

Énoncé DS3

Le sujet comporte deux extraits de sujets d'écrits :

- ❑ **SUJET 1** - Physique ENS - 2009 MP : Physique des instabilités - calculatrice autorisée.
- ❑ **SUJET 2** - Physique II 2009 CCS MP : Le Seigneur des anneaux - calculatrice autorisée.

Consignes

- ❑ Dès réception du sujet, lire intégralement les parties indépendantes.
- ❑ Repérer notamment les questions clefs, c'est à dire les questions dont les réponses ont un impact important sur la résolution du sujet. $\Rightarrow$ Passer du temps sur ces questions!
- ❑ Si au cours de votre résolution vous vous apercevez que "quelque chose ne va pas", arrêtez vous et reprenez votre raisonnement afin de trouver le moment où votre raisonnement est devenu faux.
- ❑ Ne pas utiliser de valeurs numériques au cours d'une démonstration littérale.
- ❑ Vérifier systématiquement l'homogénéité et la cohérence de vos résultats.
- ❑ Pour les applications numériques, faites attention aux chiffres significatifs et aux unités.
- ❑ Ne jamais poser d'équations électriques sans avoir au préalable défini ces grandeurs sur un schéma (conventions). Même chose pour les systèmes thermodynamiques et mécaniques.
- ❑ Ne jamais mener un calcul en mélangeant la notation réelle instantanée (notamment des cosinus et des sinus) et la représentation complexe.
- ❑ Un schéma vaut toujours mieux que de longs discours.
- ❑ Les applications numériques et les commentaires sont souvent surcotés dans les barèmes.

90.02M

SESSION 2009

Filière MP

PHYSIQUE MPI

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 5 heures

L'usage des calculatrices de poche est autorisé, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (circulaire n° 99018 du 1^{er} février 1999).

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et de la clarté des explications demandées.

★ ★ ★

OUVERTURE À LA PHYSIQUE DES INSTABILITÉS

*La thématique abordée dans ce sujet est celle de l'étude physique de certaines instabilités. Elle est explorée ici, à travers des exemples concrets empruntés, pour l'essentiel, à la mécanique et à la thermodynamique. À travers **trois problèmes totalement indépendants** traitant successivement l'étude de l'instabilité paramétrique du grand encensoir de Saint-Jacques de Compostelle, l'étude d'une lampe fer/hydrogène, et enfin, dans une dernière partie, l'étude de l'instabilité de croissance d'un germe solide (instabilité dite de Mullins et Sekerka), nous nous attacherons à décrire les conditions nécessaires à la naissance d'une instabilité de chaque système physique étudié. Les mécanismes non-linéaires limitant la croissance de l'énergie du système ne seront pas considérés explicitement dans ce sujet.*

PREMIÈRE PARTIE – ÉTUDE D'UNE INSTABILITÉ PARAMÉTRIQUE

Dans cette première partie, on se propose d'étudier le principe d'un oscillateur paramétrique, c'est-à-dire d'un oscillateur dont la période propre dépend du temps. L'exemple type de l'oscillateur paramétrique est celui d'une personne assise sur le siège d'une balançoire. Le mécanisme de déploiement et de repli des jambes au cours d'une période modifie la longueur effective du pendule et donc sa période propre qui devient un paramètre dépendant du temps.

On débutera cette partie par l'examen de la condition à assurer entre la période propre de l'oscillateur et la période T_e du mécanisme d'excitation afin que l'oscillateur devienne instable.

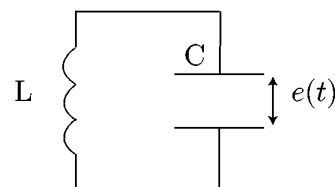
Dans une deuxième étape, on propose une approche quantitative de l'oscillateur paramétrique, illustrée par l'étude du grand encensoir de Saint-Jacques de Compostelle (le *Botafumeiro*). Le but sera de déterminer le diagramme de stabilité de cet oscillateur, c'est-à-dire, les valeurs de l'amplitude de l'excitation f qui, pour une pulsation excitatrice donnée, conduisent à l'instabilité.

I. ORIGINE PHYSIQUE DE L'INSTABILITÉ

A. Approche qualitative :

Pour interpréter physiquement l'origine de l'instabilité, on commence par raisonner sur un circuit électrique LC, oscillant à la période propre T_0 .

On imagine un dispositif permettant de moduler faiblement et périodiquement la distance e séparant les deux armatures du condensateur supposé plan, comme représenté sur la figure ci-contre. On note S la surface de chaque armature. Cette action mécanique est effectuée à la période excitatrice $T_e = 2\pi/\omega_e$.



Circuit LC

1. Exprimer la variation d'énergie électrostatique $\Delta\mathcal{U}_{\text{el}}$ emmagasinée dans le condensateur quand l'épaisseur e passe de $e_0 - \Delta e$ à $e_0 + \Delta e$ avec $\Delta e/e_0 = \epsilon$ et $0 \leq \epsilon \ll 1$. On supposera que la modification de la distance inter-armatures est « instantanée » pour ne pas modifier la charge $q(t)$. On exprimera le résultat en fonction de ϵ , $q(t)$, et C_0 , capacité d'un condensateur plan de surface S et d'épaisseur e_0 .

2. Commenter cette variation dans le cas où $q(t) = 0$.

L'excitation paramétrique de l'oscillateur consiste à faire varier l'épaisseur e du condensateur selon le mode suivant :

- la distance e augmente instantanément d'une quantité $2\Delta e$ chaque fois que la charge $q(t)$ atteint un extremum,
- la distance e passe de $e_{\text{max}} = e_0 + \Delta e = e_0(1 + \epsilon)$ à $e_{\text{min}} = e_0(1 - \epsilon)$ à chaque passage de $q(t)$ par 0.

On a représenté figure (1) l'évolution temporelle de la charge $q(t)$ (en l'absence d'excitation), ainsi que les séquences d'excitation paramétrique (dans le cas où $T_e = T_0/2$). Le graphe présenté figure (1) correspond à un régime éloigné (de nT_0) de la phase de démarrage que l'on n'étudiera pas.

3. Expliquer en quoi il est intéressant (d'un point de vue énergétique) de synchroniser l'instant où les armatures du condensateur se rapprochent (étape CD) avec celui où la charge du condensateur est nulle.
4. Superposer sur la figure 1.b l'allure de la courbe d'énergie électrostatique $\mathcal{U}_{\text{el}}(t)$ (cas du circuit excité). On présentera cette courbe en correspondance de la courbe donnant les variations de $e(t)$.
5. Dessiner l'allure de l'évolution temporelle de $\mathcal{U}_{\text{el}}(t)$ dans les cas où $T_e = T_0$, d'une part et $T_e = 3T_0/2$ d'autre part.

B. Mise en œuvre expérimentale :

Le circuit à capacité variable est simulé à l'aide d'un circuit électronique, utilisant un multiplieur supposé idéal (figure (2)), un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance propre L et de résistance interne r .

La tension, en sortie du multiplieur, s'écrit :

$$u_s(t) = k u_e(t) u(t) \quad ,$$

où

- * $u_e(t)$ est une tension sinusoïdale, de pulsation ω_e et d'amplitude U_e , délivrée par un générateur de tension. On choisit l'origine des temps telle que :

$$u_e(t) = U_e \cos(\omega_e t + \pi) \quad ,$$

- * $u(t)$ est la tension aux bornes du condensateur,
- * k est une constante de proportionnalité (dimensionnée) caractéristique du multiplieur.

6. Montrer que la charge $q(t)$ du condensateur satisfait l'équation différentielle :

$$\ddot{q} + 2\lambda\omega_0\dot{q} + \omega_0^2(1 + 2f\cos(\omega_e t))q = 0 \quad ,$$

où les coefficients f et λ seront exprimés en fonction de k , r , L , C et U_e .

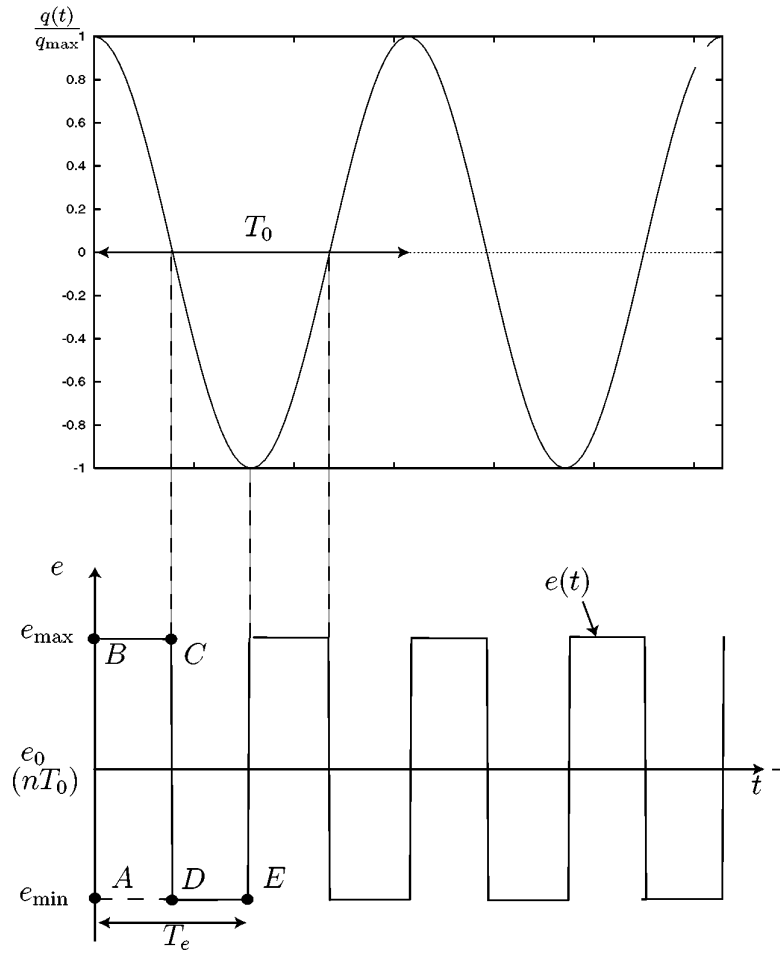


FIGURE 1 – a) (en haut) Signal de charge $q(t)$ (**en l'absence d'excitation**) – b) (en bas) Évolution de $e(t)$.

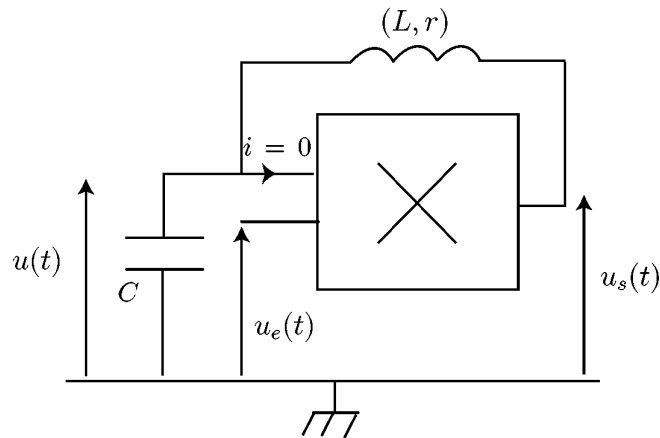


FIGURE 2 – Montage simulant un oscillateur paramétrique.

II. INSTABILITÉ PARAMÉTRIQUE DU GRAND ENCENSOIR DE SAINT-JACQUES DE COMPOSTELLE

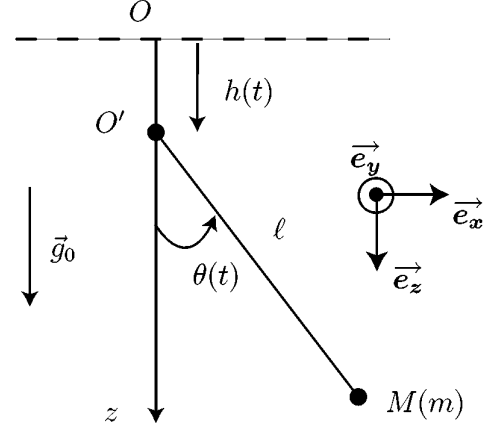
Le grand encensoir de Saint-Jacques de Compostelle est assimilé à un pendule simple, de longueur ℓ et de masse m (figure ci-contre). Le point de suspension O' de ce pendule suit un mouvement de translation forcé sinusoïdalement à la pulsation ω_e . Par rapport au repère fixe, dont l'origine O est solidaire du plafond de la cathédrale, le mouvement de translation du point de suspension O' s'écrit :

$$\overrightarrow{OO'}(t) = h(t) \vec{e}_z = h_0 \cos(\omega_e t) \vec{e}_z$$

avec $0 < h_0 \ll \ell$. On repère la position de l'encensoir par rapport à la verticale par l'angle $\theta(t)$. On notera :

- * $\mathcal{R}$, le référentiel terrestre, supposé galiléen sur l'échelle de temps du mouvement de l'encensoir,
- * $\mathcal{R}'$, le repère attaché au point de suspension O' , effectuant un mouvement de translation oscillant par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Dans un premier temps, on négligera tout phénomène dissipatif.



Modèle mécanique de l'encensoir.

A. Équation de Mathieu

7. Montrer que l'équation du mouvement est celle d'un pendule simple placé dans un champ de pesanteur effectif $g(t)$ que l'on exprimera en fonction de g_0 (intensité du champ gravitationnel présent à Saint-Jacques de Compostelle), ω_e et $h(t)$.
8. Dédire que l'équation différentielle du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + 2f \cos(\omega_e t)) \sin \theta = 0 \quad , \quad (1)$$

où

- * f est une grandeur associée à l'excitation paramétrique que l'on exprimera en fonction de h_0 , ω_e et g_0 . Dans tout le problème, on limitera l'étude au cas où $f \ll 1$.
 - * ω_0 une pulsation caractéristique qu'on exprimera en fonction de g_0 et ℓ .
9. Dans la suite, on étudie la naissance de l'instabilité, de sorte qu'il sera légitime de faire l'approximation des mouvements de faible amplitude. Donner alors la forme approchée de l'équation différentielle du mouvement. Cette équation est connue sous le nom d'*équation de Mathieu*.

B. Diagramme de stabilité des solutions

Désormais, le but est de définir à quelle condition, sur les paramètres de l'excitation (amplitude h_0 et pulsation ω_e), on parvient à déstabiliser l'oscillateur.

La théorie mathématique de Floquet montre que l'on peut chercher la solution générale de l'équation de Mathieu sous la forme :

$$\theta(t) = e^{\mu \omega_0 t} P(t)$$

où $P(t)$ est une fonction de période $T = 2\pi/(\omega_e/2) = 4\pi/\omega_e$ et μ une grandeur réelle.

L'approche la plus élémentaire consiste à chercher des solutions de l'équation de Mathieu sous la forme

$$\theta(t) = \theta_0 e^{\mu \omega_0 t} \cos\left(\frac{\omega_e}{2}t + \phi\right) \quad \text{où } \phi \text{ est une constante.} \quad (2)$$

- 10.** On note désormais $\omega = \omega_e/2$.

En laissant de côté les termes de pulsation 3ω qui apparaîtront dans le calcul (la question 15 portera sur la justification de cette approche), montrer que μ vérifie l'équation bicarrée suivante :

$$\mu^4 + 2(\Omega^2 + 1)\mu^2 + (\Omega^2 - 1)^2 - f^2 = 0 \quad \text{où } \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

- 11.** Montrer que l'instabilité paramétrique prend naissance dès lors que le paramètre d'excitation f vérifie la condition

$$f^2 > (1 - \Omega^2)^2 = f_c^2$$

- 12.** Établir alors le diagramme de stabilité de l'encensoir dans le plan (f, Ω) (f en ordonnée). Indiquer les zones de stabilité et d'instabilité.

- 13.** Commenter l'influence de l'amplitude de l'excitation à la résonance ainsi qu'en dehors de la résonance.

- 14.** Dans cette question, on excite l'oscillateur à une pulsation ω_e proche de $2\omega_0$. On pose $\omega_e = 2\omega_0(1 + \epsilon)$ où $|\epsilon| \ll 1$. Déterminer la largeur $\Delta\omega$ de la zone instable en fonction de $f > f_c$ au voisinage de $\omega = 2\omega_0$.

On établira pour cela une relation très simple entre f , $\Delta\omega$ et ω_0 .

- 15.** On se propose à présent de justifier le caractère négligeable des termes de pulsation 3ω . Pour cela, on se situe, d'une part, près du seuil d'instabilité, (en notant que $\omega \simeq \omega_0$ conduit à la condition $\mu \ll 1$) et, d'autre part, on limite l'étude au démarrage de l'instabilité.

Dans ces conditions, on cherche désormais la solution de l'équation de Mathieu sous la forme

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) + \theta_1 \cos(3\omega t + \Psi)$$

Afin de ne pas alourdir les calculs, et sans restreindre la portée du résultat auquel on aboutira, on se placera dans le cas simplifié où $\phi = \Psi = 0$, d'une part et $\omega \sim \omega_0$ d'autre part.

En laissant désormais de côté les termes de pulsation 5ω , déterminer une relation entre θ_1 , θ_0 et f . Justifier en particulier que θ_1 et f sont des « infiniment petits » du même ordre. Justifier alors l'hypothèse faite plus haut consistant à négliger les termes de pulsation 3ω .

C. Introduction d'un terme de dissipation.

- 16.** On étudie, à présent, l'influence des frottements sur le déclenchement de l'instabilité. On considérera que l'action de l'air sur l'encensoir se traduit simplement par un moment résistant (relativement au point O') d'expression :

$$\vec{\Gamma}_f = -2\lambda m \ell^2 \omega_0 \dot{\theta} \vec{e}_y \quad ,$$

où λ est une constante positive.

Déterminer la nouvelle équation de Mathieu en présence de dissipation (toujours dans l'approximation des mouvements de faible amplitude).

- 17.** On cherche encore la solution $\theta(t)$ sous la forme

$$\theta(t) = \theta_0 e^{\mu \omega_0 t} \cos(\omega t + \phi)$$

Montrer que l'équation de la nouvelle courbe de stabilité donnant f_c en fonction de λ et $\Omega = \omega/\omega_0$ est telle que

$$f_c^2 = (1 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \lambda^2$$

On rappelle que f_c est la valeur minimale de f qu'il faut atteindre pour déclencher l'instabilité, à la pulsation ω .

- 18.** Que dire de la largeur de la zone instable au voisinage de $\Omega = 1$ par rapport au cas non dissipatif ?
- 19.** Tracer le nouveau diagramme de stabilité et interpréter.

PHYSIQUE-CHIMIE

Calculatrices autorisées.

Le Seigneur des Anneaux



Notations : $\vec{u}_{AB}$: vecteur unitaire dirigé de A vers B .

En 2005, la mission Cassini-Huygens a permis d'obtenir de nouvelles connaissances sur le système planétaire de Saturne. La sonde Huygens a traversé l'atmosphère de Titan, un des satellites de Saturne.

Partie I - Bilan radiatif de Saturne

I.A - Saturne est composée principalement d'éléments légers composant la nébuleuse primordiale, l'hydrogène et l'hélium, sous forme liquide. On modélise, ici et dans toute la suite du problème, cette planète comme une sphère de rayon moyen $R_{Sa} = 5,82 \cdot 10^7$ m.

I.A.1) Calculer numériquement la masse volumique moyenne ρ de Saturne. Commentaire.

I.A.2)

a) On rappelle l'expression du champ de gravitation créé par un astre sphérique X , de centre O , de rayon R_X , de masse M_X et

de masse volumique ρ supposée uniforme, en un point de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques ($O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$) :

$$\vec{g}(r > R_X) = -\frac{GM_X}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{g}(r < R_X) = -\frac{GM_X}{R_X^3}r\vec{e}_r$$

Exprimer le champ de pesanteur $\vec{g}(r)$ à une distance $r < R_{Sa}$ du centre O de Saturne, en fonction de $\mathcal{G}, M_{Sa}, R_{Sa}, r$ et $\vec{u}_r$.

b) Application numérique : calculer le champ de pesanteur g_0 à la surface de Saturne. Commenter

I.A.3)

a) **On rappelle l'équilibre hydrostatique d'une particule fluide :**

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \vec{f}_v$$

Où $\vec{f}_v$ est la densité volumique des forces de volume s'exerçant sur une particule fluide.

En supposant que le champ de pression à l'intérieur de Saturne suit cette loi de l'hydrostatique et que la pression à la surface de Saturne est nulle, établir l'expression du champ de pression dans la planète Saturne $P(r)$ pour $r < R_{Sa}$.

b) Sous une pression supérieure à $P_{\text{mét}} = 2\text{Mbars}$, l'hydrogène existe sous une phase métallique inconnue sur Terre.

À quelle distance $r_{\text{mét}}$ du centre l'hydrogène est-il dans cet état ?

I.A.4) Saturne reçoit de la part du Soleil une puissance lumineuse. On admet que la surface du Soleil se comporte comme un corps noir rayonnant à la température de $T_S = 5700\text{ K}$.

a) Exprimer la puissance totale émise par le Soleil, Φ_0 , en fonction de T_S, R_S et σ , constante de Stefan. Proposer une valeur numérique.

b) Saturne absorbe une fraction a de la puissance interceptée, exprimer la puissance absorbée Φ_{abs} par Saturne en fonction de Φ_0, d_{SaS}, a et R_S .

c) Saturne rayonne comme un corps noir de température T_{Sa} .

En supposant qu'il y a équilibre thermique de Saturne, établir l'expression de la température T_{Sa} en fonction de T_S, d_{SaS}, R_S et a .

d) Application numérique : on donne $a = 0,66$. Calculer T_{Sa} . La température de la surface est de 130 K . Commenter.

I.B -

Pour expliquer l'origine de la puissance émise ainsi que la rareté de l'hélium dans les couches supérieures de Saturne, des physiciens ont proposé le modèle suivant : l'hélium est miscible dans l'hydrogène liquide mais insoluble dans l'hydrogène métallique liquide. Il se forme alors des gouttelettes d'hélium liquide plus denses que l'hydrogène. Ces gouttelettes tombent vers le centre de Saturne sous forme d'une pluie d'hélium .

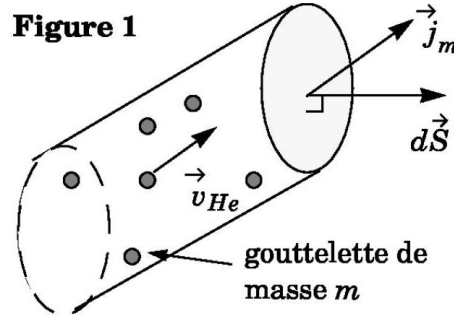
On note ρ_{He} et ρ_H les masses volumiques de l'hélium et de l'hydrogène métallique. On a $\rho_{He} > \rho_H$.

I.B.1) Soit m la masse d'une gouttelette d'hélium et $\vec{v}_{He}$ sa vitesse dans le référentiel de Saturne, supposé galiléen. La résultante des forces de frottement sur la gouttelette est $\vec{F} = -\lambda \vec{v}_{He}$ avec λ constante positive.

Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur la gouttelette au sein de l'hydrogène métallique liquide dans le champ de pesanteur $\vec{g}(r)$.

Écrire le théorème de la résultante cinétique appliqué à cette gouttelette.

I.B.2) Soit n le nombre de gouttelettes d'hélium par unité de volume. Le vecteur densité de courant d'hélium $\vec{J}_{He}$ est défini par : $dm_{He} = \vec{J}_{He} \cdot d\vec{S} dt$ où dm_{He} est la masse d'hélium traversant l'élément de surface dS durant dt (figure 1).



a) Montrer que $\vec{J}_{He} = nm\vec{v}_{He}$.

b) La pluie d'hélium descendante est accompagnée d'un flux d'hydrogène montant dont le vecteur densité de courant est

$$\vec{J}_H = -n \frac{\rho_H}{\rho_{He}} m \vec{v}_{He}.$$

En régime permanent, montrer que le vecteur densité de courant massique $\vec{J}_m = \vec{J}_{He} + \vec{J}_H$ s'écrit sous la forme $\vec{J}_m = \gamma \vec{g}(r)$ et exprimer γ en fonction de n, m, ρ_H, ρ_{He} et λ . Quelles sont les dimensions de γ ?

c) Donner une relation analogue en électromagnétisme en précisant les grandeurs.

I.B.3)

a) Les forces de frottement dissipent de l'énergie mécanique.

Exprimer la puissance P_F de la force de frottement sur une gouttelette en fonction de λ et $\vec{v}_{He}$.

Exprimer la puissance volumique P_V de ces forces en fonction de γ et $\vec{J}_m$ puis en fonction de γ et $\vec{g}(r)$.

b) Donner une analogie de ces relations en électromagnétisme en précisant les grandeurs analogues.

c) La pluie d'hélium a lieu dans les couches profondes comprises entre les sphères de rayons $R_1 = 0,2R_{Sa}$ et $R_2 = 0,55R_{Sa}$.

Exprimer la puissance totale dissipée P_{diss} par cette pluie en fonction de $\gamma, \mathcal{G}, M_{Sa}, R_{Sa}, T_{Sa}$ et Φ_{abs} .

Quelle doit être la valeur numérique de γ pour que T_{Sa} soit égal à 130 K ?

Partie III - Les anneaux de Saturne

Les anneaux de Saturne sont formés de fragments de roche et de glace d'eau (les particules de l'anneau) de 1 à 10 cm, tournant dans le plan équatorial de la planète sur des orbites circulaires. Ils forment des bandes peu denses, très fines (quelques centaines de mètres!) et larges (de l'ordre de 20000 km). L'origine des anneaux est due soit à la fragmentation d'un satellite naturel, soit à un nuage de particules qui n'ont pas pu s'agglomérer.

On étudie dans cette partie l'évolution d'un nuage de particules initialement concentrées en un anneau fin et étendu. On se place dans le référentiel saturno-centrique, supposé galiléen. On négligera l'attraction gravitationnelle des particules entre elles par rapport à l'attraction de Saturne.

III.A - Circularisation de la trajectoire

La masse de Saturne est supposée répartie de façon sphérique autour de son centre O . Initialement, le nuage est dense, de masse M . Son centre de masse G gravite autour de Saturne sur une orbite elliptique, d'excentricité e . Les particules décrivent des mouvements individuels complexes (rotation propre de chaque particule dans son référentiel barycentrique, trajectoires influencées par des chocs...), dont l'effet moyen est un mouvement collectif de révolution autour de la planète. Le moment cinétique en O dû à ce mouvement étudié dans le référentiel saturno-centrique est appelé moment cinétique orbital. Il est noté L_{Orb} . Sa norme est supposée constante pour les mouvements étudiés. L'extension du nuage est supposée faible devant

$r = OG$.

III.A.1) On note E_c^* l'énergie cinétique barycentrique du nuage.

On rappelle le théorème de Koenig permettant d'obtenir l'énergie cinétique d'un solide (Σ), de masse M , dans un référentiel R en fonction de l'énergie cinétique de ce solide dans son référentiel barycentrique et l'énergie cinétique de son centre d'inertie G auquel on a affecté la masse totale du système :

$$E_c(\Sigma)_R = E_c(\Sigma)_{R^*} + \frac{1}{2}MV^2(G)_R$$

Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du nuage en fonction de $M, M_{Sa}, \dot{r}, r, \mathcal{G}, E_c^*$ et L_{Oorb} .

III.A.2) L'équation polaire de la trajectoire de G est :

$$r = \frac{\frac{L_{Oorb}^2}{\mathcal{G}M_{Sa}M^2}}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

où θ est l'angle polaire de la trajectoire, e est l'excentricité de la trajectoire et θ_0 une constante.

En déduire l'expression de E_m en fonction de $M, M_{Sa}, \mathcal{G}, E_c^*, L_{Oorb}$ et e .

III.A.3) Le système {Saturne + nuage} est isolé, tandis que les chocs des particules du nuage entre elles provoquent une augmentation de l'énergie cinétique barycentrique.

On rappelle que pour une trajectoire elliptique, l'excentricité de l'ellipse est comprise entre zéro et un et que pour une trajectoire circulaire, l'excentricité vaut zéro.

En déduire que la trajectoire de G se circularise au cours du temps.

III.B - Localisation équatoriale

La trajectoire du nuage est à présent circulaire mais le plan du cercle, contenant le point O , a une orientation quelconque. Pour expliquer que les anneaux évoluent dans le plan équatorial de Saturne, on tient compte de l'aplatissement de la planète.

III.B.1) Expliquer qualitativement pourquoi la rotation propre de Saturne est la cause de son aplatissement aux pôles.

III.B.2) À cause de cet aplatissement, le champ gravitationnel de Saturne n'est plus exactement un champ newtonien. On modélise la répartition de la masse de Saturne par une sphère contenant deux cavités sphériques vides (Figure 3).

Justifier que cette répartition crée le même champ gravitationnel que la superposition des trois sphères ci-contre :

- (S_0) est homogène, de masse volumique $\rho > 0$, de masse M_0 , de centre O , de rayon R_{Sa} ;
- (S_1) et (S_2) sont homogènes, de masse volumique $-\rho$, de masse $-m$, centrées sur A et B respectivement, de rayon $R = R_{Sa} - b$.

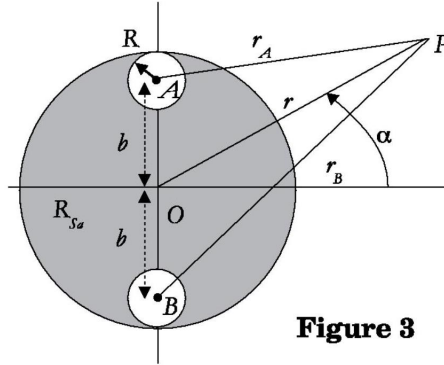


Figure 3

On pose $b = OA = OB$ et $M_{Sa} = M_0 - 2m$.

III.B.3)

a) Le champ gravitationnel $\vec{g}(P)$ crée en tout point P de l'espace dérive d'un potentiel gravitationnel $V(P)$ avec :

$$\vec{g}(P) = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

Exprimer le potentiel gravitationnel $V(P)$ en un point P de l'espace créé par Saturne en fonction des données précédentes.

b) On se place loin de la planète c'est-à-dire que $r \gg R_{Sa}$.

Montrer que le potentiel $V(r, \alpha)$ se met alors sous la forme :

$$V(r, \alpha) = -\frac{GM_{Sa}}{r} \left(1 - J_2 \frac{R_{Sa}^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) \right)$$

où J_2 une constante positive dont on donnera l'expression en fonction de M_{Sa} , m , R_{Sa} et b .

c) Application numérique : le rayon équatorial de Saturne (R_{Sa}) est supérieur de 11% au rayon polaire (b). Calculer la valeur de J_2 .

III.B.4) Quelle est l'expression de l'énergie mécanique E_m du nuage, en fonction de M , $V(r, \alpha)$, r , $\mathcal{G}$, E_c^* et L_{orb} ?

III.B.5) Les conditions d'évolution sont les mêmes que dans la question III.A.3.

Montrer qu'alors la trajectoire se rapproche du plan équatorial de Saturne.

III.C - Étalement du nuage

Le nuage est encore compact et peu étendu. Son centre de masse G suit une trajectoire circulaire dans le plan équatorial de Saturne. Cette planète exerce une force newtonienne sur le nuage. Le nuage est d'abord concentré en une masse quasi ponctuelle. Les collisions entre les particules vont étaler ce nuage tout en conservant son moment cinétique orbital L_{Oorb} . On considère que les particules du nuage ont formé un anneau très fin homogène, de rayon $r_0 = 150000$ km.

III.C.1) Exprimer le moment cinétique orbital L_{Oorb} en O et l'énergie mécanique E_m de l'anneau en fonction de $\mathcal{G}$, M_{Sa} , M et r_0 .

III.C.2) L'anneau fin va s'étaler en un anneau plat, dans le plan équatorial du fait de la dissipation de son énergie mécanique par le biais des collisions entre particules. On suppose que cet anneau plat est homogène, de masse surfacique σ , et qu'il s'étend de la distance r_1 à r_2 de O .

Exprimer le champ des vitesses $v(r)$ pour $r_1 < r < r_2$.

En déduire l'expression du moment cinétique L'_o en O et de l'énergie mécanique E'_m de l'anneau en fonction de $\mathcal{G}$, M_{Sa} , M , r_1 et r_2 .

III.C.3)

a) Montrer que la conservation du moment cinétique de l'anneau implique que r_1 et r_2 sont liés.

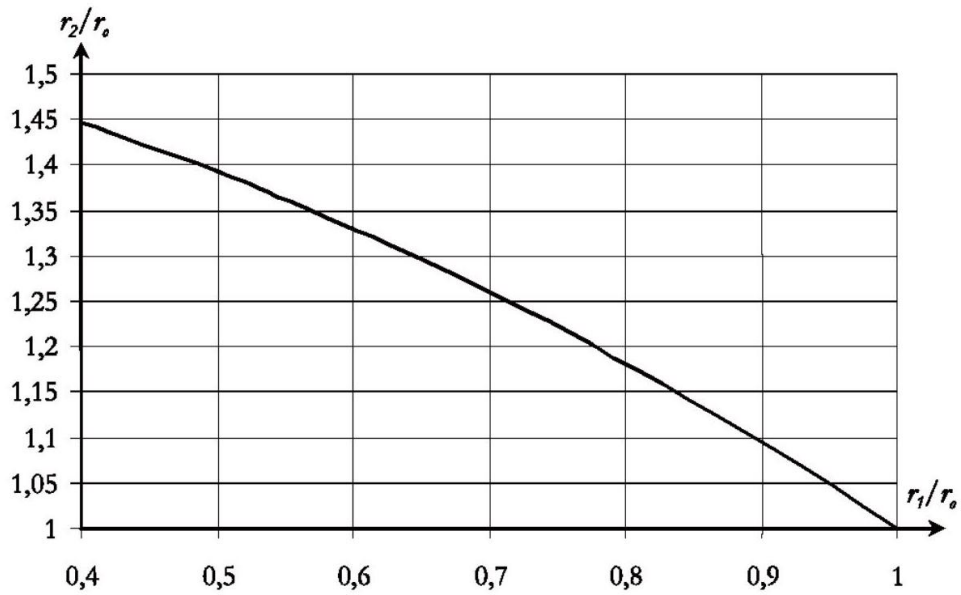
Exprimer cette relation sous la forme $\frac{r_1}{r_0} = f(X)$ où $X = \frac{r_2}{r_1}$.

Donner l'expression de $f(X)$.

b) Exprimer la variation relative d'énergie mécanique $\frac{\Delta E_m}{E_m} = \frac{E'_m - E_m}{E_m}$ en fonction de $\frac{r_1}{r_2}$ et $\frac{r_2}{r_0}$.

On donne le tracé de $\frac{r_2}{r_0}$ en fonction de $\frac{r_1}{r_0}$.

Compléter le tableau ci-dessous et conclure.



$\frac{r_1}{r_2}$	1	0,8	0,6	0,5
$\frac{\Delta E_m}{E_m}$	0			

c) Donner la largeur relative $\frac{r_2 - r_1}{r_0}$ de l'anneau lorsque 1% de l'énergie initiale a été dissipée.

Données :

	Masse	Rayon	Période de rotation autour du Soleil	Distance au Soleil
Soleil	$2,00 \cdot 10^{30}$ kg	$6,96 \cdot 10^8$ m	-	-
Saturne	$5,69 \cdot 10^{26}$ kg	$6,03 \cdot 10^7$ m (rayon équatorial) $5,82 \cdot 10^7$ m (rayon moyen)	29, 5 ans	$1,43 \cdot 10^9$ km
Jupiter	$1,90 \cdot 10^{27}$ kg	$7,15 \cdot 10^7$ km	11, 9 ans	$7,78 \cdot 10^8$ km