

Dossier
T.I.P.E.

Effet Photo-Acoustique et Application en Spectroscopie

Daniel Barraza Lasso
No. 1963

Session 2014/2015

Introduction :

L'effet photo-acoustique a été découvert par Alexander Graham Bell (1881), inventeur du téléphone, alors qu'il cherchait un appareil transmettant un signal acoustique sans fils à l'aide d'un faisceau de lumière solaire. Lorsqu'on éclaire certains solides avec un faisceau modulé ou haché, un son est produit. Bell a vu son origine dans l'absorption optique. Il a fallu attendre le développement de systèmes de détection plus sensibles (microphones, piézo-électriques) et de sources plus puissantes (lasers) pour mettre en applications le phénomène. Une des applications est la spectroscopie.

Plan :

I. Mise en Évidence du Phénomène

Construction d'une cellule photo acoustique.

II. Modélisation du Phénomène

II.1 Absorption Électromagnétique

- a. Modélisation classique
- b. Origine quantique

II.2 Cellule Photo-Acoustique

- a. Modélisation Thermique
- b. Ondes acoustiques produites

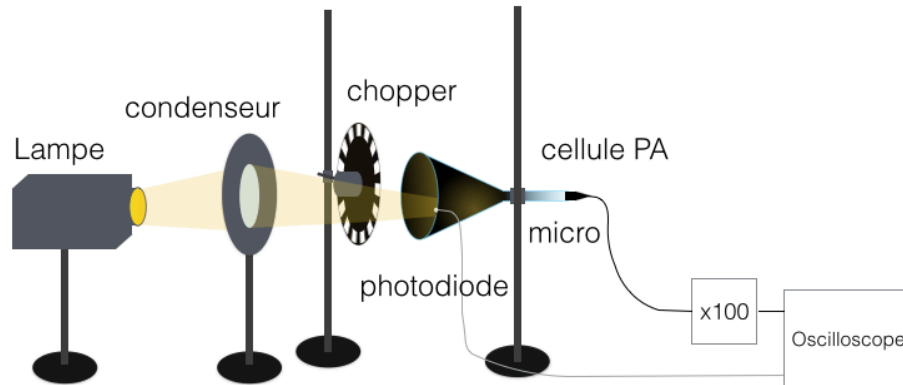
III. Application à la spectroscopie

- a. Traitement du signal
- b. Spectre d'absorption

IV. Bibliographie

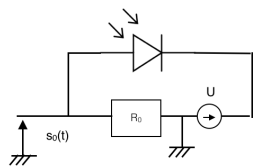
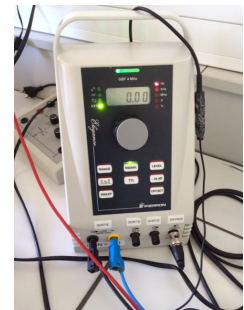
I. Mise en évidence :

On construit une cellule photo-acoustique (PA) pour mettre en évidence le phénomène. On prend comme cellule PA un entonnoir en verre (du laboratoire de chimie) qu'on ferme avec une plaque de verre et de la patafix (moyen économique et facile à faire). Comme solide absorbant on prend le noir de fumé, couche noire qu'on dépose sur le verre en brûlant un bougie. Étant noir, il absorbe à priori beaucoup au moins dans le domaine visible ce qui augmente les chances d'observer le phénomène. On réalise alors le montage suivant :



Le chopper (ou hacheur optique) est en plastique (fabriqué par imprimante 3D) et est mis en rotation à l'aide d'un moteur à courant continu (6V)

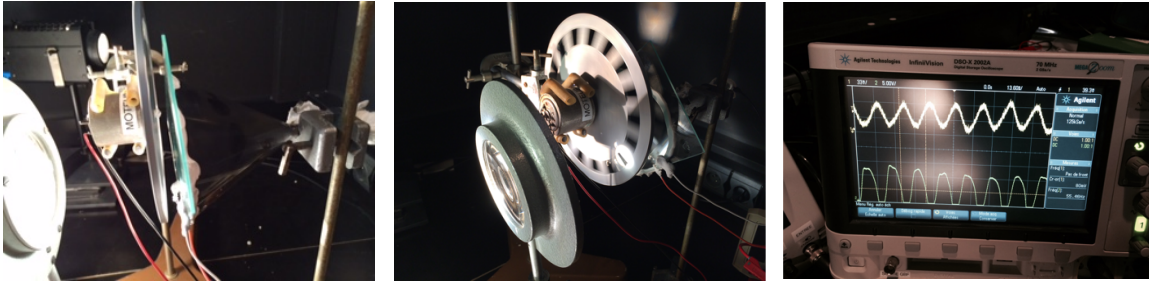
On prend un petit microphone (usuellement utilisé pour l'expérience du tube de Kundt) car il a presque la taille de la sortie de l'entonnoir mais pas tout à fait donc on le fixe aussi avec de la patafix. Ce micro possède une sortie jack puis une adaptation à câble coaxial (femelle). Le lycée ne possède que des adaptateurs coaxial-bifilaire en femelle-femelle ou des T coaxial (male-femelle-male) lorsqu'on branche avec un T pour aller en suite à un amplificateur fait à partir d'un ALI le micro, apparaît un parasite à 50Hz (sensiblement provenant du réseau EDF peut être par effet d'antenne dans le T). On utilise donc un GBF pouvant servir d'ampli. X100 (photo à droite) avec une entrée coaxial et une sortie bifilaire, le parasite demeure mais il est beaucoup moins important.



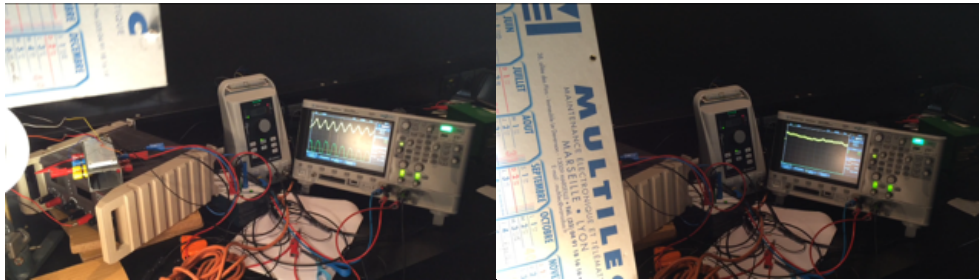
La photodiode est dans un montage polarisé en inverse selon le circuit de gauche. La tension aux bornes de la résistance est alors proportionnelle à l'intensité reçue par la photodiode (jusqu'à un seuil de saturation). Lorsque on met la photodiode sous le faisceau haché on voit des créneaux on a donc accès à la fréquence du hachage de la lumière.

On essaye d'abord avec une lampe L.E.D. et on n'observe (ou entend) rien.

Une lampe plus puissante est nécessaire. D'après une suggestion on essaye avec un rétroprojecteur et on voit un signal à l'oscilloscope.



On vérifie que c'est bien l'effet photo-acoustique qui produit le signal car si l'on cache la lumière incidente le signal disparaît.



Le retro projecteur étant très encombrant on essaye avec une autre lampe incandescente du lycée (12V,10A) qui marche aussi.



Si on colle l'oreille à la sortie de l'entonnoir on peut même entendre le son (c'est un simple ton) devient plus aigu lorsque on augmente la vitesse de rotation du moteur (en augmentant la tension).

Le son est le plus intense (amplitude la plus grande) lorsqu'on focalise le faisceau à faire passer le plus de lumière possible par le chopper (en focalisant sur la zone hachée, par exemple) et diminue aussi si on diminue l'intensité de la lampe.

Constatations :

- Le signal produit est proche d'une sinusoïde.
- Le signal produit est de la même fréquence que le hachage de lumière (On compare le signal provenant du micro et de la photo diode)
- L'amplitude du signal diminue si on augmente la fréquence.

On cherche alors à expliquer ce phénomène physiquement dans la partie suivante.

II. Modélisation du Phénomène

II .1 Absorption Électromagnétique :

II .1.a. Modèle classique :

On considère un rayonnement électromagnétique monochromatique polarisé rectilignement se propageant dans le vide.

Ce champ est alors régi par les équations de Maxwell de vide :

1. Maxwell Gauss (MG)

$$\text{div} \vec{E} = 0$$

2. Maxwell Faraday (MF)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3. Maxwell Ampère (MA)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. Maxwell Thomson (MT)

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Où μ_0 ϵ_0 sont respectivement la perméabilité et permittivité du vide. Et on a $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ où c est la célérité de la lumière dans le vide

Si on considère une onde plane progressive monochromatique le champ $\vec{E}$ se propageant selon z est de la forme $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$ avec $\vec{E}_0$ un vecteur constant et en formalisme complexe $\underline{\vec{E}}(z, t) = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - kz))$

L'équation (MG) en formalisme complexe donne $-jk \vec{e}_z \cdot \underline{\vec{E}} = 0$ soit $\vec{e}_z \cdot \vec{E}_0 = 0$

On parle d'onde transverse électrique (TE) on envisage alors $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$

Vu la forme de $\vec{E}$ on envisage un champ magnétique de la forme $\underline{\vec{B}}(z, t) = \underline{\vec{B}}_0 \exp(j(\omega t - kz))$

Comme pour (MG) (MT) nous donne $\vec{e}_z \cdot \underline{\vec{B}}_0 = 0$ en prenant la partie réelle on a $\vec{e}_z \cdot \vec{B}_0 = 0$ on parle d'onde Transverse Magnétique (TM).

(MF) nous donne $-jK \vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$ soit $K \vec{e}_z \wedge \vec{E}_0 = \omega \underline{\vec{B}}_0$

C'est-à-dire $\underline{\vec{B}}_0$ est réel (pas de déphasage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$) et comme $\vec{e}_z \cdot \vec{B}_0 = 0$ $\vec{e}_z$, $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ forment un trièdre direct $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$

Avec (MA) on a $-jK\vec{e}_z \wedge \vec{B}_0 = \frac{j\omega}{c^2}\vec{E}_0$ avec (MF) et la formule du double produit vectoriel on a

$\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_0 = (-k\vec{e}_z \cdot \vec{E}_0)k\vec{e}_z + k^2\vec{E}_0$ Mais par (TE) on a finalement la relation $k = \frac{\omega}{c}$ (relation de dispersion du vide)

donc on a $\vec{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \exp(j(\omega t - kz))\vec{e}_y$ et $\vec{E}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$

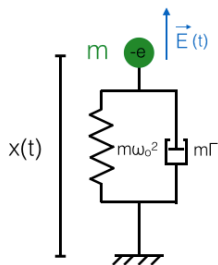
on peut alors calculer le vecteur de Poynting $\vec{P}(z, t) = \frac{\vec{E}(z, t) \wedge \vec{B}(z, t)}{\mu_0}$ qui représente le vecteur de flux surfacique d'énergie électromagnétique.

On définit l'intensité moyenne de l'onde par $I(z) = \langle \vec{P}(z, t) \cdot \vec{e}_z \rangle = \frac{\vec{E}(z, t) \wedge \vec{B}(z, t)^*}{2\mu_0} \cdot \vec{e}_z$

Soit
$$I(z) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

I est indépendante de z car on est dans le vide et on n'a pas de pertes

On utilise le modèle de l'électron élastiquement lié (Lorenz, XIXème) au noyau pour un atome.



On considère un électron de masse $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ et de charge $-e$ où $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$

On note $\vec{OM}$ la distance entre l'électron et sa position d'équilibre.

L'électron est soumis à:

- Une force de rappel élastique $-m\omega_0^2 \vec{OM}$
- Une force dissipative équivalente à un frottement fluide $-m\Gamma \vec{v}$
- La force de Lorentz produite par le champ E.M. traité précédemment $-e\vec{E}(z, t) - e\vec{v} \wedge \vec{B}(z, t)$

L'origine de la force de rappel est le fait que l'électron soit lié au noyau et cet état lié possède une énergie potentielle inférieure à un état libre ou plus éloigné du noyau.

L'origine de la force dissipative sont les chocs de l'électrons avec les autres atomes.

On néglige l'effet de la pesanteur sur l'électron

Application numérique

Pour un Laser Ne-He de 10mW avec un faisceau de rayon 2 mm on obtient une intensité I de approx. 800 Wm^{-2} et on a alors $E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}} \approx 800 \text{ Vm}^{-1}$

Et on a $mg/eE_0 \approx 10^{-14} \ll 1$

De même si on considère que la vitesse caractéristique v de l'électron n'est pas relativiste on a à l'aide de la partie précédente :

$$\frac{\| -e\vec{E}(z, t) \|}{\| -e\vec{v} \wedge \vec{B}(z, t) \|} \approx \frac{E_0}{vB_0} \approx \frac{c}{v} \gg 1$$

On peut négliger la force magnétique devant la force électrique.

De plus comme les dimensions de l'atome sont très petites devant la longueur d'onde de l'onde électromagnétique on peut assimiler le champ électrique au champ $\vec{E}(0, t) = \vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. En effet le rayon d'un atome est compris entre 30 et 300pm alors que pour la lumière la longueur d'onde est comprise entre 400 et 800 nm.

On écrit le principe fondamental de la dynamique pour l'électron on a :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}(0, t) - m\omega_0^2 \vec{OM} - m\Gamma \vec{v}$$

Donc le mouvement n'a lieu que selon $\vec{e}_x$ on note $\vec{OM} = x(t)\vec{e}_x$ et $x(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{x}(t) + \Gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{-e}{m} E_0 \cos(\omega t)$$

On cherche alors la réponse x en régime sinusoïdal forcé.

En formalisme complexe l'équation s'écrit :

$$\underline{x}(t) = \frac{-eE_0 e^{j\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + jm\Gamma\omega}$$

et on a alors :

$$\underline{v}(t) = j\omega \underline{x}(t) = \frac{-j\omega eE_0 e^{j\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + jm\Gamma\omega}$$

La puissance moyenne fournie par la force de coulomb est alors

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{v} \cdot -e\vec{E}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{j\omega e^2 E_0^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + jm\Gamma\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m\Gamma\omega^2 e^2 E_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + m^2\Gamma^2\omega^2}$$

En posant $I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2$ l'intensité de l'onde E.M. et $A = \frac{e^2}{c\epsilon_0 m\Gamma}$ on a :

$$P = \frac{AI_0}{1 + \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Cette puissance est perdue par l'onde électromagnétique.

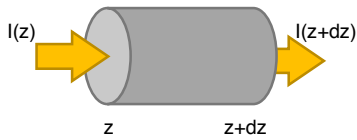
$$\text{De plus on a } P_{diss} = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{v} \cdot -m\Gamma \underline{v}^*) = -\frac{m\Gamma}{2} \cdot |\underline{v}|^2 = -P$$

L'énergie fournie par l'onde à l'électron est totalement cédée au matériau sous forme d'agitation thermique par exemple.

Cette puissance dépend de la pulsation ω

Coefficient d'Absorption

Faisons un bilan de puissance sur un pavé de matériau de section S et longueur dz ayant une densité volumique n d'atomes comme celui qu'on vient de traiter et maintenant l'intensité dépend de z



La puissance qui rentre en z se divise en 2 : la puissance absorbée et celle qui sort en $z+dz$. La puissance moyenne véhiculée par l'onde en z est $SI(z)$ la puissance absorbée est $P \cdot \# \text{atomes}$ i.e. $SdznP$. Avec $I(z)$ au lieu de I_0 dans l'expression précédente de P .

Donc $SI(z) = SI(z+dz) + SdznP$

En simplifiant par S et dz on a à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial I}{\partial z}(z) = -nP = -\frac{nAI(z)}{1 + \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

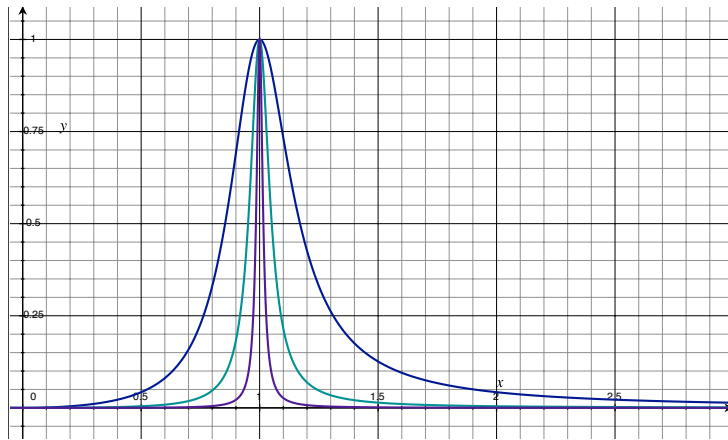
On pose $\alpha(\omega) = \frac{\alpha_{max}}{1 + \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$ où $\alpha_{max} = \frac{ne^2}{c\epsilon_0 m \Gamma}$

Et on a $\frac{\partial I}{\partial z}(z) = -\alpha(\omega)I(z)$ ou en notant $I_0 = I(0)$ on a :

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha(\omega)z)$$

$\frac{1}{\alpha(\omega)}$ est homogène à une longueur, c'est la longueur caractéristique de l'atténuation de I .

$\alpha(\omega)$ est maximale en ω_0



Ici on trace $\frac{\alpha}{\alpha_{max}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$ pour différents valeurs de $\frac{\omega_0}{\Gamma}$

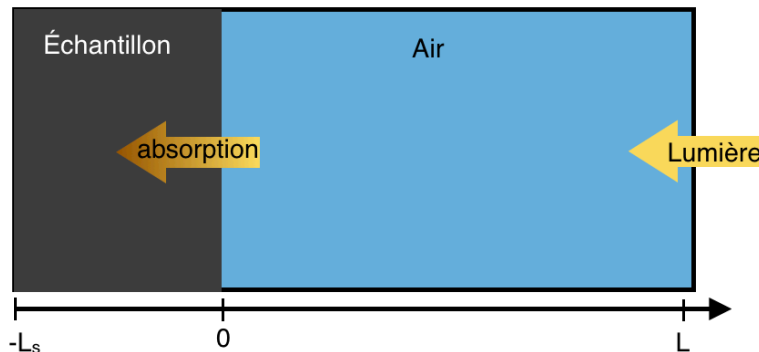
Cependant ce modèle ne suffit pas pour expliquer le phénomène de spectres d'absorption discontinus il faut considérer l'origine quantique de l'absorption.

II. 2Modélisation de la cellule Photo-Acoustique

II.2.a. Modelisation Thermique

On modélise la cellule de la façon suivante:

- Un solide (échantillon) de taille L_s situé entre les abscisses $-L_s$ et 0.
- Un volume d'air compris entre $z=0$ et $z=L$



On retient les hypothèses suivantes :

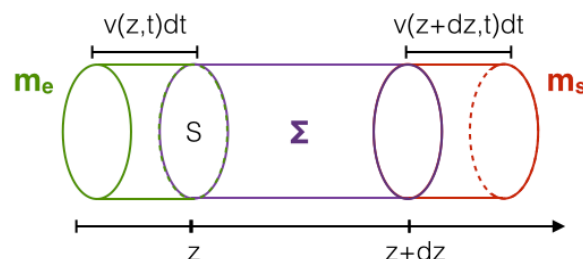
- Le problème est monodirectionnel (On néglige les effets de bord) alors la température ne dépend que de z (et t)
- On note K_a, ρ_a, c_a (respectivement K_s, ρ_s, c_s) la conductivité thermique, la masse volumique et la capacité thermique massique à pression constante de l'air (respectivement échantillon) supposés constantes (les variations de température de pressions étant supposées faibles)
- On ne considère que les transferts thermiques par diffusion (conduction) supposés faits à pression constante (variation de pression faible)
- La lumière incidente n'est absorbée que par l'échantillon
- On note T_a (resp. T_s) la température dans l'air (resp. échantillon)
- On suppose que la paroi en $z=L$ est adiabatique et que en $z=-L_s$ on $T=T_0$
- Le contact thermique en $z=0$ est parfait

Diffusion dans l'air :

On note $\vec{j}_{tha}$ le vecteur flux surfacique d'énergie thermique (Wm^{-2}) dont le flux à travers une surface orientée est le flux d'énergie que la traverse dans le sens de son orientation.

U, H l'énergie interne et enthalpie ; u, h ses grandeurs massiques ; v la vitesse

On fait un bilan d'énergie sur le pavé mésoscopique de longueur dz et section $S \Sigma$.



Si m_e est la quantité de matière que rentre Σ entre t et $t+dt$

m_s est la quantité de matière que rentre Σ entre t et $t+td$

on définit le système fermé lagrangien Σ^* coïncidant avec Σ entre t et $t+dt$ Par:
 $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) + m_e$ $\Sigma^*(t+dt) = \Sigma(t) + m_s$

D'après le premier principe de la thermodynamique (en négligeant les variations d'énergie potentielle et cinétique) la variation d'énergie interne est

$$dU = \delta Q + \delta W' + \delta W^{\text{press}}$$

Où δQ l'échange thermique; δW^{press} le travail fourni par les forces de pression et $\delta W'$ le travail autre que celui de pression fourni au système (ici nul) entre t et $t+dt$.

En transformation monobare ($P_{\text{ext}} = \text{cte}$) on a $dH = dU - \delta W^{\text{press}}$ ($H = U - PV$) donc l'équation devient :
 $dH = \delta Q + \delta W'$

$$\begin{aligned} \text{On a } \Delta_{t \rightarrow t+dt} H^{\Sigma^*} &= H^{\Sigma^*}(t+dt) - H^{\Sigma^*}(t) = H^{\Sigma}(t+dt) - H^{\Sigma}(t) + H^{\text{ms}} - H^{\text{me}} \\ &= \frac{\partial H^{\Sigma}}{\partial t}(t) dt + H^{\text{ms}} - H^{\text{me}} \end{aligned}$$

la masse dans Σ à t est donnée par $\rho_a \cdot S dz$

$$m_e = \rho_a \cdot S \cdot v(z, t) dt \quad m_s = \rho_a \cdot S \cdot v(z, t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \Delta_{t \rightarrow t+dt} H^{\Sigma^*} &= \rho_a S dt \left[dz \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) + v(z+dz, t)h(z+dz, t) - v(z, t)h(z, t) \right] \\ &= \rho_a S dt dz \left[\frac{\partial h}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial [vh]}{\partial z}(z, t) \right] \end{aligned}$$

Mais par définition on a $c_a = \left[\frac{\partial h}{\partial T} \right]_P$ et on considère l'air comme un gaz parfait ($h(T)$)

$$\text{Donc } \frac{\partial H^{\Sigma^*}}{\partial t}(t) = c_a \rho_a S dz \left[\frac{\partial T_a}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial [vT_a]}{\partial z}(z, t) \right]$$

$$\text{Par la loi de Fourier on a } \overrightarrow{j_{tha}} = -K_a \overrightarrow{\text{grad} T_a} = -K_a \frac{\partial T_a}{\partial z}(z, t) \overrightarrow{e_z}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{\partial H^{\Sigma^*}}{\partial t}(t) &= \frac{\delta Q}{dt} = \Phi_e - \Phi_s = \overrightarrow{j_{tha}}(z, t) \cdot S \overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{j_{tha}}(z+dz, t) \cdot S \overrightarrow{e_z} \\ &= -S \frac{\partial \overrightarrow{j_{tha}} \cdot \overrightarrow{e_z}}{\partial x}(z, t) dz = S dz K_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2}(z, t) \end{aligned}$$

on a alors en simplifiant par $S dz$ et en posant $D_a = \frac{K_a}{c_a \rho_a}$ l'équation de diffusion dans l'air :

$$\frac{\partial T_a}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial [vT_a]}{\partial z}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2}(z, t)$$

Le terme $\frac{\partial [vT_a]}{\partial z}$ est un terme supplémentaire par rapport à l'équation de diffusion habituelles il correspond au transport d'énergie par convection. Si on considère la convection négligeable devant la diffusion (conduction) on a $\frac{\partial [vT_a]}{\partial z} \ll D_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2}$ on obtient l'équation de diffusion thermique (ou équation de la chaleur) usuelle:

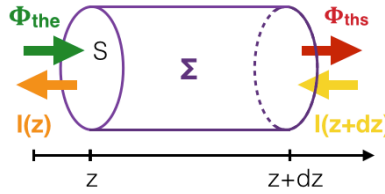
$$\boxed{\frac{\partial T_a}{\partial t}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2}(z, t)} \quad (1)$$

Diffusion dans l'échantillon

On note $I(z,t)$ l'intensité de la lumière incidente.

On garde les mêmes notations que dans l'air en échangeant a par s .

On fait un bilan d'énergie sur le pavé mésoscopique de longueur dz et section S .



Le premier principe de la thermodynamique appliqué à Σ (cette fois ci fermé) en transformation monobare donne : $dH = \delta Q + \delta W'$

En divisant par dt on a $\frac{\partial H^\Sigma}{\partial t}(t) = P_{th} + P'$ où P_{th} est la puissance (ou flux) d'énergie thermique reçue et P' la puissance autre que la (celle des forces de pression) reçue (ici c'est celle de l'onde lumineuse).

$$\begin{aligned} \text{C'est-à-dire, } \frac{\partial H^\Sigma}{\partial t}(t) &= \Phi_e - \Phi_s + S \cdot I(z,t) - S \cdot I(z+dz,t) \\ &= \vec{j}_{ths}(z,t) \cdot S \vec{e}_z - \vec{j}_{ths}(z+dz,t) \cdot S \vec{e}_z + S \frac{\partial I}{\partial z}(z,t) dz \\ &= -S \frac{\partial \vec{j}_{ths} \cdot \vec{e}_z}{\partial x}(z,t) dz + S \frac{\partial I}{\partial z}(z,t) dz \\ &= S dz K_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2}(z,t) + S \frac{\partial I}{\partial z}(z,t) dz \quad (\text{Loi de Fourier}) \end{aligned}$$

Comme l'échantillon est un corps condensé ($H(T)$) par définition de c_s on a

$$\frac{\partial H^\Sigma}{\partial t}(t) = c_s \rho_s S dz \frac{\partial T_s}{\partial t}(z,t)$$

En simplifiant par $S dz$ et en posant $D_s = \frac{K_s}{c_s \rho_s}$ l'équation de diffusion dans l'échantillon :

$$\boxed{\frac{\partial T_s}{\partial t}(z,t) = D_s \left[\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2}(z,t) + \frac{1}{K_s} \frac{\partial I}{\partial z}(z,t) \right]} \quad (2)$$

Réponse en régime stationnaire

Si la lumière incidente n'est pas modulée la puissance moyenne incidente est noté I_0

On considère la puissance moyenne car la période de l'onde E.M. est très inférieure au temps caractéristique de diffusion $T_{diff} = (L^*)^2 / D_{th}$ (la diffusion es un phénomène relativement lent)

D'après la partie **absorption** I suit la loi $I(z) = I_0 \exp(\alpha z)$ (décroissant dans le sens décroissant de z). Alors en régime stationnaire l'équation (2) dévient

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2}(z) = -\frac{\alpha I_0}{K_s} \exp(\alpha z)$$

on note $\bar{T}_s(z)$ la solution de cette equation dans l'échantillon

alors $\exists A, B \in \mathbb{R} / \bar{T}_s(z) = -\frac{I_0}{\alpha \cdot K_s} \exp(\alpha z) + Az + B$

dans l'air l'équation dévient $\frac{\partial^2 \overline{T}_a}{\partial z^2}(z) = 0$

en notant $\overline{T}_a(z)$ la solution de cette equation

$\exists A', B' \in \mathbb{R} / \overline{T}_a(z) = A'z + B'$

Conditions aux limites :

-la paroi en $z=L$ est considérée adiabatique on a $\overrightarrow{j_{tha}} = \vec{0}$

Par la loi de Fourier cela se traduit par $\frac{\partial \overline{T}_a}{\partial z}(L) = A' = 0$

La température est uniforme dans la cellule (air)

-continuité de la température en $z=0$

$$\overline{T}_a(0) = \overline{T}_s(0) \text{ i.e. } -\frac{I_0}{\alpha \cdot K_s} + B = B'$$

- continuité de $\overrightarrow{j_{th}}$ en $z=0$

Par la loi de Fourier on a $-K_a \frac{\partial \overline{T}_a}{\partial z}(0) = -K_s \frac{\partial \overline{T}_s}{\partial z}(0)$

$$\text{Soit } -\frac{I_0}{K_s} + A = 0$$

$$- \overline{T}_s(-L_s) = T_0$$

$$\text{i.e. : } -\frac{I_0}{\alpha \cdot K_s} \exp(-\alpha L_s) - \frac{I_0}{K_s} L_s + B = T_0$$

$$\text{Finalement on a } \overline{T}_s(z) = T_0 + \frac{I_0}{\alpha \cdot K_s} [\exp(-\alpha L_s) - \exp(\alpha z)] + \frac{I_0}{K_s} (L_s + z)$$

$$\text{Et } \overline{T}_a(z) = T_0 + \frac{I_0}{\alpha \cdot K_s} [\exp(-\alpha L_s) - 1] + \frac{I_0}{K_s} L_s = T_0 + \frac{I_0}{\alpha \cdot K_s} \exp(-\alpha L_s) + \frac{I_0}{K_s} L_s \left[1 - \frac{1}{\alpha L_s} \right]$$

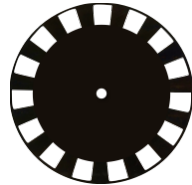
Si on suppose que la lumière qui pénètre l'échantillon est totalement absorbée ($\alpha L_s \gg 1$)

$$\text{On a } \overline{T}_a(z) \approx T_0 + \frac{I_0}{K_s} L_s$$

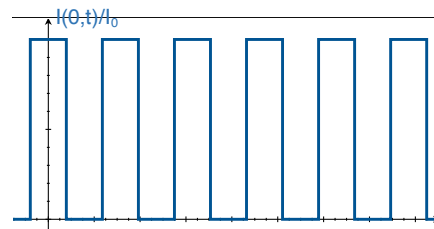
On ne peut pas mesurer α

Réponse en régime variable

On cherche à créer une excitation sinusoïdale. Pour cela on utilise un hacheur optique :



Un disque troué régulièrement qu'on fait tourner à vitesse constante à l'aide d'un moteur à courant continu. L'intensité moyenne est alors une fonction créneau.



On l'assimile à sa composante continue et son fondamental de sorte que $I(0,t) = I_0(1 + \cos(\Omega t))$

Et alors on a $I(z,t) = I_0 \exp(\alpha z) + I_0 \exp(\alpha z) \cdot \cos(\Omega t)$

Comme les equations sont lineaires on envisage de solutions du type

$$\boxed{T_a(z, t) = \overline{T}_a(z) + \widetilde{T}_a(z, t)} \quad \text{et} \quad \boxed{T_s(z, t) = \overline{T}_s(z) + \widetilde{T}_s(z, t)}$$

Où $\overline{T}_a(z)$ et $\overline{T}_s(z)$ sont les réponses au terme I_0 trouvées dans la partie precedente et

$\widetilde{T}_a(z, t)$ et $\widetilde{T}_s(z, t)$ sont les réponses au terme $I_0 \cos(\Omega t)$ (reponses en regime sinusoidal forcé).

En formalisme complexe on cherche des solutions de la forme:

$\overline{T}_a(z, t) = \theta_a(z) \exp(j\Omega t)$ et $\overline{T}_s(z, t) = \theta_s(z) \exp(j\Omega t)$ avec $\theta_a(z)$ et $\theta_s(z)$ des fonctions à priori complexes.

Solution dans l'air

$\overline{T}_a(z, t)$ est solution de (1) (il suffit de sustraire l'équation vérifiée par $\overline{T}_a(z)$ à (1))

$$\frac{\partial \overline{T}_a}{\partial t}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 \overline{T}_a}{\partial z^2}(z, t)$$

en reinjectant et simplifiant $\exp(j\Omega t)$ par on obtient l'équation vérifiée par $\theta_a(z)$:

$$\frac{\partial^2 \theta_a}{\partial z^2}(z) - j \frac{\Omega}{D_a} \theta_a(z) = 0$$

comme $j = e^{j\frac{\pi}{2}} = \left[e^{j\frac{\pi}{4}} \right]^2 = \left[\frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \right]^2$ en posant $\delta_a = \sqrt{\frac{2D_a}{\Omega}}$ on a une EDL₂ à coefficients constants

donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \theta_a(z) = \lambda \exp\left(-\frac{(1+j)}{\delta_a} z\right) + \mu \exp\left(\frac{(1+j)}{\delta_a} z\right)$

Application numerique:

Pour l'air a 1 bar et 300K on a $D_a = 1.9 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ si la fréquence de hachage est 100Hz on a $\delta_a = 0.246 \text{ mm}$

alors que L (longueur de la cellule) es de l'ordre de quelques cm. On a $\delta_a \ll L$ comme

$\overrightarrow{j_{tha}}(L, t) = \vec{0}$ pour tout t, par la loi de Fourier on doit avoir $\frac{\partial \overline{T}_a}{\partial z}(L) + \frac{\partial \overline{T}_a}{\partial z}(L, t) = \frac{\partial \overline{T}_a}{\partial z}(L, t) = 0$

donc $\frac{\partial \theta_a}{\partial z}(L, t) = 0$ comme $\delta_a \ll L \exp(L/\delta_a)$ est très grand donc $\mu = 0$

en posant $\theta_a(0) = \theta_0$ on a :

$$\theta_a(z) = \theta_0 \exp\left(-\frac{(1+j)}{\delta_a} z\right)$$

Solution dans l'échantillon

$\overline{T}_s(z, t)$ est solution de :

$$\frac{\partial \overline{T}_s}{\partial t}(z, t) = D_s \left[\frac{\partial^2 \overline{T}_s}{\partial z^2}(z, t) + \frac{\alpha I_0}{K_s} \exp(\alpha z) \cos(\Omega t) \right]$$

Il suffit de sustraire l'équation vérifiée par $\overline{T}_s(z)$ à (2)

Alors en formalisme complexe en simplifiant par $\exp(j\Omega t)$ par on obtient l'équation vérifiée par $\theta_s(z)$:

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial z^2}(z) - \left(\frac{1+j}{\delta_s} \right)^2 \theta_s(z) = -\frac{\alpha I_0}{K_s} \exp(\alpha z)$$

En posant $\delta_s = \sqrt{\frac{2D_s}{\Omega}}$ EDL₂ à coefficients constants avec second membre

$z \mapsto -\frac{\alpha I_0}{K_s} \exp(\alpha z) \cdot \frac{1}{\alpha^2 - \left(\frac{1+j}{\delta_s}\right)^2}$ est une solution particulière de l'équation donc

$$\begin{aligned} \exists \lambda', \mu', \theta_s(z) &= \lambda' \exp\left(-\frac{(1+j)}{\delta_s} z\right) + \mu' \exp\left(\frac{(1+j)}{\delta_s} z\right) - \frac{\alpha I_0}{K_s} \exp(\alpha z) \cdot \frac{1}{\alpha^2 - \left(\frac{1+j}{\delta_s}\right)^2} \\ &= \lambda' \exp\left(-\frac{(1+j)}{\delta_s} z\right) + \mu' \exp\left(\frac{(1+j)}{\delta_s} z\right) - \frac{\alpha I_0 \delta_s^2}{K_s (\alpha^2 \delta_s^2 - 2j)} \exp(\alpha z) \end{aligned}$$

Pour avoir $T_s(z, t) = T_0$ pour tout t on doit avoir $\theta_s(-L_s) = 0$

Si on suppose que la lumière qui pénètre l'échantillon est totalement absorbée ($\alpha L_s \gg 1$)

Et que l'échantillon est thermiquement épais ($L_s \gg \delta_s$)

On a $\theta_s(-L_s) \approx \lambda' \exp\left(\frac{(1+j)}{\delta_s} L_s\right) = 0$ or $\exp\left(\frac{L_s}{\delta_s}\right)$ est grand par hypothèse on a $\lambda' = 0$

Et par continuité de la température on a $\theta_s(0) = \theta_0 = \mu' - \frac{\alpha I_0 \delta_s^2}{K_s(\alpha^2 \delta_s^2 - 2j)}$

Finalement on a :

$$\theta_s(z) = \theta_0 \exp\left(\frac{(1+j)}{\delta_s} z\right) + \frac{\alpha I_0 \delta_s^2}{K_s(\alpha^2 \delta_s^2 - 2j)} \left[\exp\left(\frac{(1+j)}{\delta_s} z\right) - \exp(\alpha z) \right]$$

on écrit la continuité de $\vec{J}_{th}$ en $z=0$ on a donc par la loi de Fourier (en complexe)

$$\begin{aligned} -K_a \frac{\partial \theta_a}{\partial z}(0) &= -K_s \frac{\partial \theta_s}{\partial z}(0) \\ \theta_0 K_a \frac{(1+j)}{\delta_a} &= -K_s \theta_0 \frac{(1+j)}{\delta_s} - \frac{\alpha I_0 \delta_s^2}{(\alpha^2 \delta_s^2 - 2j)} \cdot \frac{(1+j)}{\delta_s} + \frac{\alpha^2 I_0 \delta_s^2}{(\alpha^2 \delta_s^2 - 2j)} \end{aligned}$$

si $\alpha \delta_s \gg 1$ on a $\alpha^2 \delta_s^2 - 2j \approx \alpha^2 \delta_s^2$

donc $\theta_0 \left(\frac{K_a}{\delta_a} + \frac{K_s}{\delta_s}\right) (1+j) \approx I_0$

on n'a pas accès à α

si $\alpha \delta_s \ll 1$ $\alpha^2 \delta_s^2 - 2j \approx -2j$

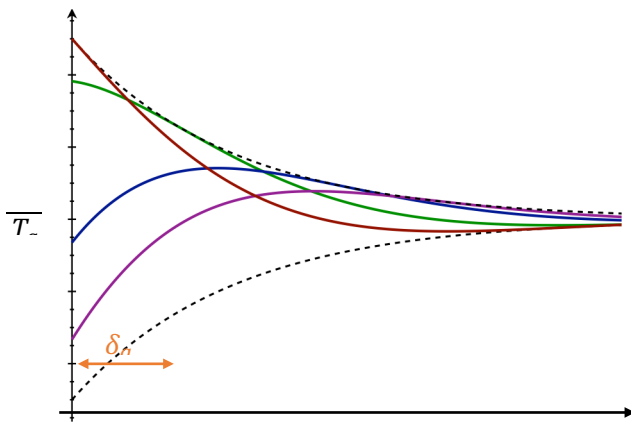
donc $\theta_0 \left(\frac{K_a}{\delta_a} + \frac{K_s}{\delta_s}\right) (1+j) \approx \frac{\alpha I_0 \delta_s^2}{2j} \left[\frac{(1+j) - \delta_s \alpha}{\delta_s} \right] \approx \frac{\alpha I_0 \delta_s}{2j} (1+j)$

soit $\theta_0 \approx -j \frac{\alpha I_0 \delta_s}{2} \cdot \frac{1}{\frac{K_a}{\delta_a} + \frac{K_s}{\delta_s}}$

en prenant la partie réelle de $\widetilde{T}_a(z, t)$ on a :

$$\widetilde{T}_a(z, t) = |\theta_0| \exp\left(-\frac{z}{\delta_a}\right) \cos\left(\Omega t - \frac{z}{\delta_a} - \frac{\pi}{2}\right)$$

C'est une onde plane progressive amortie, c'est l'effet de peau thermique.



On voit $\widetilde{T}_a(z, t)$ à différents instants.

δ_a est appelé profondeur de pénétration ou «épaisseur de peau» par analogie avec l'électromagnétisme. Au delà de δ_a on peut considérer l'onde comme totalement amortie (en $z=\delta_a$ l'amplitude est divisé par e)

On

a

$$\widetilde{T}_a(z, t) = \alpha \frac{I_0}{2} \cdot \frac{\delta_s}{\frac{K_a}{\delta_a} + \frac{K_s}{\delta_s}} \exp\left(-\frac{z}{\delta_a}\right) \sin\left(\frac{z}{\delta_a} - \Omega t\right)$$

$\widetilde{T}_a(z, t)$ est proportionnel à α et à l'intensité incidente

En pratique on peut se placer dans le cas $\alpha \delta_s \ll 1$ en augmentant la fréquence du chopper (ce qui diminue δ_s)

II.2.b. Onde Acoustique

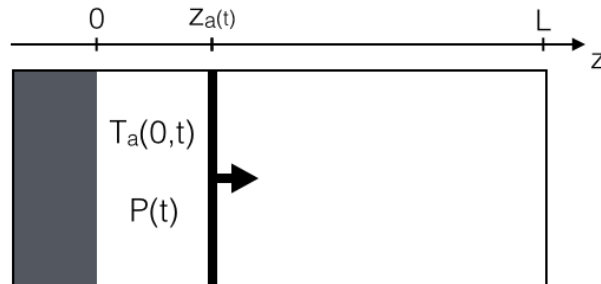
On modélise le phénomène par un piston libre (paroi mobile) sans masse ni frottements.

Vu que $\delta_a \ll L$ on assimile la température uniforme $T_a(0, t) = \overline{T_a} + \widetilde{T_a}(0, t)$ au volume d'air compris entre $z=0$ et $z=z_a = \delta_a + \delta z_a(t)$.

La pression $P(t) = P_0 + \delta P(t)$ est supposée uniforme.

Toutes les variations sont supposées petites.

On assimile l'air à un gaz parfait (de coefficient de Laplace $\gamma=1,4$) et on suppose ses transformations adiabatiques réversibles dans la zone $]z_a, L[$



L'air de la zone $]z_a, L[$ vérifie la loi de Laplace $PV^\gamma = cte$

En faisant une différentielle logarithmique on a $\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$

C'est-à-dire $\frac{\delta P(t)}{P_0 + \delta P(t)} = -\gamma \frac{S \delta z_a(t)}{S(L - \delta z_a)}$ comme les variations sont petites on a $\frac{\delta P(t)}{P_0} = -\gamma \frac{\delta z_a(t)}{L}$

Pour l'air dans $]0, z_a[$ on a $PV/T = cte$

Avec une différentielle logarithmique on a $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T} = 0$ avec les variations petites on a

$$\frac{\delta P(t)}{P_0} + \frac{\delta z_a(t)}{\delta_a} = \frac{\widetilde{T_a}(0, t)}{\overline{T_a}}$$

donc

$$\delta P(t) = P_0 \frac{\gamma \delta_a}{L} \left(1 + \frac{\gamma \delta_a}{L}\right) \frac{\widetilde{T_a}(0, t)}{\overline{T_a}} = -\alpha \frac{I_0}{2} \cdot \frac{\delta_s}{\frac{K_a}{\delta_a} + \frac{K_s}{\delta_s}} \cdot P_0 \frac{\gamma \delta_a}{L \overline{T_a}} \left(1 + \frac{\gamma \delta_a}{L}\right) \sin(\Omega t)$$

L'amplitude de l'onde acoustique est proportionnel à α et à l'intensité incidente

Application numérique

On prend $I_0 = 10^3 \text{ W m}^{-2}$

On prend un échantillon de silicium dont $K_s = 148 \text{ W/mK}$ $c_s = 714 \text{ J/(K·Kg)}$ $\rho_s = 2,33 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$

Et une fréquence de chopper de 100Hz

Pour la longueur d'onde choisie on a $\alpha = 10 \text{ m}^{-1}$

On a alors $\delta_s = 5,32 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 2\delta_a$

Or $K_a = 0.0262 \text{ W/mK} \ll K_s$

L'amplitude de $\widetilde{T}_a(z, t)$ est $\approx \alpha \frac{I_0}{2K_s} = 9,57 \cdot 10^{-6} \text{ K}$

Les variations de température sont bien très petites ce qui justifie le fait de considérer K_a, ρ_a, c_a constants.

En prenant $\overline{T_a} = 300\text{K}$ $P_0 = 1 \text{ bar}$ $L = 5 \text{ cm}$

On a $\frac{\gamma \delta_a}{L} = 6.88 \cdot 10^2$ (adimensionné)

Et donc l'amplitude de $\delta P(t)$ est $P_m = 6.64 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \ll P_0$

L'équation d'Euler est :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P$$

cette équation à une dimension donne linéarisée (ne gardant que l'ordre 1) dans l'hypothèse acoustique ($P(z, t) = P_0 + P_1(z, t)$ avec $P_1(0, t) = \delta P(t)$ et $P_0 \gg \delta P(t)$, $c_{\text{son}} \gg v$) et à une dimension donne :

$$\rho_a \frac{\partial v}{\partial t}(z, t) = -\frac{\partial [P_1]}{\partial z}(z, t)$$

Par l'équation d'Euler linéarisée l'amplitude de la vitesses dans l'air est $V_m = P_m / (\rho_a \cdot c_{\text{son}})$

avec $c_{\text{son}} = 347.28 \text{ m/s}$ et $\rho_a = 1,177 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$ à 300K

donc $V_m = 1,076 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$

On peut vérifier alors l'hypothèse de convection négligeable dans l'équation

$$\frac{\partial T_a}{\partial t}(z, t) + \frac{\partial [v T_a]}{\partial z}(z, t) = D_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2}(z, t)$$

Par analogie avec le nombre de Reynolds en écoulement visqueux on calcule le rapport

$$\frac{\left| \frac{\partial [v T_a]}{\partial z}(z, t) \right|}{\left| D_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2}(z, t) \right|} \text{ en ordre de grandeur et on a}$$

$\frac{LV_m}{D_a} \approx 0.03 \ll 1$ Le transport d'énergie thermique par diffusion domine devant celui par convection.