

MECANIQUE DU SOLIDE

CINETIQUE DU SOLIDE

Masse d'un solide (ou système de points)	$M = \sum_i m_i$ et $M = \iiint_{(S)} \mu(P) d\tau_p$
Barycentre d'un solide (ou système de points)	$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{OM}_i$ et $\sum_i m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$ $\vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint_{(S)} \mu(P) \vec{OP} \cdot d\tau_p$ et $\iiint_{(S)} \mu(P) \vec{GP} d\tau_p = \vec{0}$
Référentiel barycentrique. A quelle condition est-il galiléen ?	Référentiel dans lequel G est fixe qui est en translation dans le référentiel d'étude. Galiléen si le système est isolé.
Résultante cinétique d'un solide (ou système de points)	$\vec{P}(S)_R = \sum_i m_i \vec{V}(M_i)_R$ et $\vec{P}(S)_R = \iiint_{(S)} \mu(P) \vec{V}(P)_R d\tau_p$ $\vec{P}(S)_R = M \vec{V}(G)_R$ Csq : $\vec{P}^* = \vec{0}$
Moment cinétique d'un solide (ou système de points)	$\vec{L}_A(S)_R = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{V}(M_i)_R$ $\vec{L}_A(S)_R = \iiint_{(S)} \vec{AP} \wedge \mu(P) \vec{V}(P) \cdot d\tau_p$ Relation de transport : $\vec{L}_B(S)_R = \vec{L}_A(S)_R + \vec{BA} \wedge \vec{P}(S)_R$ Csq : $\vec{L}_B^* = \vec{L}_A^* = \vec{L}^*$
Théorème de Koenig pour le moment cinétique (HP)	$\vec{L}_A(S)_R = \vec{L}^* + \vec{AG} \wedge \vec{P}(S)_R$ Csq : $\vec{L}_G(S)_R = \vec{L}^*$
Energie cinétique	$E_c(S)_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i V^2(M_i)_R$ $E_c(S)_R = \iiint_{(S)} \frac{1}{2} \mu(P) V^2(P) d\tau_p$
Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique (HP)	$E_c(S)_R = E_c^* + \frac{1}{2} M V^2(G)_R$

CINEMATIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE (Σ)

Solide indéformable	Σ est un solide indéformable, si la distance entre deux points A et B liés au solide reste constante au cours du temps
Vecteur rotation instantané	Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base liée à (Σ) Le vecteur rotation instantané de (Σ) par rapport au référentiel R est le vecteur $\vec{\Omega}_{\Sigma/R}$ unique tel que : $\left. \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right)_R = \vec{\Omega}_{\Sigma/R} \wedge \vec{e}_i \quad \forall \vec{e}_i$
Dérivée vectorielle	Soit $\vec{Q}(t)$ un vecteur quelconque, alors les dérivées de $\vec{Q}(t)$ dans le référentiel R et par rapport à Σ sont liées : $\left. \frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_R = \left. \frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_\Sigma + \vec{\Omega}_{\Sigma/R} \wedge \vec{Q}(t)$ Csq : pour deux points A et B liés à Σ , on a : $\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right)_R = \vec{\Omega}_{\Sigma/R} \wedge \vec{AB}(t)$
Formule de Varignon	$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{\Sigma/R}$ Attention ! $A, B \in (\Sigma)$
Composition de vecteurs rotation	$\vec{\Omega}_{\Sigma/R_1} = \vec{\Omega}_{\Sigma/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1}$ Csq : $\vec{\Omega}_{\Sigma/R} = \vec{\Omega}^*$

Définition d'un axe instantané de rotation (AIR) dans le référentiel d'étude. Condition d'existence de l'AIR.	<i>Définition de l'AIR:</i> Droite passant par I point fixe dans R et portée par le vecteur $\vec{\Omega}_{\Sigma/R}$ <i>Condition d'existence de l'AIR :</i> Il existe un point $I \in (\Sigma)$ de vitesse nulle. NB : Si \nexists AIR dans R, on peut travailler dans R^* où l'axe $(G, \vec{\Omega}^*)$ est un AIR
Moment d'inertie par rapport à un axe Δ quelconque	$J_{\Delta} = \iiint_V \mu(P) r_p^2 d\tau_p$ où r_p est la distance du point $P \in \Sigma$ à l'axe Δ .
Moment cinétique scalaire par rapport à un axe Δ quelconque (tel que $\vec{u}_{\Delta} = \frac{\vec{\Omega}_{\Sigma/R}}{\Omega_{\Sigma/R}}$)	$L_{\Delta} = \vec{L}_O(S)_R \cdot \vec{u}_{\Delta} = J_{\Delta} \Omega_{\Sigma/R}$ Où : $O \in \Delta$ et $\vec{u}_{\Delta} = \frac{\vec{\Omega}_{\Sigma/R}}{\Omega_{\Sigma/R}}$ Attention : Si Δ n'est pas fixe ou si le solide est déformable J_{Δ} dépend du temps.
Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ)	$L_{\Delta} = J_{\Delta} \Omega_{\Sigma/R}$ Avec $J_{\Delta} = cste$
Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'une direction fixe (\exists AIR noté Δ_I)	$L_{\Delta_I} = J_{\Delta_I} \Omega_{\Sigma/R}$ Avec $J_{\Delta_I} = cste$
Moment cinétique scalaire d'un solide en rotation autour d'une direction fixe (\nexists AIR)	On travaille dans R^* où l'axe $(G, \vec{\Omega}^*)$ est un AIR : $L^* = L_{\Delta_G} = J_{\Delta_G} \Omega_{\Sigma/R}$ Avec $J_{\Delta_G} = cste$ NB : On peut ensuite revenir au référentiel R en utilisant le théorème de Koenig.
Théorème de Huygens	$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + md^2$ (d est la distance entre les deux droites parallèles)
Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ)	$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2$
Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'une direction fixe (\exists AIR noté Δ_I)	$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta_I} \Omega^2$
Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'une direction fixe sans que l'on puisse définir un AIR.	On peut travailler dans R^* où l'axe $(G, \vec{\Omega}^*)$ est un AIR : $E_c^* = \frac{1}{2} J_{\Delta_G} \Omega^2$ NB : On peut ensuite revenir au référentiel R en utilisant le théorème de Koenig.

ACTIONS MECANIQUES

Action mécanique	<p>$\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$ où \vec{F} est la résultante de l'action mécanique et où \vec{M}_A est le moment de l'action calculé en A.</p> <p>Exemples :</p> <ol style="list-style-type: none"> Forces appliquées en un point (P) du solide $\vec{F}, \vec{M}_A = \overline{AP} \wedge \vec{F}$ Ex : tension d'un fil, force de rappel d'un ressort, force de contact entre deux solides dans le cas d'un contact ponctuel. Forces de surface. $\vec{F} = \iint_S d\vec{F}_S = \iint_S \vec{f}_S(P) dS_P$ $\vec{M}_A = \iint_S \overline{AP} \wedge \vec{f}_S(P) dS_P$ Ex : Forces de pression, forces de viscosité, forces de contact entre deux solides dans le cas d'un contact non ponctuel.
------------------	--

	<p>3. Forces de volume.</p> $\vec{F} = \iiint_V d\vec{F}_V = \iiint_V \vec{f}_V(P) d\tau_P$ $\vec{M}_A = \iiint_V \vec{AP} \wedge \vec{f}_V(P) d\tau_P$ <p>Ex : Le poids, La force de Lorentz, les forces d'inertie</p>
Glisseur	<p>Un glisseur est une action mécanique équivalente à une force unique \vec{F} appliquée en un point $P_1 \Rightarrow \{\vec{F}, \vec{M}_{P_1} = \vec{0}\}$</p> <p>On appelle droite d'action d'un glisseur, la droite passant par le point d'application du glisseur (P_1) et portée par la résultante \vec{F}.</p> <p>Exemples :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Le poids est un glisseur ($\vec{P} = M\vec{g}$) appliqué en G. 2. La force d'inertie d'entraînement, dans le cas où Σ est en translation pure dans R est un glisseur ($\vec{F}_{ie} = -M\vec{a}_e$) appliqué en G. 3. La poussée d'Archimède est un glisseur ($\vec{I} = -M^*\vec{g}$) appliqué au centre de poussé. 4. L'action de contact entre deux solides, dans le cas d'un contact ponctuel est un glisseur appliqué au point de contact.
Couple	<p>Un couple est une action mécanique dont la résultante est nulle et donc dont le moment ne dépend pas du point d'application : $\{\vec{F} = \vec{0}, \vec{T}\}$</p> <p>Exemples :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Système de deux forces opposées. 2. Couple de torsion : $\vec{T} = -C(\theta - \theta_0)\vec{u}_A$ 3. Moment de forces de Laplace agissant sur un circuit fermé plongé dans \vec{B} uniforme.
Actions intérieures agissant sur un solide	Les actions intérieures agissant sur un solide ont une résultante \vec{F} et un moment \vec{M}_A toujours nuls.
Moment d'une action mécanique par rapport à un axe Δ	$M_A = \vec{M}_A \cdot \vec{u}_\Delta$ <p>Où $\Delta = (A, \vec{u}_\Delta)$</p>
Notion de bras de levier pour un glisseur	<p>Le moment d'un glisseur \vec{F} par rapport à $\Delta = (A, \vec{u}_\Delta)$ vaut :</p> $M_A = \pm d \ \vec{F}\ $ <p>Où : d est la distance de A à la droite d'action du glisseur. Le signe moins est déterminé à partir de la figure : On choisit le signe plus si la force tend à faire tourner le solide dans le sens positif autour de Δ</p>

THEOREMES DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE

TRC et TMC (en A quelconque) dans R_g	<ol style="list-style-type: none"> 1. TRC : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$ 2. TMC : $\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{V}_A \wedge \vec{P} = \sum \vec{M}_{A_{ext}}$ si A est mobile $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_{A_{ext}}$ si A est fixe dans R
TMC en G dans R_g	$\vec{\Delta}_G = \left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right)_R = \left. \frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_R = \sum \vec{M}_{G_{ext}}$
TMC en G dans R^*	$\vec{\Delta}_G^* = \left. \frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{R^*} = \sum \vec{M}_{G_{ext}}$

	Noter que les forces d'inertie n'interviennent pas même si R^* n'est pas galiléen.
TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'un axe fixe	$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum M_{\Delta_{ext}}$
TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'une direction fixe (cas où l'AIR est défini (Δ_I))	$\frac{dL_{\Delta_I}}{dt} = \sum M_{\Delta_I_{ext}}$
TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'une direction fixe (cas l'AIR n'est pas défini)	$\frac{dL^*}{dt} = \sum M_{\Delta_G_{ext}}$

PUISSANCE D'UNE ACTION MECANIQUE

Puissance d'une action mécanique quelconque	$P = \vec{F} \cdot \vec{V}_A + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_A$ Formule indépendante de A
Puissance d'un glisseur	Pour un torseur \vec{F} appliqué en P_1 : $P = \vec{F} \cdot \vec{V}_{P_1}$
Puissance d'un couple	Pour un couple \vec{T} : $P = \vec{\Omega} \cdot \vec{T}$
Puissance d'une action mécanique dans le cas d'un solide en translation pure dans le référentiel d'étude	$P = \vec{F} \cdot \vec{V}_{S/R}$
Puissance d'une action mécanique dans le cas d'un solide en rotation pure dans le référentiel d'étude	$P = \Omega M_{\Delta}$
Puissance des actions intérieures	Pour un solide indéformable : $P = 0$ Pour un solide déformable : $P \neq 0$, notons que cette puissance est indépendante du référentiel d'étude.
Puissance d'une action conservative	$P = -\frac{dE_p}{dt}$
Energie potentielle du poids	$E_p = Mgz_G$ Où z_G est l'altitude du centre d'inertie

ENERGETIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

Energie mécanique d'un solide	$E_m = E_p + E_c$
TPC	$\frac{dE_c}{dt} = p^{int} + p^{ext}$ Noter que le TPC s'écrit dans R^* sans faire intervenir les forces d'inertie.
TEC	$\Delta E_c = W^{int} + W^{ext}$ Noter que le TEC s'écrit dans R^* sans faire intervenir les forces d'inertie.
TPM	$\frac{dE_m}{dt} = p_{NC}^{int} + p_{NC}^{ext}$ Noter que le TPM s'écrit dans R^* sans faire intervenir les forces d'inertie.
TEM	$\Delta E_m = W_{NC}^{int} + W_{NC}^{ext}$ Noter que le TEM s'écrit dans R^* sans faire intervenir les forces d'inertie.

SYSTEME CONSERVATIF A UN DEGRES DE LIBERTE (q)

Intégrale 1 ^{ère} du mouvement	$E_m(q, \dot{q}) = E_p(q) + E_c(q, \dot{q}) = cste$
Equation différentielle du mouvement	$\frac{dE_m}{dt} = 0$
Ensembles des positions accessibles	$E_m \geq E_p$
Etats liés/Etats de diffusion	<ol style="list-style-type: none"> 1. Si q est borné, on a un état lié. 2. Si q n'est pas borné, on a un état de diffusion.

Positions d'équilibre	Position d'équilibre en $q_o : \left. \frac{dE_p}{dq} \right _{q_o} = 0$ Equilibre stable en $q_o : \left. \frac{d^2E_p}{dq^2} \right _{q_o} > 0$ Equilibre instable en $q_o : \left. \frac{d^2E_p}{dq^2} \right _{q_o} < 0$
-----------------------	--

CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES

Contact ponctuel	Le contact entre les deux solides Σ_1 et Σ_2 est ponctuel quand il se réduit à un point I . On distingue alors 3 points : <ol style="list-style-type: none"> 1. I : point géométrique correspondant au point de contact. 2. $I_1 = I \in \Sigma_1$: Point coïncidant avec I et appartenant à Σ_1. 3. $I_2 = I \in \Sigma_2$: Point coïncidant avec I et appartenant à Σ_2.
Vitesse de glissement	$\vec{V}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{V}(I \in \Sigma_1)_R - \vec{V}(I \in \Sigma_2)_R$
Action de contact entre deux solides dans le cas d'un contact ponctuel	L'action de contact de Σ_2 sur Σ_1 dans le cas d'un contact ponctuel est un glisseur $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ appliqué en I qui peut être décomposé en : <ol style="list-style-type: none"> 1. une résultante perpendiculaire au plan osculateur en I (composante normale notée $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$) 2. Une résultante appartenant au plan osculateur en I (composante tangentielle notée $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$)
Lois de Coulomb	Cas où il y a glissement entre Σ_1 et Σ_2 : <ol style="list-style-type: none"> 1. $\vec{T}_{2 \rightarrow 1}$ est colinéaire et opposée à la vitesse de glissement. 2. $\ \vec{T}_{2 \rightarrow 1}\ = f_d \ \vec{N}_{2 \rightarrow 1}\$ où f_d est le coefficient de frottement dynamique. Cas où il n'y a pas glissement entre Σ_1 et Σ_2 : <ol style="list-style-type: none"> 1. $\vec{V}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{0}$ 2. $\ \vec{T}_{2 \rightarrow 1}\ \leq f_s \ \vec{N}_{2 \rightarrow 1}\$ où f_s est le coefficient de frottement statique. Limite de glissement : On se place dans le cas du non-glissement, à la limite où le glissement va commencer, on a alors : $\ \vec{T}_{2 \rightarrow 1}\ = f_s \ \vec{N}_{2 \rightarrow 1}\ $ où f_s est le coefficient de frottement statique.
Puissance des actions de contact dans le cas d'un contact ponctuel	$P_{1 \rightarrow 2} + P_{2 \rightarrow 1} = \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$ Cas important où Σ_2 est fixe (support) : $P_{2 \rightarrow 1} = \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$
Puissance des actions de contact dans le cas d'un contact ponctuel et d'un roulement sans glissement	Σ_1 roule sans glisser sur Σ_2 : $P_{2 \rightarrow 1} = \vec{T}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_g = 0$
Liaison pivot Liaison pivot parfaite	Liaison pivot : liaison d'un solide Σ avec un support telle qu'il existe un axe fixe (Δ) par rapport à Σ qui est aussi fixe par rapport au support. Liaison pivot parfaite : Le moment de l'action de contact du support sur le solide, par rapport à l'axe Δ est nul. La puissance de cette action de contact est nulle