

# Spectroscopie par transformée de Fourier

## 1 Spectroscopie par transformée de Fourier

### 1.1 Principe

- ✘ On étudie le spectre d'une source quelconque de densité spectrale  $S(\sigma)$  en utilisant un Michelson réglé en lame d'air et en charriant à vitesse constante le miroir mobile ( $\delta = 2e = 2Vt$  avec pour ordre de grandeur  $V \approx 0.5 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ).
- ✘ La source étant non monochromatique, l'intensité au centre du champ d'interférences, dans le plan focal image de la lentille de sortie vaut<sup>1</sup> :

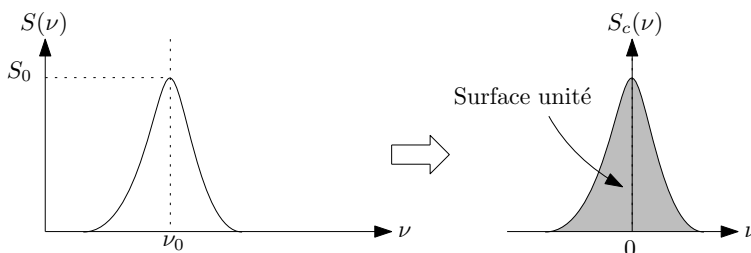
$$I(\delta) = 2I_0 \left( 1 + V(\delta) \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right)$$

Où :

- $\lambda_0$  est la longueur d'onde moyenne de la source.
- $V(\delta)$  est la visibilité :

$$V(\delta) = T.F.(S_c(\sigma))$$

Où  $S_c(\sigma)$  est le profil spectral centré et normalisé de la source.



**Figure 1** – Spectre normalisé et centré

- ✘ Sachant que  $\delta = 2e = 2Vt$ , on obtient facilement  $I(t)$  :

$$I(t) = 2I_0 (1 + V(t) \cos (4\pi\sigma_0 Vt))$$

- ✘ On peut alors calculer la FFT de  $I(t)$  :

$$F(\nu) = T.F.(I(t)) = T.F.(2I_0) + T.F.(2I_0 V(t) \cos (4\pi\sigma_0 Vt))$$

$$F(\nu) = 2I_0\delta(\nu) + 2I_0 \underbrace{T.F.(V(t))}_{S_c(\nu)} \otimes \left( \frac{1}{2}\delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}\delta(\nu + \nu_0) \right)$$

Avec  $\nu_0 = 2V\sigma_0$  et  $\nu = 2V\sigma$

- ✘ Dans l'espace des fréquences positives, on obtient donc un spectre constitué :
  - D'un composante continue, d'amplitude  $2I_0$

1. En toute rigueur, le contraste est égal au module de  $T.F.(S_c(\sigma))$  et la cosinus doit contenir l'argument de  $T.F.(S_c(\sigma))$ . On considèrera ici  $T.F.(S_c(\sigma))$  réelle

- Du spectre de la source centré sur la fréquence  $\nu_0 = 2V\sigma_0$  et de largeur à mi-hauteur  $\Delta\nu_{FWHM} = 2V\Delta\sigma_{FWHM}$

$$F(\nu) = 2I_0\delta(\nu) + I_0S_c(\nu - \nu_0)$$

- ✗ Ordres de grandeur :

$$V \approx 0.5 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ et } \sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{0.5} \mu\text{m} \text{ d'où : } \nu_0 = 2V\sigma_0 \approx 2 \text{ Hz}$$

## 1.2 Étude d'un profil de raie (ou d'un filtre interférentiel)

- ✗ Quelque soit la méthode d'exploitation, le montage est le même : il est donné par la figure 2 (Dans le cas de l'étude d'un filtre interférentiel, remplacer la lampe spectrale par une lampe QI).

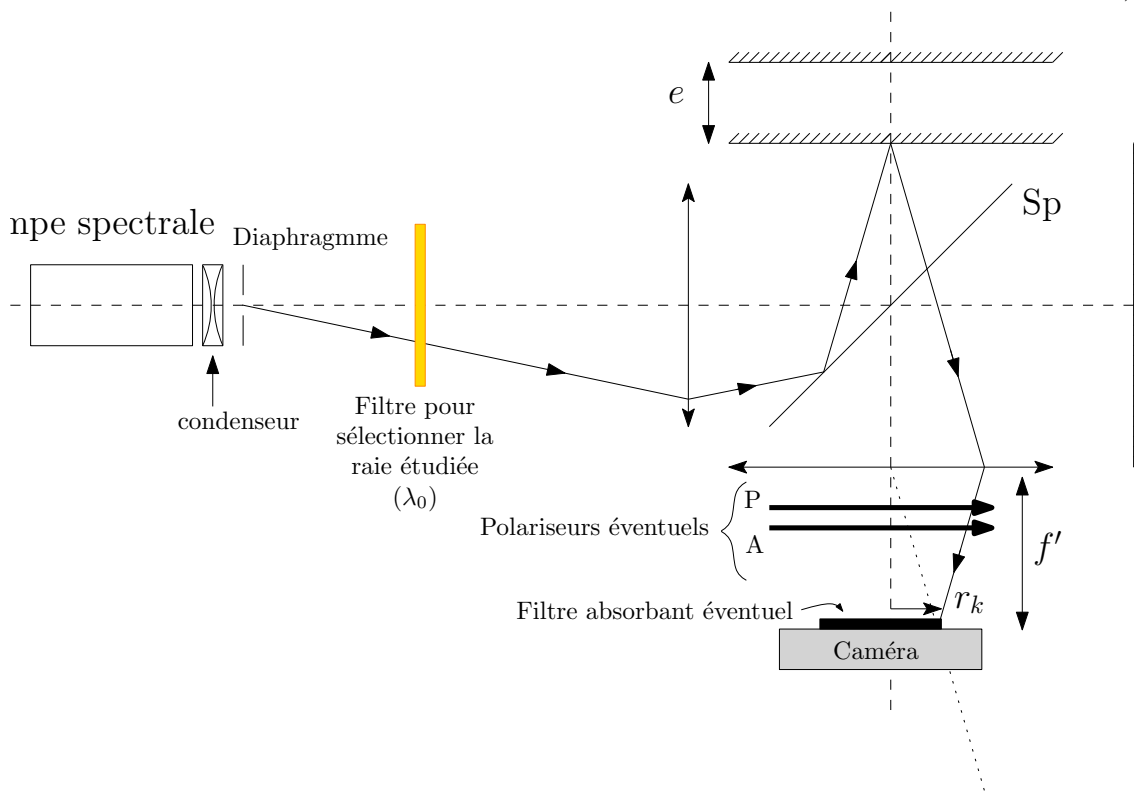


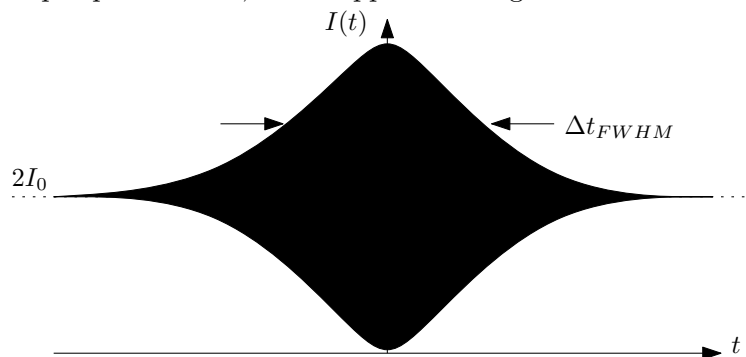
Figure 2

- ✗ On veillera à commencer le chariotage automatique loin du contact optique, dans une zone où le contraste est très faible et à charioter en direction du contact optique (les anneaux doivent rentrer). Pour l'estimation de la durée de chariotage, voir plus loin.
- ✗ Pour éviter la saturation, ou à l'inverse pour augmenter l'intensité au niveau du capteur, vous avez plusieurs solutions :
  - Adapter la distance focale de la lentille de sortie (plus la focale est grande, plus l'intensité au niveau de la photodiode sera faible).
  - Visser un filtre absorbant à l'entrée de la caméra.
  - Disposer une couple polariseur/analyseur après la lentille de sortie et moduler l'intensité de sortie en modifiant l'angle entre les deux.

### 1.2.1 Approche temporelle

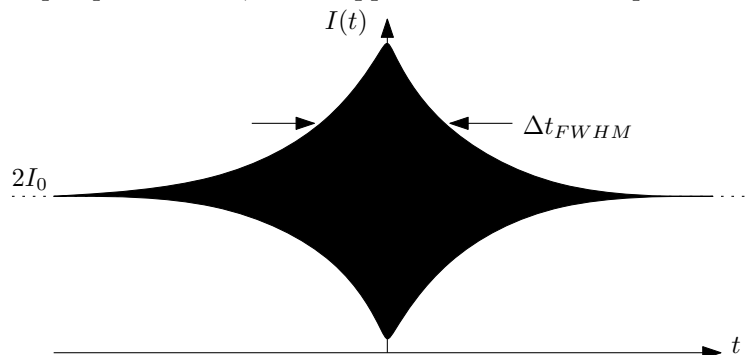
✕ Allure des chronogrammes obtenus :

- Pour une lampe spectrale BP, l'enveloppe est une gaussienne<sup>2</sup>



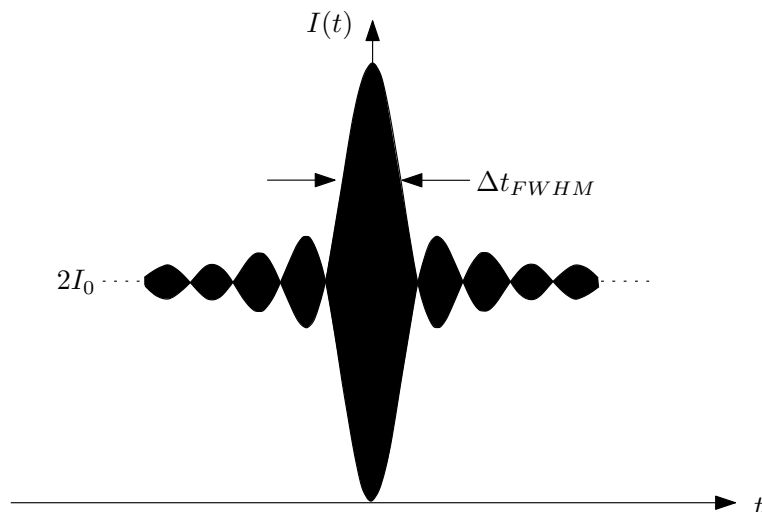
**Figure 3** – Chronogramme obtenu pour un spectre gaussien (lampe BP)

- Pour une lampe spectrale HP, l'enveloppe est une double exponentielle<sup>3</sup>



**Figure 4** – Chronogramme obtenu pour un spectre Lorentzien (lampe HP)

- Pour un filtre interférentiel de fonction de transfert du type « fonction porte », l'enveloppe est un sinc.



**Figure 5** – Chronogramme obtenu pour un spectre de type porte

2. En effet la T.F. d'une gaussienne est une gaussienne

3. En effet la T.F. d'une Lorentzienne est une double exponentielle

✘ Largeur à mi-hauteur du graphe, nous donne accès  $l_c$  :

$$\Delta t_{FWHM} = \frac{\Delta \delta_{FWHM}}{2V} \approx \frac{l_c}{2V}$$

☛ Pour une lampe spectrale BP,

$$\Delta \delta_{FWHM} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi} l_c \approx 0.37 l_c \Rightarrow \Delta t_{FWHM} = \frac{0.37 l_c}{2V}$$

☛ Pour une lampe spectrale HP,

$$\Delta \delta_{FWHM} = \frac{4 \ln 2}{2\pi} l_c \approx 0.44 l_c \Rightarrow \Delta t_{FWHM} = \frac{0.44 l_c}{2V}$$

☛ Pour un profil rectangulaire,

$$\Delta \delta_{FWHM} = 2l_c \Rightarrow \Delta t_{FWHM} = \frac{l_c}{V}$$

⇒ On mesure à l'aide des curseurs,  $\Delta t_{FWHM}$  et on en déduit  $l_c$

☛ Pour un doublet :

$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1; l_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda}; \Delta \delta_{batt} = l_c; \Delta t_{batt} = \frac{l_c}{2V}$$

⇒ On mesure à l'aide des curseurs,  $\Delta t_{batt}$  et on en déduit  $l_c$

✘ Ordre de grandeur

on peut estimer le temps de chariotage nécessaire au tracé du profil spectrale :

☛ Pour une lampe spectrale BP au sodium (raie jaune),

$$\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}; l_c \approx 32 \text{ mm} \Rightarrow \Delta t_{FWHM} = 12 \times 10^3 \text{ s}$$

☛ Pour une lampe spectrale HP au sodium (raie jaune),

$$\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}; l_c \approx 3.8 \text{ mm} \Rightarrow \Delta t_{FWHM} = 1.4 \times 10^3 \text{ s}$$

☛ Pour une lampe spectrale BP au mercure (raie verte),

$$\lambda_0 = 546.1 \text{ nm}; l_c \approx 88 \text{ mm} \Rightarrow \Delta t_{FWHM} = 38 \times 10^3 \text{ s}$$

☛ Pour une lampe spectrale HP au mercure (raie verte),

$$\lambda_0 = 546.1 \text{ nm}; l_c \approx 11 \text{ mm} \Rightarrow \Delta t_{FWHM} = 2.4 \times 10^3 \text{ s}$$

☛ Pour un filtre interférentiel ,

$$l_c \approx 0.03 \text{ mm} \Rightarrow \Delta t_{FWHM} = 60 \text{ s}$$

☛ Pour le doublet jaune du sodium :

$$\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}; \lambda_2 = 589.6 \text{ nm}; l_c = 0.58 \text{ mm}; \Delta \delta_{batt} = 0.58 \text{ mm} \Rightarrow \Delta t_{batt} = 580 \text{ s}$$

☛ Pour le doublet jaune du mercure :

$$\lambda_1 = 577.0 \text{ nm}; \lambda_2 = 579.1 \text{ nm}; l_c = 0.15 \text{ mm}; \Delta \delta_{batt} = 0.15 \text{ mm} \Rightarrow \Delta t = 150 \text{ s}$$

### 1.2.2 Approche fréquentielle

✘ On réalise le même montage que précédemment (figure 2). Dans le logiciel Caliens, on visualise la FFT de  $I(t)$ .

- ☛ Pour une lampe spectrale BP, le profil spectral est une gaussienne centrée sur  $\nu_0 = 2V\sigma_0$  et de largeur à mi-hauteur

$$\Delta\nu_{FWHM} = 2V\Delta\sigma_{FWHM} = \frac{2V \times 2.35}{l_c}$$

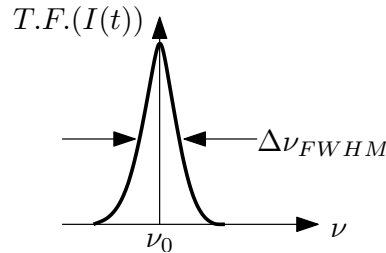


Figure 6

- ☛ Pour une lampe spectrale HP, le profil spectral est une Lorentzienne centré sur  $\nu_0 = 2V\sigma_0$  et de largeur à mi-hauteur :

$$\Delta\nu_{FWHM} = 2V\Delta\sigma_{FWHM} = \frac{2V}{l_c}$$

Le profil spectral est très proche du profil lorentzien, comme précisé figure 7

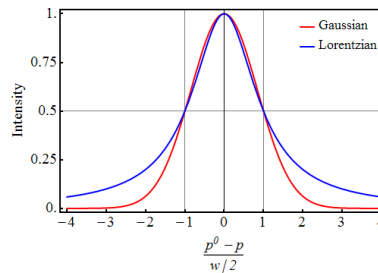


Figure 7 – Différence entre le profil Lorentzien et gaussien à largeur à mi-hauteur identique

- ☛ Pour un filtre interférentiel le profil spectral est une fonction porte centré sur  $\nu_0 = 2V\sigma_0$  et de largeur à mi-hauteur :

$$\Delta\nu_{FWHM} = 2V\Delta\sigma_{FWHM} = \frac{2V}{l_c}$$

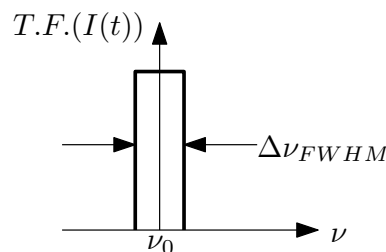


Figure 8

✘ Ordres de grandeur :

- ☛ Pour une lampe spectrale BP au sodium (raie jaune),

$$\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}; l_c \approx 32 \text{ mm}; \Rightarrow \nu_0 = 1.70 \text{ Hz}; \Delta\nu_{FWHM} = 73 \mu\text{Hz}$$

- Pour une lampe spectrale HP au sodium (raie jaune),

$$\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}; l_c \approx 3.8 \text{ mm}; \Rightarrow \nu_0 = 1.70 \text{ Hz}; \Delta\nu_{FWHM} = 0.26 \text{ mHz}$$

- Pour une lampe spectrale BP au mercure (raie verte),

$$\lambda_0 = 546.1 \text{ nm}; l_c \approx 88 \text{ mm}; \Rightarrow \nu_0 = 1.83 \text{ Hz}; \Delta\nu_{FWHM} = 27 \mu\text{Hz}$$

- Pour une lampe spectrale HP au mercure (raie verte),

$$\lambda_0 = 546.1 \text{ nm}; l_c \approx 11 \text{ mm}; \Rightarrow \nu_0 = 1.83 \text{ Hz}; \Delta\nu_{FWHM} = 91 \mu\text{Hz}$$

- Pour un filtre interférentiel ,

$$l_c \approx 0.03 \text{ mm}; \Rightarrow \Delta\nu_{FWHM} = 0.03 \text{ Hz}$$

- Pour le doublet jaune du sodium :

$$\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}; l_c \approx 0.58 \text{ mm} \Rightarrow \nu_0 = 1.70 \text{ Hz}; \Delta\nu_{batt} = 1.72 \text{ mHz}$$

- Pour le doublet jaune du mercure :

$$\lambda_0 = 578.05 \text{ nm}; l_c \approx 0.15 \text{ mm} \Rightarrow \nu_0 = 1.73 \text{ Hz}; \Delta\nu_{batt} = 6.67 \text{ mHz}$$

### 1.3 Cas de la diode LASER

Les modes longitudinaux d'une diode LASER correspondent aux fréquences présentes dans le spectre d'une diode LASER présentant un profil Gaussien. Ces fréquences sont distantes les unes des autres d'une même quantité appelée intervalle spectrale libre et dépendant le longueur de la cavité ( $L$ ) et de l'indice ( $n = 3.5$ ).

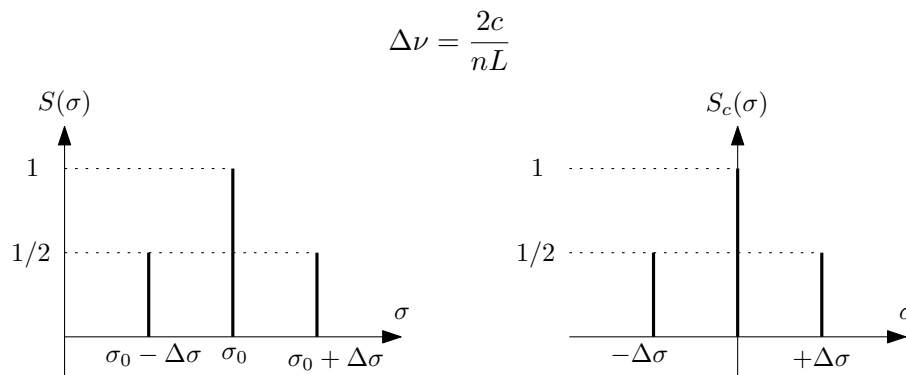


Figure 9

On modélise le spectre de la diode LASER de la façon suivante :

$$S_c(\sigma) = \delta(\sigma) + \frac{1}{2}\delta(\sigma - \Delta\sigma) + \frac{1}{2}\delta(\sigma + \Delta\sigma)$$

La transformée de Fourier de  $S_c(\sigma)$  est :

$$V(\delta) = 1 + \cos 2\pi\delta\Delta\sigma$$

L'éclairement obtenu sur le capteur est alors de la forme :

$$I(\delta) = 2I_0 (1 + V(\delta) \cos 2\pi\sigma_0\delta)$$

où :

$$\delta(t) = 2Vt$$

En tenant compte du profil spectral de la diode, et d'après le calcul de la visibilité, on obtient un éclaircissement donné par la figure 10.

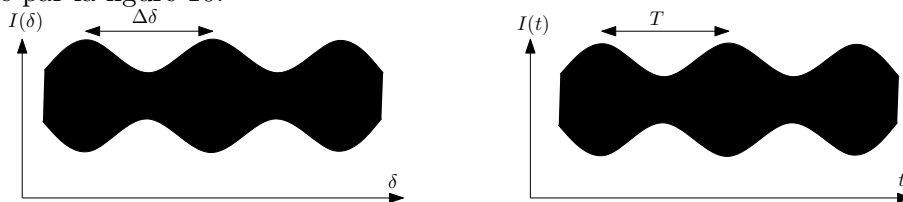


Figure 10

La période des battements observés est :

✘ Période de la différence de marche (d'après l'expression de la visibilité) :  $\Delta\delta = \frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{1}{l_c}$ .

✘ Période temporelle :  $T = T_{batt} = \frac{1}{2\Delta\sigma V}$ .

Le principe de la mesure est donc le suivant : grâce au chronogramme obtenu ( $I(t)$ ), on détermine  $T$  et on en déduit  $\Delta\sigma$ .

Ordres de grandeur :

✘  $\lambda_0 = 635 \text{ nm}$  ou  $650 \text{ nm}$  en fonction de la diode LASER. Ainsi :  $\nu_0 = 1.57 \text{ Hz}$  ou  $1.54 \text{ Hz}$ .

✘  $\Delta\lambda \approx 0.2 \text{ nm}$  et donc :  $\Delta t = T_{batt} \approx 2 \times 10^3 \text{ s}$ ;  $\Delta\nu_{batt} = 0.5 \mu\text{m}$ .

## 2 Travail à faire

### 2.1 Montage

- ✘ Régler l'interféromètre de Michelson en lame d'air à l'aide d'une lampe spectrale au sodium ou d'une lampe spectrale au mercure équipée d'un filtre interférentiel.
- ✘ Choisissez une source à étudier par spectroscopie par transformée de Fourier (Doublets, diode LASER ou filtre interférentiel éclairé par une lumière blanche).
- ✘ Dans le plan focal de la lentille de sortie placer la caméra Caliens (centrer la barrette (pixel central) sur le centre des anneaux) et observer le signal sur le logiciel de la caméra : le signal ne doit pas saturer.
- ✘ Demander à coupler la vis de chariotage et le moteur (technicienne). Mettre en marche le moteur : vous devez observer la "naissance" des anneaux sur le pixel central. La courbe doit être symétrique, de rapport signal/bruit correct sans saturer.
- ✘ Régler la durée d'acquisition (produit de la sensibilité et du nombre de points) en fonction de la lampe choisie et lancer l'acquisition.

### 2.2 Exploitation

- ✘ Si votre acquisition est correcte enregistrer la.
- ✘ Exploiter les deux courbes obtenues :  $I(t)$  et le spectre. On déterminera la valeur précise de la vitesse de chariotage  $V$  en zoomant sur la courbe  $I(t)$  pour faire apparaître des oscillations.