

PROBLEME

I- Quelques circuits élémentaires.

1. On considère un générateur idéal de courant alternatif sinusoïdal d'intensité efficace i_o , en parallèle avec deux impédances Z_1 et Z_2 (figure 1). On notera \underline{i}_o l'intensité efficace complexe associée à i_o .
On étudie le circuit en régime permanent sinusoïdal.

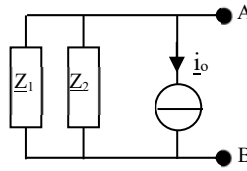


Figure 1

- a. Définir complètement, s'il existe, le générateur de Thévenin équivalent au circuit entre les bornes A et B. Représenter ce générateur.

$$\underline{Z}_T = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

et

$$\underline{E}_T = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} i_o$$

- b. Définir complètement, s'il existe, le générateur de Norton équivalent au circuit entre les bornes A et B. Représenter ce générateur.

$$\underline{Y}_N = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 \cdot Z_2}$$

et

$$\underline{\eta}_N = \underline{i}_o$$

2. On considère le circuit de la figure 2, formé d'une bobine d'inductance L , de résistance nulle, et d'un condensateur de capacité C .

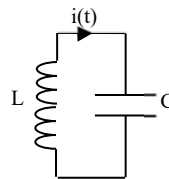


Figure 2 : Circuit LC série

- a. Etablir l'équation différentielle caractéristique de l'évolution de $i(t)$.

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

- b. En déduire la pulsation propre ω du circuit.

$$\omega_o = 1/\sqrt{LC}$$

- c. Donner l'expression générale de $i(t)$. (On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration).

$$i(t) = A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t)$$

3. On considère le circuit de la figure 3, formé des mêmes composants que la figure 2, mais on se place entre A et B, aux bornes des composants qui se trouvent alors en parallèle l'un de l'autre.

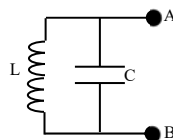


Figure 3 : circuit LC parallèle

- a. Quelle est, en régime sinusoïdal, l'impédance équivalente aux deux composants, pris entre A et B ? (figure 3)

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

Soit :

$$\underline{Z} = \frac{jL\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

b. Que vaut cette impédance pour la pulsation ω ?

$$\underline{Z} \rightarrow \infty$$

c. Comment peut-on alors appeler un tel circuit ?

Circuit bouchon

II- Montage amplificateur.

Dans le domaine des audiofréquences (20, 20 000 Hz), on dispose d'un transistor à effet de champ modélisé par la figure 4.

On note : G : la grille D : le drain S : la source

i_{DS} = courant délivré par le générateur commandé = $s \cdot V_{GS} = s(V_G - V_S)$ où s est une constante positive.

A l'aide de ce transistor, on réalise le montage amplificateur de la figure 5, dont on va étudier le fonctionnement en régime sinusoïdal,

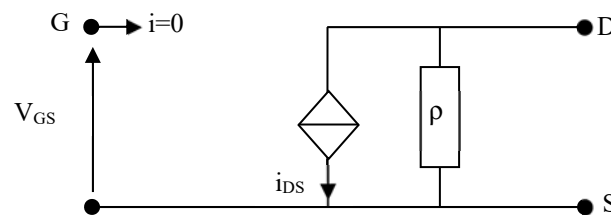


Figure 4 : transistor à effet de champ

de pulsation ω . On donne :

R_g : résistance placée entre la grille et la source.

R_u : résistance d'utilisation, placée entre le drain et la source.

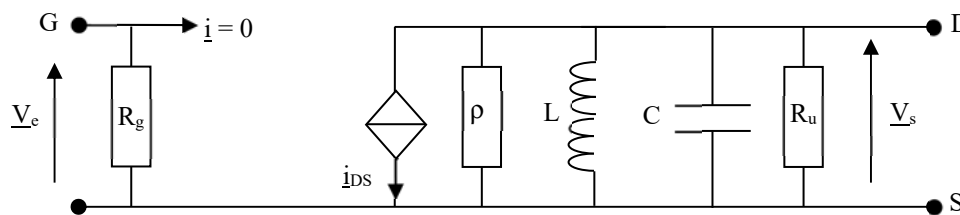
L et C : déjà définies sur la figure 3

ρ : résistance définie sur la figure 4.

$i_{DS}(t)$: courant délivré par le générateur de courant commandé et \underline{i}_{DS} la valeur efficace complexe associée.

$v_e(t)$: tension d'entrée et \underline{V}_e valeur efficace complexe associée.

$v_s(t)$: tension d'entrée et \underline{V}_s valeur efficace complexe associée.



1. Fonction de transfert.

a. Etablir l'expression de l'amplification complexe en tension à la pulsation ω : $\underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$

On exprimera cette amplification en fonction des paramètres : s, R, L, C et ω , en posant : $R = \frac{\rho \cdot R_u}{\rho + R_u}$

$$\underline{V}_s = R_u \cdot \underline{i}_{Ru} = R_u \cdot \frac{\frac{1}{R_u}}{\frac{1}{R_u} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{\rho}} (-i_{GS})$$

$$\underline{V}_s = \frac{-s \underline{V}_e}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}}$$

$$\underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{-s}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}}$$

b. Montrer que \underline{A}_v peut s'écrire : $\underline{A}_v = A_0 \frac{\frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$

où ω est la pulsation définie dans la première partie du problème.
Donner les expressions de Q et A_0 . Pour la suite on prendra $|A_0| > 1$.

$$\underline{A}_v = \frac{-sjL\omega}{1 + \frac{jL\omega}{R} + LC(j\omega)^2}$$

⇒ De la forme :

$$\underline{A}_v = A_0 \frac{\frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$A = -sR < 0$$

2. Phase et gain.

Donner les expressions du module $|\underline{A}_v(\omega)|$, du gain en décibel $G(\omega)$ et de la phase $\phi(\omega)$ de \underline{A}_v .

$$|\underline{A}_v| = |A_0| \frac{\frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} = |A_0| \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}}$$

$$G = 20 \log(|A_0|) + 20 \log \left(\frac{\frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \right) = 20 \log(|A_0|) - 10 \log \left(1 + Q^2 \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2 \right)$$

$$\phi(\omega) = \arg(\underline{A}_v) = \arg\left(\frac{A_0}{<0}\right) + \arg\left(\frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \pm\pi - \arctan\left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

Le signe \pm est déterminé de façon à ce que l'angle $\phi(\omega)$ reste entre $-\pi$ et π .

3. Etude de la résonance.

- a. Montrer que le module de \underline{A}_v est maximal pour $\omega = \omega_0$. Quelle est la fréquence correspondante f_0 (appelée fréquence d'accord) ?

$$|\underline{A}_v| = |A_0| \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}}$$

⇒ $|\underline{A}_v|$ est maximal quand le dénominateur est minimal.

⇒ $|\underline{A}_v|$ est maximal quand $\omega = \omega_0$

⇒ La fréquence d'accord vaut : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

- b. On note $A_{max} = |\underline{A}_v(\omega_0)|$ donner l'expression de A_{max} .

En remplaçant ω par ω_0 dans l'expression de $|\underline{A}_v|$, on détermine A_{max} :

$$A_{max} = sR$$

- c. Que vaut $\phi(\omega_0)$?

$$\phi(\omega) = \pm\pi - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \phi(\omega_0^+) = \pm\pi - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega_0^+}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0^+}\right)\right) \Rightarrow \phi(\omega_0^+) = +\pi \text{ (de façon à ce que } \phi \text{ reste supérieur à } \pi)$$

$$\Rightarrow \phi(\omega_0^-) = \pm\pi - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega_0^-}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0^-}\right)\right) \Rightarrow \phi(\omega_0^-) = -\pi \text{ (de façon à ce que } \phi \text{ reste inférieur à } \pi)$$

4. Diagrammes de Bode.

Dans cette question, on prend : $\omega = 6280 \text{ rad/s}$ et $|A_0| = 10$.

a. Tracer le diagramme asymptotique et le diagramme de Bode de $G(\omega)$ en distinguant les deux cas :

Diagramme asymptotique :

On utilise la composition des diagrammes asymptotiques :

$$G = G_0 + G_1$$

où $G_0 = 20 \log(|A_0|) = \text{cste} > 0$

Asymptote BF pour $G_1 : G_1 = 20 \log\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) \Rightarrow$ Droite de pente 20 dB/dec coupant l'axe des abscisses pour $\omega_1 = Q\omega_0$

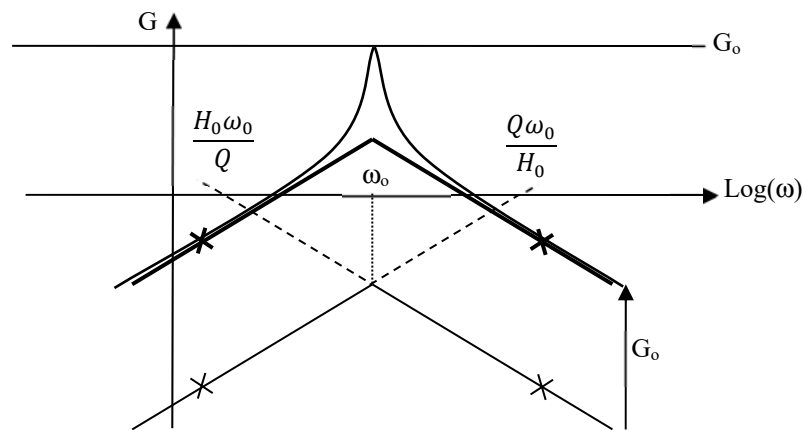
Asymptote HF pour $G_1 : G_1 = -20 \log\left(\frac{Q\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow$ Droite de pente -20 dB/dec coupant l'axe des abscisses pour $\omega_2 = \frac{\omega_0}{Q}$

Diagramme de Bode :

$G(\omega_0) = G_0 > 0$

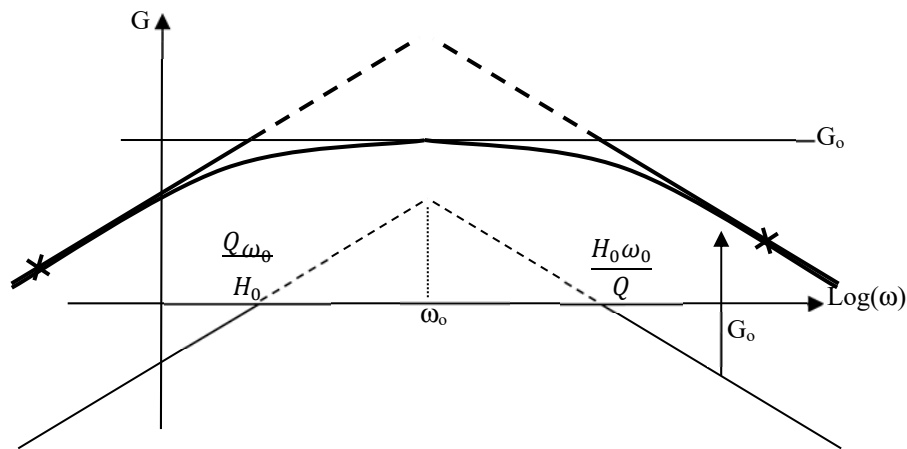
i. Cas où $Q = 10$

$$\omega_1 = Q\omega_0 \gg \omega_0 \text{ et } \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} \ll \omega_0$$



ii. Cas où $Q = 0.1$

$$\omega_1 = Q\omega_0 \gg \omega_0 \text{ et } \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} \ll \omega_0$$



b. Tracer l'allure du diagramme asymptotique et du diagramme de Bode de $\phi(\omega)$ en distinguant les deux cas :

Diagramme asymptotique :

On part de :

$$\underline{A_v} = A_0 \frac{\frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)}{1 + \frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Asymptote BF :

$$\underline{A_v} \approx A_0 \frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)$$

Sachant que $A_0 < 0$ et que $\phi \in [-\pi, \pi]$, on obtient donc comme asymptote BF :

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

Asymptote HF :

$$\underline{A_v} \approx A_0 \frac{1}{Q} \left(\frac{\omega_0}{j\omega} \right)$$

Sachant que $A_0 < 0$ et que $\phi \in [-\pi, \pi]$, on obtient donc comme asymptote BF :

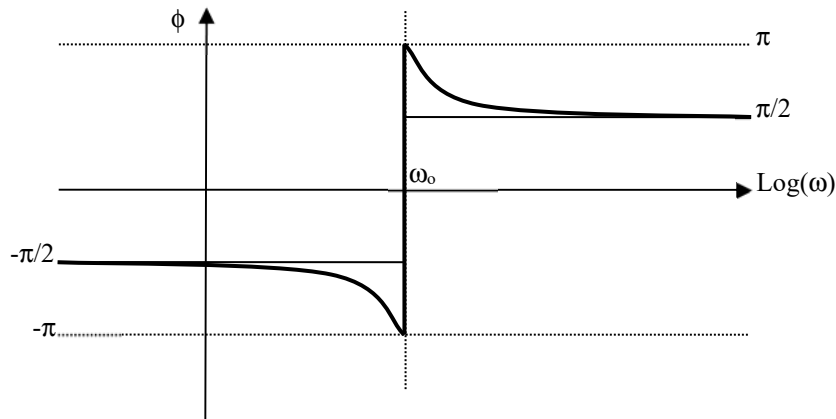
$$\phi = +\frac{\pi}{2}$$

Diagramme de Bode :

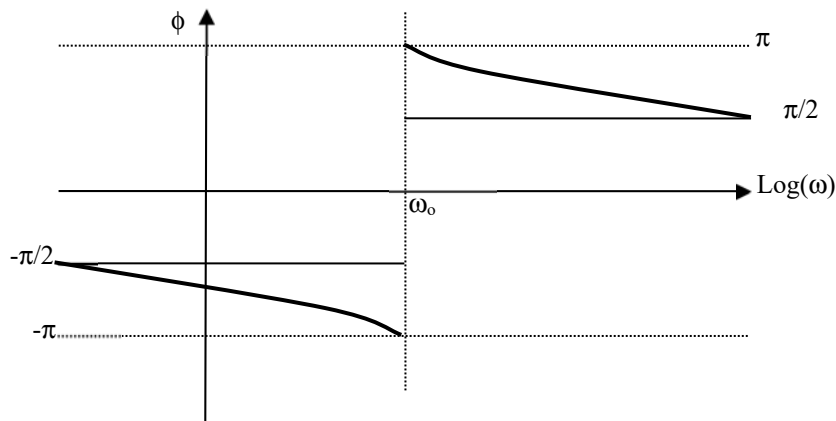
$$\phi(\omega_0^+) = +\pi \text{ et } \phi(\omega_0^-) = -\pi$$

Notons également que le passage de $-\pi/2$ à $-\pi$ (pour $\omega < \omega_0$) est d'autant plus rapide que Q est important. De même le passage de π à $\pi/2$ (pour $\omega > \omega_0$) sera d'autant plus rapide que Q est grand. On peut préciser cela avec le calcul de $\phi(\omega)$ pour les pulsations de coupure.

i. Cas où $Q = 100$



ii. Cas où $Q = 0.1$



c. Comment nomme-t-on les deux filtres obtenus ?

Le premier filtre correspond à un filtre sélectif.

Le second filtre est un filtre passe-bande (large bande)

5. Etude de la bande passante.

a. Déterminer, en fonction de ω et Q , les pulsations de coupure ω_- et ω_+ . (on prendra : $\omega_- < \omega_+$).

Définition :

Les pulsations de coupure vérifient : $|A_v(\omega_c)| = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{|A_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)^2}} = \frac{|A_0|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + Q^2 \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)^2 = 2 \Rightarrow Q^2 \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow Q \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) = \pm 1$$

$$\Rightarrow \omega^2 \pm \frac{\omega_0 \omega}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \pm \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2}$$

Parmi ces 4 solutions, il n'y en a que 2 qui sont positives :

$$\omega_{c-} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \text{ et } \omega_{c+} = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2}$$

b. On définit la largeur de la bande passante par $\Delta\omega = \omega_{c+} - \omega_{c-}$. Exprimer $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q .

$$\Delta\omega = \omega_{c+} - \omega_{c-} = \frac{\omega_0}{Q}$$

c. Le facteur de mérite M de l'amplificateur est égal au produit de la largeur de la bande passante par la valeur maximale du module de A_v . Exprimer M en fonction de s et C . Commenter le résultat.

$$M = \Delta\omega |A_o| = \frac{\omega_0}{Q} |s| R = \frac{|s| R}{RC} = \frac{|s|}{C}$$

⇒ Plus le gain du générateur commandé est important, plus M est important

d. On suppose dans cette question que le facteur de qualité est très supérieur à 1.

i. Montrer que dans ce cas, les pulsations de coupures à -3 dB sont pratiquement équidistantes de la pulsation ω_0 .

Q>>1

⇒ Faisons un développement limité des pulsations de coupure :

$$\omega_{c-} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \approx -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0$$

$$\omega_{c+} = \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \approx \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0$$

⇒ Les deux pulsations de coupure sont bien équidistantes de ω_0

ii. Application numérique :

Calculer la largeur de la bande passante sachant que $\omega_0 = 6280$ rad/s et $Q = 100$
Commenter le résultat.

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

AN : $\Delta\omega = 62,8$ rad/s

⇒ le filtre est très sélectif.

e. On suppose dans cette question que : $Q = 0.1$ et $\omega_0 = 6280$ rad/s.

i. Calculer les deux pulsations de coupures.

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

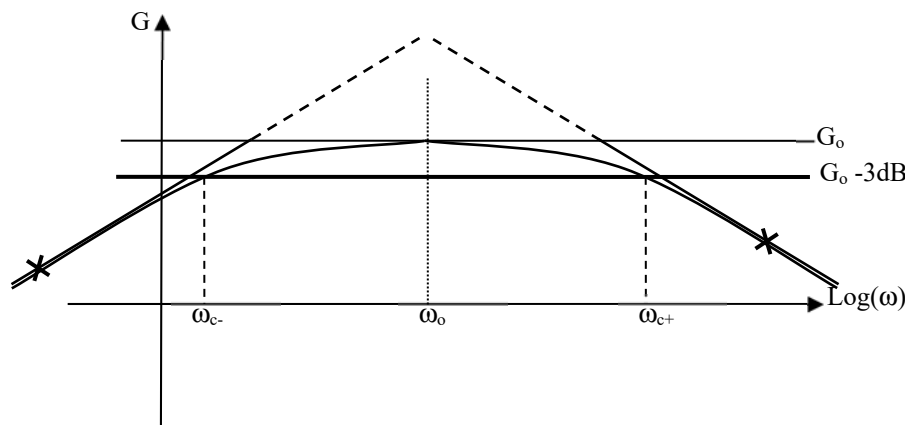
AN : $\Delta\omega = 62800$ rad/s

⇒ Filtre passe-bande « large bande »

ii. Les placer sur le diagramme de Bode de $G(\omega)$ correspondant.

Dans un diagramme de Bode, la bande passante est le domaine des pulsations telles que $G(\omega) \geq G_{\max} - 3\text{dB}$

⇒ On obtient donc le diagramme ci-dessous :



6. Application : filtrage et amplification.

La tension d'entrée $v_e(t)$ est maintenant une tension en créneau d'amplitude $U=10\text{ V}$, de période $T=5.10^{-3}\text{s}$ et dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$v_e(t) = \frac{4U}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right) \text{ où } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

a. Sachant que $\omega=6280\text{rad/s}$, $|A_0| = 10$ et $Q=100$ quelle est l'allure du signal de sortie $v_s(t)$?

Le filtre est très sélectif

⇒ seules les pulsations dans la BP seront amplifiées ($6217\text{ rad/s} < \omega < 6343\text{rad/s}$)

Or : $T = 5.10^{-3}\text{ s} \Rightarrow \omega \approx 1257\text{ rad/s}$

⇒ Les harmoniques ont pour pulsations : ω ; 3ω ; 5ω ; 7ω
1257rad/s 3770rad/s 6285rad/s 8799rad/s

⇒ Seule la 5^{ème} harmonique est dans la BP ($5\omega \approx \omega_0^+$)

⇒ Dans une première approximation, on peut considérer que seule cette harmonique donne un signal en sortie.

⇒ Le signal sera \approx sinusoïdal.

b. Donner une expression approchée de $v_s(t)$.

⇒ $s(t) = S(5\omega) \sin(5\omega t + \phi(5\omega))$ où : $S(5\omega \approx \omega_0) = |A_0| \frac{4U}{5\pi}$ et $\phi(5\omega = \omega_0^+) = \pi$

AN : $S(5\omega) = 25,5\text{V}$ et donc : $s(t) = 25,5 \sin(6285t + \pi)$ (V)

c. Tracer sur un même graphe $v_e(t)$ et $v_s(t)$.

