frac{d^2F}{du^2} \left(\frac{-1}{2u} \right) + \frac{dF}{du} \left(\frac{1}{2u^2} \right) \right) \left(\frac{-1}{2u} \right)\end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \left(\frac{d^2F}{du^2} \left(\frac{1}{4u^2} \right) - \frac{dF}{du} \left(\frac{1}{4u^3} \right) \right)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle vérifiée par $X(z)$, en remplaçant $L - z$ par u^2 , on obtient bien l'équation différentielle demandée avec :

$$a = \frac{g}{\omega^2}$$

□ 45 - Les solutions sont donc de la forme :

$$\begin{aligned}F(u) &= AJ_0 \left(\sqrt{\frac{4}{a}} u \right) \\ X(z) &= AJ_0 \left(\sqrt{\frac{4(L-z)}{a}} \right)\end{aligned}$$

En utilisant :

$$X(0) = X_0$$

On obtient :

$$A = \frac{X_0}{J_0 \left(\sqrt{\frac{4(L)}{a}} \right)}$$

et donc :

$$X(z) = X_0 \frac{J_0 \left(\sqrt{\frac{4(L-z)}{a}} \right)}{J_0 \left(\sqrt{\frac{4(L)}{a}} \right)}$$

On a donc résonance lorsque :

$$J_0 \left(\sqrt{\frac{4(L)}{a}} \right) = 0$$

Soit, en notant β l'argument de la fonction de Bessel pour les premières valeurs nulles :

$$\sqrt{\frac{4(L)}{a}} = \beta$$

Et donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4L}} \beta = \omega_0 \beta$$

Le tableau nous permet d'avoir les trois premières fréquences de résonance :

$$\omega_1 = 2.69 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\omega_3 = 6.17 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\omega_1 = 9.67 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$