

# 1 Mécanique des fluides

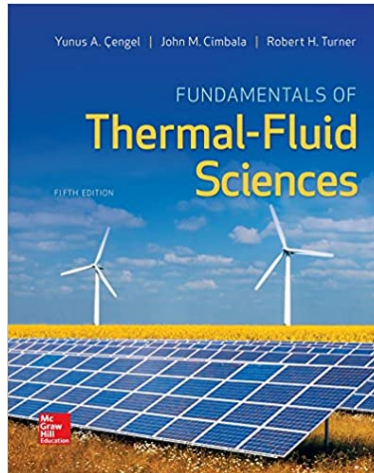


FIGURE 1 – La bible de la mécanique des fluides

On note  $\mathcal{C}$  les constantes (indépendantes du temps et de l'espace).

## 1.1 Statique des fluides

SVF

- ✗ Montrer que la résultante des forces de pression agissant sur une particule fluide, vérifie :

$$d\vec{F} = -\vec{\text{grad}}P d\tau$$

- ✗ Établir l'expression donnant l'évolution de la pression dans une atmosphère isotherme.
- ✗ Établir l'expression donnant l'évolution de la pression dans une atmosphère poly-tropique (évolution isentropique des particules fluides).
- ✗ Établir l'expression de l'invariant hydrostatique (fluides incompressibles). En déduire la pression au fond du verre :

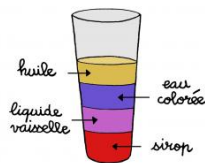


FIGURE 2

- ✗ Établir l'expression de la période des oscillations d'un cube flottant à la surface de l'eau.
- ✗ Établir la résultante des forces de pression exercées sur le barrage ci dessous :

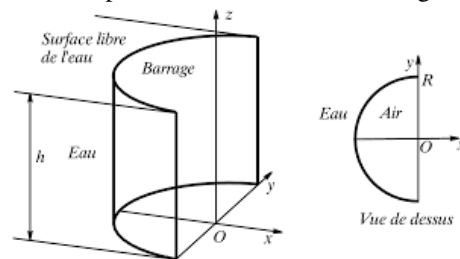


FIGURE 3

## 1.2 Vecteur densité de courant de masse

SVF

Montrer que le vecteur densité de courant de masse, en un point  $M$  de l'espace, vérifie :

$$\vec{j}_m(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}, t)\vec{V}(\vec{r}, t)$$

Où  $\mu(\vec{r}, t)$  est la masse volumique en un point  $M$  du fluide et  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  est la vitesse de la particule fluide en  $M$

## 1.3 Équation de continuité

SVF

Démontrer la relation de continuité

## 1.4 Conservation du débit massique en régime stationnaire

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement stationnaire, le débit massique se conserve dans un tdc.

## 1.5 Conservation du débit volumique pour un écoulement incompressible

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement incompressible, le débit volumique se conserve dans un tdc.

## 1.6 Champ des vitesses d'un vortex caractérisé par une circulation $C$

SVF

Montrer que le champ des vitesses créé par un Vortex, caractérisé par une circulation  $C$  vérifie :

$$\vec{V} = \frac{C}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

## 1.7 Écoulement potentiel incompressible

SVF

Montrer que le potentiel des vitesses d'un écoulement potentiel, incompressible vérifie :

$$\Delta\phi = 0$$

Résoudre cette équation dans le cas de l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre non portant (en négligeant les effets de bords, on cherchera le potentiel des vitesses sous la forme :  $\phi(r, \theta)$  en coordonnées cylindriques)

On donne :

$$\Delta X(r, \theta, z) = \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

### 1.8 Évolution de la pression perpendiculairement à un écoulement parfait

SVF

Montrer que l'évolution de la pression, dans une direction perpendiculaire à un écoulement parfait, se fait de manière hydrostatique.

### 1.9 Évolution de la pression en direction du centre de courbure d'une ligne de courant

SVF

Montrer que la pression diminue quand on se rapproche du centre de courbure d'une ligne de courant.

### 1.10 Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = f(t)$$

Où  $\Phi$  est le potentiel des vitesses.

(On ne tiendra compte que des forces volumiques de pesanteur)

### 1.11 Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible, stationnaire

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = \mathcal{C} \text{ sur une ldc}$$

(On ne tiendra compte que des forces volumiques de pesanteur)

### 1.12 Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, irrotationnel

SVF

Montrer que, dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, irrotationnel, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = \mathcal{C} \text{ dans tout le fluide}$$

(On ne tiendra compte que des forces volumiques de pesanteur)

### 1.13 Jet homocinétique à l'air libre

SVF

Montrer que la pression dans un jet homocinétique à l'air libre est uniforme et est égale à la pression atmosphérique.

## 1.14 Formule de Toricelli

SVF

Démontrer la formule de Toricelli (vidanges) en déduite la durée de vidange  $\tau$

## 1.15 Effet Venturi

SVF

Montrer, en utilisant le théorème de Bernoulli, l'origine de l'effet Venturi

## 1.16 Lévitiation d'une balle de ping-pong dans l'air

SVF

Interpréter à l'aide des différentes forces s'exerçant sur la balle, l'équilibre de la balle de ping-pong représentée figure 4.

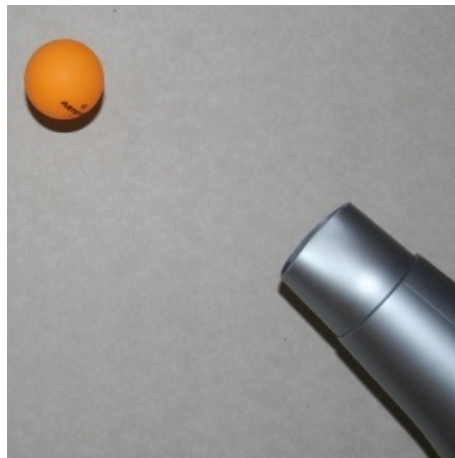


FIGURE 4 – Équilibre d'une balle de ping-pong

### 1.17 Lévation d'une balle dans un entonnoir

SVF

Prolonger les lignes de courant dans le schéma ci-dessous et représenter les forces de pression agissant sur la balle. En déduire la résultante des forces de pression s'exerçant sur la balle.

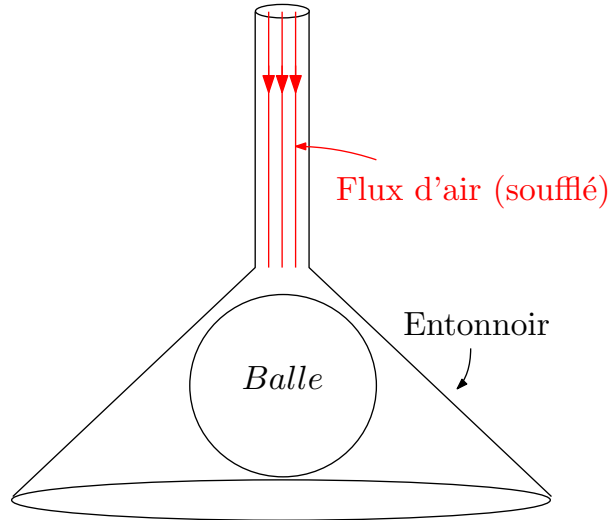


FIGURE 5 – Lévation d'une balle

### 1.18 Effet Magnus - cylindre portant

SVF

Justifier qualitativement, en utilisant l'effet Venturi, l'origine de l'effet Magnus, sur l'exemple du cylindre portant.

### 1.19 Portance d'une aile d'avion

SVF

Expliquer qualitativement, en utilisant l'effet Venturi, l'origine de la portance d'une aile d'avion.  
Expliquer qualitativement, en utilisant le théorème de Kutta -Jukowski, l'origine de la portance d'une aile d'avion.

### 1.20 Nombre de Reynolds

SVF

Justifier l'expression du nombre de Reynolds par 3 méthodes différentes.

### 1.21 Couche limite : nombre de Reynolds local et dimension

SVF

Déterminer la dimension caractéristique d'une couche limite laminaire en déduire le nombre de Reynolds dans cette couche limite (nombre de Reynolds local)

## 1.22 Équation de diffusion

SVF

Montrer que dans le cas d'un écoulement laminaire, incompressible où seules les forces de viscosité interviennent, le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion dont on donnera la diffusivité.  
En déduire la relation entre le temps caractéristique de diffusion et la distance caractéristique de diffusion (diffusion de quantité de mouvement).

## 1.23 Débit de Poiseuille

SVF

Démontrer l'expression du débit de Poiseuille :

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P$$

Par deux méthodes :

- ✘ En utilisant le laplacien, en coordonnées cylindriques, d'un champ scalaire qui ne dépend que de  $r$  :

$$\Delta X(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial X}{\partial r} \right)$$

- ✘ En utilisant la contrainte visqueuse dans le cas d'un champ des vitesses de la forme :  $\vec{V}(M) = V(r) \vec{e}_z$  en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\sigma}(r, t) = \frac{d\vec{F}_{visc}}{dS} \Big|_{(r,t)} = \eta \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{(r,t)} \vec{e}_z$$

## 1.24 Débit de Couette

SVF

On déplace une plaque de masse  $M$  de surface  $S$ , sur une couche de fluide de masse volumique  $\mu$  et de viscosité dynamique  $\eta$ , à la vitesse  $\vec{V}_0$  comme représenté figure 6.

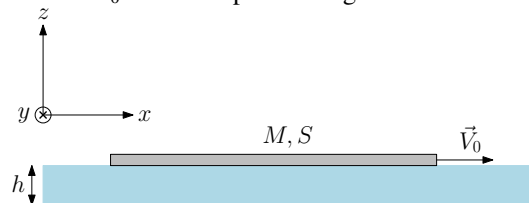


FIGURE 6 – Déplacement d'une plaque à la surface d'un fluide visqueux

L'écoulement du fluide sous la plaque est supposé incompressible et stationnaire et le système est invariant par rapport à  $y$  (profondeur très grande).

Déterminer le débit de l'écoulement induit par le déplacement de la plaque ainsi que la force que doit exercer l'opérateur pour maintenir la translation de la plaque à la vitesse  $\vec{V}_0$ .

En déduire le temps caractéristique d'établissement du régime permanent.

## 1.25 Décollement d'une couche limite

SVF

Expliquer qualitativement l'origine du décollement d'une couche limite. Pourquoi une couche limite turbulente se décolle-t-elle plus difficilement qu'une couche limite laminaire ?

## 1.26 Coefficient de traînée en régime laminaire

SVF

Montrer que le coefficient de traînée en régime laminaire, dans le cas d'un écoulement autour d'une sphère vaut :

$$C_x = \frac{24}{Re}$$

## 1.27 Utilisation du diagramme de traînée

SVF

En utilisant le diagramme ci-dessous, déterminer la vitesse de chute d'une bille d'acier de 2 mm de diamètre dans de l'eau (régime permanent).

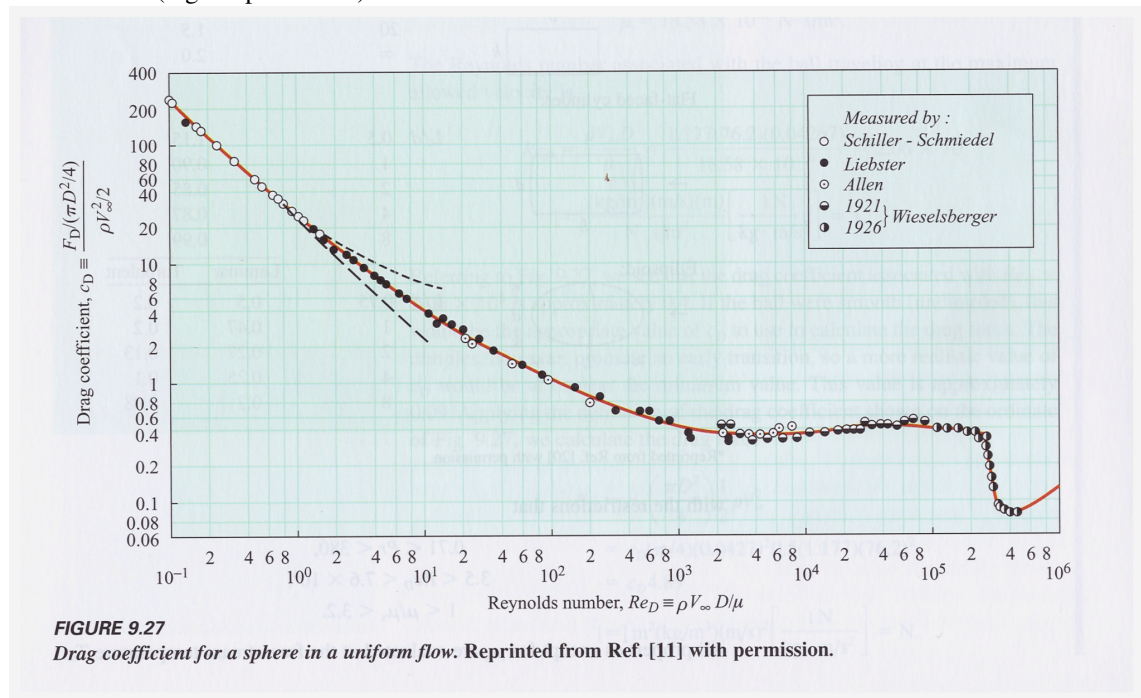


FIGURE 7

## 1.28 Loi de Laplace (tension superficielle)

SVF

Démontrer la loi de Laplace donnant la discontinuité des pressions de part et d'autre d'une interface sphérique soumise à une tension superficielle  $\gamma$  :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$$

## 1.29 Loi de Jurin

SVF

Démontrer, en utilisant trois méthode différentes, la loi de Jurin :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\mu g r}$$

## 1.30 Bilans macroscopiques

SVF

- ✘ Montrer que le bilan d'une grandeur extensive dans un tdc, en régime stationnaire, donne :

$$\frac{DG}{Dt} = D_m (g_s - g_e)$$

- ✘ Montrer que le bilan d'une grandeur extensive dans un tdc comprenant deux niveaux d'entrée (mélange), en régime stationnaire, donne :

$$\frac{DG}{Dt} = (D_{me,1} + D_{me,2}) g_s - (D_{me,1} g_{e1} + D_{me,2} g_{e2})$$

- ✘ Déterminer la puissance de la pompe utilisée pour pomper de l'eau sur une hauteur  $h$  avec un débit volumique  $D_v$  (on négligera les pertes de charges).
- ✘ Retrouver le théorème de Bernoulli par un bilan d'énergie cinétique.
- ✘ Déterminer la force exercé par un opérateur pour maintenir la conduite fixe (écoulement parfait) :

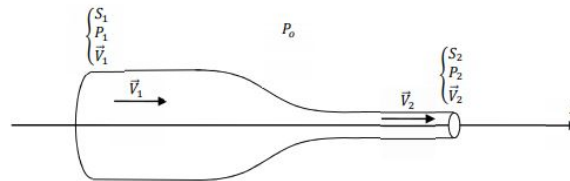


FIGURE 8

- ✘ En utilisant le modèle de Betz, déterminer le rendement maximal théorique d'une éolienne.
- ✘ A l'aide d'un bilan d'énergie cinétique, déterminer la puissance des forces de viscosité dans une conduite.