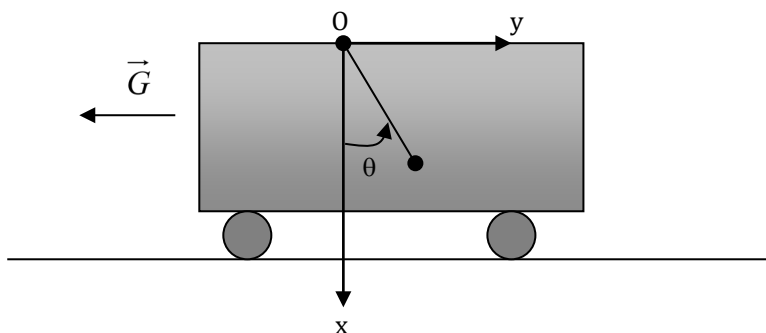


## EXERCICE 1

Translation pure.

Le passager d'un véhicule en translation horizontale d'accélération constante :  $\vec{G} = -G\vec{u}_y$ , étudie les petites oscillations planes d'un pendule simple formé par une masse  $m$  et d'un fil de longueur  $l$  accroché au plafond du véhicule.

On note  $R_0$  le référentiel terrestre et  $R$  le référentiel lié au véhicule.



- 1) Etablir l'équation différentielle caractéristique du mouvement du pendule dans le référentiel  $R$ .
- 2) En déduire l'angle  $\theta_e$  correspondant à l'équilibre du pendule dans le référentiel  $R$ .
- 3) Montrer que l'équation différentielle caractéristique des petits mouvements du pendule au voisinage de cette position d'équilibre est celle d'un oscillateur harmonique dont on donnera la pulsation propre.
- 4) On donne  $G = g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  et  $l = 1 \text{ m}$ . En déduire la valeur de  $\theta_e$  ainsi que la période des petites oscillations.

## EXERCICE 2

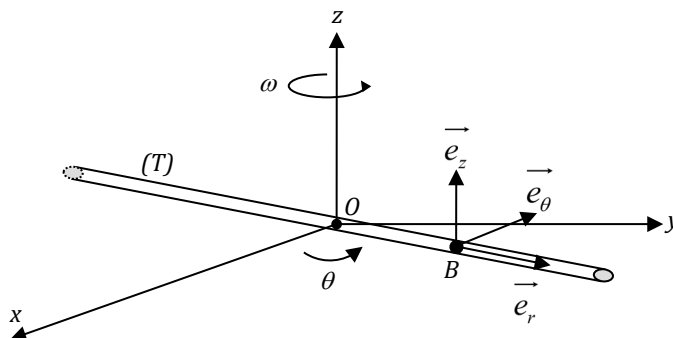
Rotation pure : Etude du mouvement d'une bille dans un tube.

Un tube  $(T)$ , de longueur  $l$  et de centre  $O$ , est dans le plan horizontal  $(O, x, y)$  et tourne autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse  $\omega$  constante.

Une bille  $B$ , de masse  $m$ , assimilée à un point matériel peut glisser sans frottements à l'intérieur du tube.

On note  $r = OB$ .

- 1- Equation différentielle du mouvement de  $B$ .
  - a. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à  $B$  dans le référentiel lié au tube, établir l'équation différentielle en  $r$  caractéristique du mouvement de  $B$ .
  - b. Retrouver cette équation différentielle en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à  $B$  dans le référentiel lié au tube.
- 2- Intégrer cette équation différentielle en prenant pour conditions initiales :  $r(0) = r_0$  et  $\dot{r}(0) = V_0$
- 3- Etablir l'expression du temps  $\tau$  que mettra  $B$  pour sortir du tube  $(T)$ .
- 4- Application numérique : Calculer  $\tau$  pour  $l = 0,1 \text{ m}$  ;  $r_0 = 0,01 \text{ m}$  ;  $V_0 = 0$  et  $\omega = 2 \text{ rad/s}$



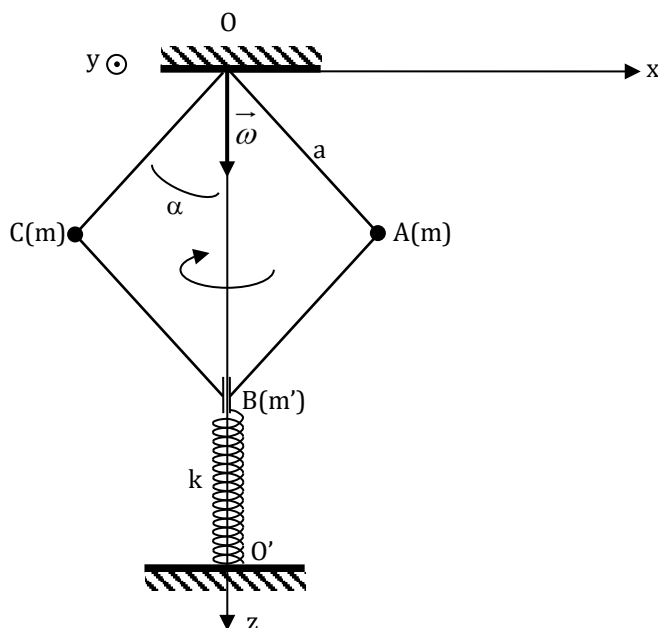


1. La masse  $m'$  de B est négligeable. Tant que  $\omega \leq \omega_0$  l'angle  $\alpha$  reste nul.
  - a. Faire le bilan des forces agissant sur le point A et notamment déterminer les forces d'inertie agissant sur A.
  - b. Appliquer le théorème du moment cinétique en O au point A dans le référentiel R.
  - c. En déduire la loi :  $\omega \sin^2 \alpha = \text{Cste}$  si  $\omega \geq \omega_0$ .
  - d. En déduire également l'équation différentielle vérifiée par  $\alpha$  :

$$\ddot{\alpha} = \sin \alpha \left( \omega^2 \cos \alpha - \frac{g}{a} \right)$$

- e. Montrer que, pour une valeur de  $\omega$  donnée, le système est en équilibre relatif pour  $\alpha_{eq} \neq 0$  si  $\omega > \omega_0$ .  
Déterminer  $\alpha_{eq}$  et  $\omega_0$ .
- f. A partir de l'équation différentielle établie précédemment, déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre relatif.

2. La masse  $m'$  de B n'est plus négligeable.
  - a. Pour une vitesse de rotation  $\omega$  donnée étudier l'équilibre relatif de B.
  - b. De la même manière étudier l'équilibre relatif de A pour  $\omega$  donnée.
  - c. En déduire que, pour  $\omega$  donnée, le système est en équilibre relatif pour  $\alpha_{eq} \neq 0$  si  $\omega > \omega_1$ . Déterminer  $\alpha_{eq}$  et  $\omega_1$ .
3. Dans un tachymètre la bague B, de masse  $m'$  négligeable, est soumise à l'action d'un ressort de raideur  $k$ , de **tension nulle lorsque  $\alpha = 0$** . Lorsque l'arbre moteur tourne à la vitesse angulaire constante  $\omega$  la bague B se soulève de  $h$ .



- a. Déterminer la relation entre  $h$  et  $\alpha$ .
- b. Pour une vitesse de rotation  $\omega$  donnée étudier l'équilibre relatif de B.
- c. De la même manière étudier l'équilibre relatif de A pour  $\omega$  donnée.

- d. En déduire que, pour  $\omega$  donnée, le système est en équilibre relatif pour :  $\omega = \frac{g + \frac{k}{m}h}{a - \frac{h}{2}}$ .

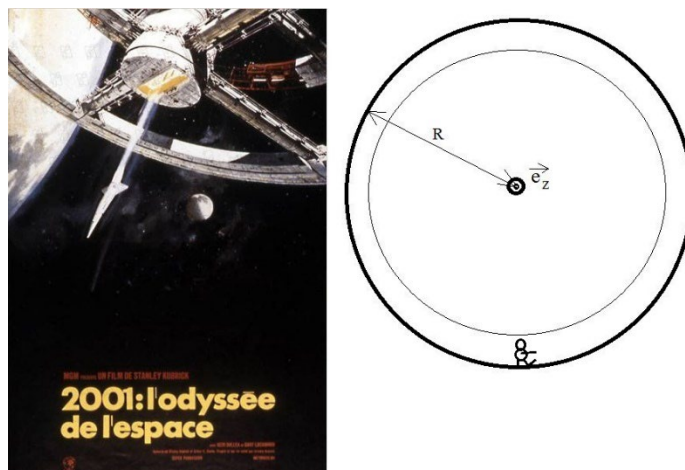
Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

## EXERCICE 4

2001

1. En quoi consiste l'apesanteur ? Citer deux situations permettant à des astronautes de vivre dans des conditions d'impesanteur.

Dans le film "2001 l'odyssée de l'espace" de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial constitué d'un tore de rayon  $R$  tourne autour de son axe ( $Oz$ ) avec une vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$  constante dans un référentiel galiléen.



2. Alors qu'ils sont loin de toute planète, les astronautes vivent dans le tore comme sur Terre: ils sont soumis à une gravité artificielle. Evaluer les valeurs numériques de  $R$  et de  $\omega$  pour que les astronautes subissent une gravité artificielle de valeur  $=g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ , à 10% près entre les pieds et la tête.
3. Dans une des scènes du film, un astronaute (Poole) fait un jogging dans le tore. Expliquer pourquoi il peut être très fatigant pour Poole de courir dans la station spatiale (on choisira des valeurs numériques pour illustrer le raisonnement). Le sens choisi pour faire le footing est-il important?

## EXERCICE 5

Ballon dans un avion

- I.- Définir le poids d'un objet. Dépend-il du référentiel d'étude ?
- II.- Dans toute la suite, le référentiel terrestre est supposé galiléen. Un avion roule sur le «runway» (piste de décollage), avec une accélération constante. Il parcourt une distance  $L=1200\text{m}$  avant de décoller, à la vitesse  $V_d=280\text{km/h}$ . Exprimer le poids d'une personne de masse  $m=75\text{kg}$  dans cet avion. Commenter.
- III.- Toujours dans le même avion, un enfant tient un ballon à hélium -exceptionnellement autorisé à bord de l'avion- au bout d'un fil de masse négligeable. Comment le fil est-il orienté une fois le ballon à l'équilibre dans l'avion ?
- IV.- On suppose que l'air atteint une situation d'équilibre presque instantanément à la mise en mouvement de l'avion. Le fil du ballon étant initialement vertical, sur la base d'ordre de grandeurs raisonnables, estimer si le ballon a le temps d'arriver à l'équilibre avant le décollage de l'avion.

On adoptera la formule de Stokes pour modéliser la force de frottement exercée par l'air sur le ballon :  $\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{v}$  où  $R$  est le rayon du ballon,  $\vec{v}$  sa vitesse dans le référentiel lié à l'avion et  $\eta=1,6.10^{-5} \text{ N.m}^{-2}.\text{s}$ , le coefficient de viscosité dynamique de l'air.

# DYNAMIQUE TERRESTRE

## EXERCICE 6

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre R.

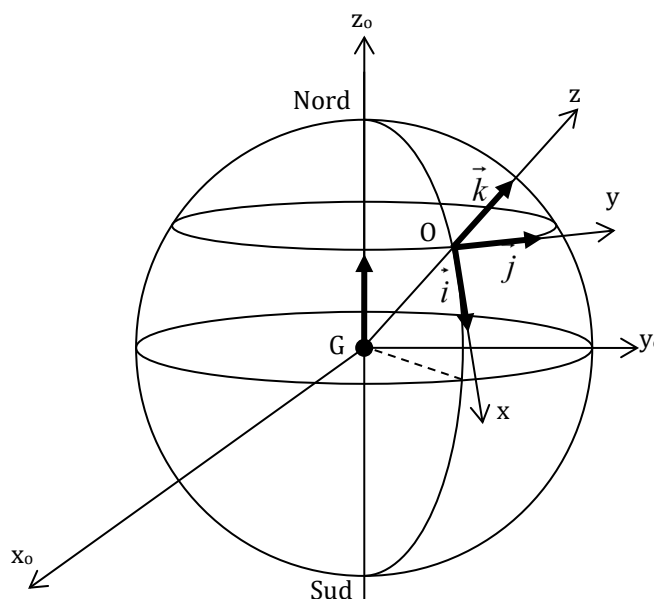
La terre, supposée sphérique de rayon  $R_T$ , tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour de l'axe des pôles dans le référentiel géocentrique ( $R_1$  est supposé galiléen). On note  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation associé à cette rotation.

Le repère cartésien utilisé est le repère : De centre O, situé à la latitude  $\lambda$  nord et d'axes : (Ox) tangent au méridien dirigé vers le sud, (Oy) tangent au parallèle dirigé vers l'est et (Oz) dirigé vers la verticale ascendante.

1. Montrer que la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point M dans le référentiel terrestre donne :

$$m\vec{a}(M)_{/R} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(M)_{/R} \text{ où } \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{relation (1)}$$

Justifier les approximations faites pour établir cette formule.



2. **Mouvements horizontaux.**

- Justifier que lors d'un déplacement horizontal dans l'hémisphère nord, le point M est dévié vers la droite. Que se passerait-il dans l'hémisphère Sud ?
- Application : On vise une cible à 100 m (vitesse initiale de la balle, environ 1000 m/s). La balle atteint-elle la cible ?

3. **Déviations vers l'est.**

Le point M est abandonné sans vitesse initiale dans le référentiel R à la latitude  $\lambda$  nord du point A de coordonnées (0,0,H).

- Déduire la loi  $z(t)$  ainsi que la durée  $\tau$  de la chute jusqu'en O de la relation (1) simplifiée en négligeant la force de Coriolis.
- On ne néglige plus la force de Coriolis.

- i. Ecrire les équations différentielles du mouvement correspondant à la relation (1).
  - ii. Résoudre l'équation en  $\ddot{y}(t)$  obtenue à la question précédente en prenant pour  $\dot{z}(t)$  la valeur trouvée à la question 2.a. Exprimer  $y(t)$  en fonction de  $\Omega = \|\vec{\Omega}\|$ ,  $\lambda$ ,  $g$  et  $t$ .
  - iii. En prenant pour la durée de chute celle obtenue à la question 2.a. déterminer l'expression littérale de  $y(\tau)$  en fonction de  $\Omega$ ,  $g$ ,  $H$  et  $\lambda$ .
  - iv. AN :  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$  ;  $\lambda = 45^\circ$  Nord ;  $H = 100 \text{ m}$  ;  $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$
4. **Pendule de Foucault.**  
Le point M est fixé à l'extrémité d'un fil sans masse de longueur  $l$ , l'autre extrémité du fil étant fixé au point A de coordonnées  $(0, 0, l)$ .

- a. Exprimer la tension  $\vec{T}$  exercée par le fil sur la masse  $m$  en fonction de  $\|\vec{T}\|$ ,  $l$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .
- b. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à M dans le référentiel R et la projeter dans le repère  $(Oxyz)$ .
- c. En négligeant le mouvement suivant  $z$ , donner le système d'équations différentielles vérifiées par  $x(t)$  et  $y(t)$ .  
On supposera que  $\|\vec{T}\|$  est constante et on posera  $\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{ml}}$ .
- d. Poser  $u(t) = x(t) + iy(t)$  et écrire l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$ .
- e. On désire obtenir les équations du mouvement du point dans le référentielle R' dans lequel  $(Ox'y'z')$  est fixe, l'axe  $(Oz')$  étant confondu avec  $(Oz)$  et les axes  $(Ox')$ ,  $(Oy')$  tournant autour de  $(Oz')$  à la vitesse angulaire constante  $\Omega' = \Omega \sin \lambda$ .

Pour cela on admet le changement de variable suivant :  $u(t) = U(t)e^{-i\Omega't}$  où  $U(t) = x'(t) + iy'(t)$ .

- i. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $U(t)$ .
- ii. En négligeant  $\Omega'^2$  devant  $\omega_0^2$ , intégrer cette équation différentielle et donner l'expression générale de  $U(t)$ .
- iii. Les conditions initiales sont :  $x(0) = x_0$  ;  $y(0) = 0$  ;  $\dot{x}(0) = 0$  et  $\dot{y}(0) = 0$ . Déterminer  $U(t)$ .
- iv. Dédire de  $U(t)$  les expressions de  $x'(t)$  sous forme de  $a \cos(\omega_0 t)$  et  $y'(t)$  sous forme de  $b \sin(\omega_0 t)$ . Donner les expressions de  $a$  et de  $b$ .
- v. On en déduit que la trajectoire de M dans le référentiel R' est une ellipse. Calculer numériquement le rapport  $b/a$  à la latitude nord  $\lambda = 45^\circ$ . Conclure.
- vi. Dédire la période de rotation du plan des oscillations du pendule dans le référentiel R. Calculer cette période à la latitude nord  $\lambda = 45^\circ$ .

## EXERCICE 7

### Usure des rails de TGV

Tous les ans, les 2 rails "celui de droite et de gauche" sont échangés par les agents de maintenance des voies TGV afin d'éviter une usure trop asymétrique. L'objectif de cet exercice est de comprendre l'origine et d'estimer l'importance de ce phénomène.

Pour cela, on imagine une rame de TGV faisant le trajet Brest Strasbourg à sa vitesse de croisière maximale.

1. La Terre n'est pas un référentiel galiléen pour cette étude. Quelle force s'applique donc sur le train ?
2. Évaluer en ordre de grandeur la force qui est responsable de l'usure des rails. De quel côté du rail a-t-elle lieu ?
3. Quelle est l'énergie dissipée ?
4. Estimer l'épaisseur de métal arraché au rail par le passage du TGV.

## EXERCICE 8

### Boulet de Mersenne

Marin Mersenne (1630 - 1648) est un religieux français appartenant à l'ordre des Minimes, érudit, mathématicien et philosophe. Mersenne possédait le don fabuleux de poser les bonnes questions pseudo-naïves.

Il suggéra le questionnement suivant, appelé depuis le problème du **boulet de Mersenne** :

« Soit un boulet tiré verticalement. Retombera-t-il dans le fût du canon ? »



⇒ Pouvez-vous répondre au questionnement de Mersenne ?

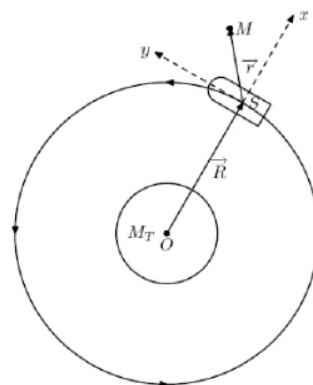
### EXERCICE 9

#### Balle lancée d'un satellite

Une station spatiale S est sur une orbite circulaire de rayon  $R$  autour de la terre. Elle tourne sur elle-même avec un vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$  identique à celui de son mouvement orbital.

On désigne par  $R_g$  le référentiel géocentrique supposé galiléen et par  $R_s(S, x, y, z)$  le référentiel lié à la station.

Dans  $R_s$ , un point matériel M de masse  $m$  est en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  dans le plan  $Sxy$ .



1. Exprimer  $\omega$  en fonction de la masse de la terre  $M_T$ , de la constante de gravitation  $G$  et de  $R$
2. Déterminer les forces d'inertie exercées sur M dans  $R_s$ .
3. A l'aide d'un développement limité arrêté au premier ordre en  $r/R$ , montrer que la force d'attraction gravitationnelle exercée par la terre sur M s'écrit :

$$\vec{F} = -m\omega^2 (\vec{R} + \vec{r} - 3x\vec{u}_x)$$

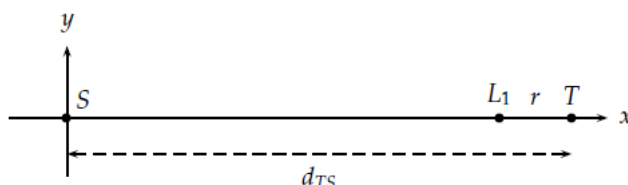
4. M est une balle qu'un cosmonaute lance en direction de la terre avec la vitesse relative  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  ( $v_0 \ll \omega R$ ) depuis S. Etablir les équations différentielles vérifiées par  $x$  et  $y$ . Les intégrer et montrer que la trajectoire est une ellipse. Déterminer sa période de parcours

## EXERCICE 10

## LISA Pathfinder

Le satellite LISA Pathfinder a été placé au voisinage d'un point qui a la caractéristique d'être fixe par rapport à la Terre et au Soleil. Ce point, désigné par  $L_1$ , est un « point de Lagrange », situé à 1,5 million de kilomètres de la Terre. À l'intérieur du satellite LISA Pathfinder de l'Agence Spatiale Européenne (ESA), deux cubes en alliage d'or et de platine ont atteint un état d'immobilité quasi-parfaite sous la seule action des forces de gravité exercée par le Soleil et les autres corps célestes. On envisage d'utiliser à l'horizon 2030 un ensemble de satellites de ce type pour constituer un interféromètre laser géant (eLISA) à même de détecter des ondes gravitationnelles.

On note  $\mathcal{R}_0$  le référentiel dans lequel le Soleil  $S$  et la Terre  $T$  sont fixes, de repère associé  $(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Le point de Lagrange  $L_1$  est à la distance  $r \ll d_{TS}$  de la Terre où  $d_{TS}$  désigne la distance entre le Soleil et la Terre (voir figure ci-après).



On considère la Terre ponctuelle en  $T$ , en orbite circulaire de rayon  $d_{TS}$  autour du Soleil ponctuel en  $S$  dans le référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}_h$  (considéré comme galiléen) avec une pulsation  $\omega$ . On néglige l'action de tous les autres corps célestes.

- I.– Exprimer  $\omega$  en fonction des données de l'énoncé.
- II.– Quel est, dans  $\mathcal{R}_h$ , le mouvement de  $\mathcal{R}_0$ ?  $\mathcal{R}_0$  est-il galiléen?
- III.– En effectuant un bilan des forces s'exerçant sur la sonde LISA Pathfinder, de masse  $m$ , positionnée en  $L_1$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , donner la relation qui traduit l'équilibre de la sonde dans ce référentiel.

On admet qu'on peut en déduire l'expression suivante :  $r = \left( \frac{M_T}{3M_\odot} \right)^{1/3} d_{TS}$ . Proposer une estimation numérique.

- IV.– Pour étudier la stabilité de l'équilibre en  $L_1$ , on caractérise un petit déplacement de la sonde par le vecteur  $x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ , où  $|x|$ ,  $|y|$  et  $|z|$  sont négligeables devant la distance  $r$ . L'étude est toujours conduite dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ .
  - a) Un calcul non demandé permet d'obtenir l'expression ci-dessous des composantes, dans le repère  $\mathcal{R}_0$ , de la résultante des forces de gravitation et d'inertie d'entraînement :

$$\begin{aligned} F_x &= 9\omega^2 x, \\ F_y &= -3\omega^2 y, \\ F_z &= -4\omega^2 z. \end{aligned}$$

Établir les équations différentielles vérifiées par  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Pourquoi peut-on se limiter aux mouvements dans le plan  $(Oxy)$  si l'on souhaite étudier la stabilité du point de Lagrange  $L_1$ ?

- b) On cherche des solutions sous la forme :  $x(t) = A_x e^{pt}$  et  $y(t) = A_y e^{pt}$ . Déterminer le système des deux équations vérifiées par les amplitudes  $A_x$  et  $A_y$ .
  - c) En déduire les valeurs acceptables de  $p$ . Conclure quant à la stabilité de l'équilibre au point de Lagrange  $L_1$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  et proposer une valeur numérique du temps caractéristique d'instabilité de la position  $L_1$ .
- V.– Pourquoi a-t-on choisi, selon vous, de placer cette sonde au voisinage du point de Lagrange  $L_1$ ?