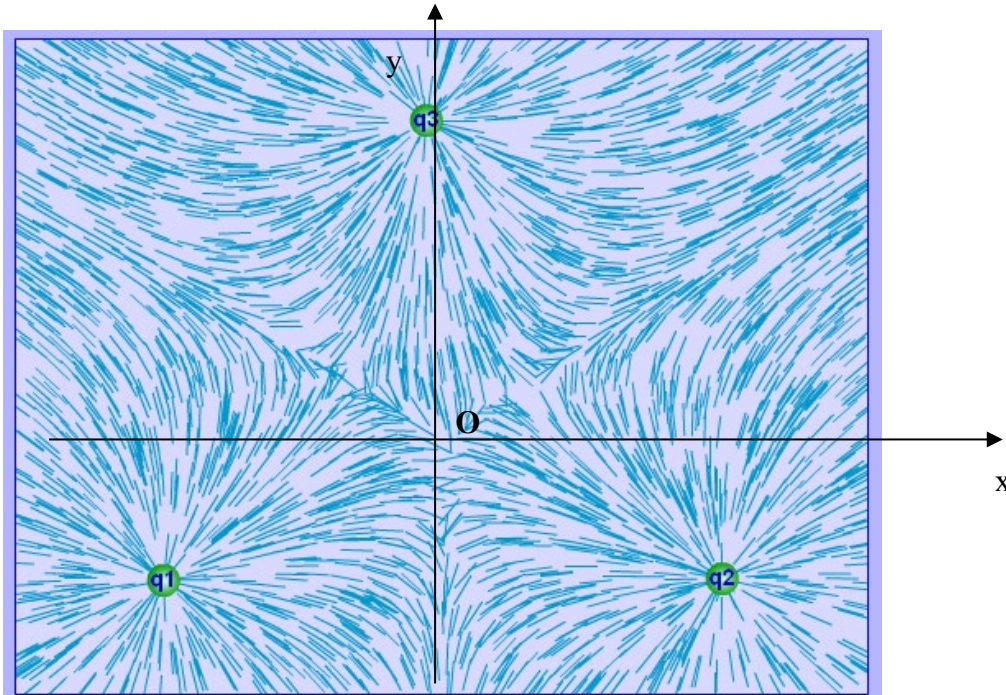


Correction exercice 7 – EM2

Paramétrage :



1) On a 3 charges identiques, de même signe aux sommets d'un triangle équilatéral :

$$q_1 = q_2 = q_3$$

2) $V(M) = V_0 + Ax + By + Cz + Dxy + Eyz + Fzx + Hx^2 + Iy^2 + Jz^2$.

Le potentiel dépend forcément de la charge, et du côté du triangle. Toutes les constantes sauf 2 peuvent être déterminées.

3) On commence par déterminer le champ $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -(A + Dy + Fz + 2Hx)\vec{e}_x - (B + Dx + Ez + 2Iy)\vec{e}_y - (C + Ey + Fx + 2Jz)\vec{e}_z$$

Analyse des symétries :

- O étant un centre de symétrie, le champ est nul en O donc

$$A = B = C = 0$$

- Symétrie de $\vec{E}$ par rapport au plan xOy :

$$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z) \quad \forall x \quad \forall y$$

Donc :

$$E = F = 0$$

- On peut aussi utiliser la parité du potentiel de part et d'autre du plan (Oxy) :

$$V(z) = V(-z) \quad \forall x \quad \forall y$$

On arrive alors à :

$$C = E = F = 0$$

- Symétrie par rapport au plan yOz :

$$\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x) \quad \forall z \quad \forall y$$

donc :

$$D = F = 0$$

Et donc :

$$V(M) = V_0 + Hx^2 + Iy^2 + Jz^2$$

- Invariance par rotation de $2\pi/3$:

On se place en coordonnées cylindriques :

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta$$

On a donc :

$$V(r, \theta, z) = V_0 + (H \cos^2 \theta + I \sin^2 \theta) r^2 + Jz$$

Et donc :

$$V(r, \theta, z) = V\left(r, \theta + \frac{2\pi}{3}, z\right) \\ \Rightarrow I = H$$

Soit :

$$V(M) = V_0 + H(x^2 + y^2) + Jz^2$$

- $\Delta V=0$ (pas de charges) implique :

$$2H + 2I + 2J = 0 \Rightarrow J = -2H$$

D'où :

$$V(M) = V_0 + H(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

- Pour calculer V_0 , on choisit M au centre

$$V_0 = \frac{3\sqrt{3}q_1}{4\pi\epsilon_0 a}$$

- On choisit ensuite un point sur l'axe z

$$V = \frac{3q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\left(z^2 + \frac{a^2}{3}\right)}}$$

(Triangle MOQ, Q étant une des charges, rectangle en O)

En considérant z est petit devant a, on obtient

$$V = \frac{3q_1}{4\pi\epsilon_0 \frac{a}{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{3z^2}{2a^2}\right) = V_0 - 2Hz^2$$

D'où :

$$H = \frac{9\sqrt{3}q_1}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

- Finalement, on obtient :

$$V(M) = V_0 + H(x^2 + y^2 - z^2) = \frac{3\sqrt{3}q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 + \frac{3}{a^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)\right]$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -(2Hx)\vec{e}_x - (2Hy)\vec{e}_y - (2Jz)\vec{e}_z = -2H[x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z] = \frac{-9\sqrt{3}q_1}{2\pi\epsilon_0 a^3} [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z]$$

4) La force agissant sur la charge q vaut :

$$\vec{F} = q\vec{E} = -2qH(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - 2z\vec{e}_z) = \frac{-9\sqrt{3}q_1 q}{2\pi\epsilon_0 a^3} [x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + 2z\vec{e}_z]$$

- Pour $q_1 q < 0$, le mouvement est borné dans la direction verticale, pas dans le plan xOy, un champ magnétique vertical donnera des trajectoires hélicoïdales, donc bornées aussi dans le plan horizontal.
- Pour $q_1 q > 0$, le mouvement est borné cette fois dans le plan horizontal mais pas dans le plan vertical