Corrigé UPS proposé par B. Hallé (Lycée Châtelet, Douai) et S. Laurette (Lycée Wallon, Valenciennes)

Q 1. Enoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_Q$ qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

$$\boxed{\vec{j}_Q = -\lambda \,\overrightarrow{\text{grad}}(T)}$$

Q 2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur dx de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_a \qquad \text{avec} \qquad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} \tag{1.1}$$

système Σ { portion d'ailette entre x et $x+dx$ }

1er principe sur Σ entre t et $t+dt$, en régime permanent :

$$\underbrace{d(\delta U)}_{0 \text{ en régime permanent}} = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{0 \text{ car transformation isochore}} = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) - \delta Q_{lat}$$

d'où $\Phi_{th}(x)\,dt - \Phi_{th}(x+dx)\,dt - \Phi_{lat}\,dt = 0$

$$j_Q(x) S \cancel{dt} - j_Q(x+dx) S \cancel{dt} - h(T(x)-T_a)\underbrace{S_{lat}}_{2\pi a\,dx} \cancel{dt} = 0$$

d'où $-\frac{dj_Q}{dx}\,dx\,\pi a^2 - 2\pi a\,dx\,h\,(T(x)-T_a) = 0$ (surface latérale de Σ)

$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ en

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2}\,a - 2h\,(T(x)-T_a) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \underbrace{\frac{2h}{\lambda a}}_{1/\delta^2} T = -\frac{2h}{\lambda a} T_a}$$

Q 3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon $a = 1$ mm.

• d'une part, on déduit de $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$

que $\underbrace{\left[\frac{d^2T}{dx^2}\right]}_{\text{dimension}} = \left[\frac{T}{\delta^2}\right]$

$\frac{\Theta}{L^2} = \frac{\Theta}{[\delta]^2}$ d'où $\boxed{[\delta] = L}$

• d'autre part, $[\delta] = \sqrt{\frac{[\lambda a]}{[2h]}}$

or $[\lambda] = \frac{[j_Q]}{[\overrightarrow{\text{grad}}\,T]} = \frac{[j_Q]}{\Theta \cdot L^{-1}}$

$[h] = \frac{[\vec{j}_Q]}{\Theta}$ car $j_{Q,lat} = h(T(x)-T_a)$

donc $\frac{[\lambda]}{[h]} = L$ d'où $\frac{[\lambda a]}{[2h]} = L^2$ et d'où $\boxed{[\delta] = L}$ cohérent

AN $\boxed{\delta = 2\text{ cm}}$ pour $h =$ "h_r" (arrondi) en présence de ventilateurs

NB $\delta = 1{,}6$ cm avec 2CS.

Q 4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température $T(x)$ en $x = 0$ et en $x = b$.

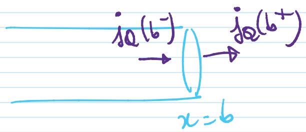
en $x=0$, le contact parfait impose $\boxed{T(x=0) = T_d}$

en $x = b$, • l'énoncé est moins explicite sur la modélisation retenue.

• de plus, au regard de "Figure 2" plus bas, $T(x=b)$ ne semble pas être imposée à T_a (car on voit que $T(x=b)$ dépend de b/δ).

→ pas de "contact parfait" entre l'ailette et l'air en $x=b$

→ utilisons alors la continuité du flux thermique :



$$\underbrace{j_Q(b^-)}_{\text{dans le matériau} \Rightarrow \text{loi de Fourier}} = \underbrace{j_Q(b^+)}_{\text{dans l'air à l'interface} \Rightarrow \text{loi de Newton}}$$

$$\boxed{-\lambda \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=b^-} = h(T(x=b)-T_a)}$$

Q 5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de $T(x)$ dans le cas où $b \gg \delta$. Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

δ = "distance caractéristique d'atténuation de la température"

si $b \gg \delta$ alors $T(x)$ ne varie quasiment plus au voisinage de $x = b$

d'où $j_Q(x=b^-) = -\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=b^-} \to 0$

d'où $h(T(x=b) - T_a) \to 0$

d'où $\boxed{T(x=b) = T_a \quad \text{si } b \gg \delta}$

Résolvons donc le problème : $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$ avec $\begin{cases} T(0) = T_d \\ T(b) = T_a \end{cases}$

équation homogène associée

- $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = 0$
- équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ soit $r = \pm \frac{1}{\delta}$

solution particulière recherchée → forme de cste (car 2nd membre cst)

$$\frac{d^2T^{PART}}{dx^2} - \frac{T^{PART}}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$$

- donc $T^{HOM} = Ae^{-x/\delta} + Be^{x/\delta}$ donc $T^{PART} = T_a$

donc $T = T^{HOM} + T^{PART} = Ae^{-x/\delta} + Be^{+x/\delta} + T_a$

condition limite

$$\begin{cases} T(x=0) = A + B + T_a = T_d & [*] \\ T(x=b) = Ae^{-b/\delta} + Be^{b/\delta} + T_a \underset{b/\delta \gg 1}{\simeq} Be^{b/\delta} + T_a = T_a & [**] \end{cases}$$

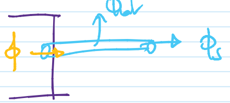
d'où [**] donne $B = 0$ et [*] : $A = T_d - T_a$

D'où : $\boxed{T(x) = (T_d - T_a)\, e^{-x/\delta} + T_a}$

D'où $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a} \underset{b \gg \delta}{=} e^{-x/\delta}$; qui semble cohérent avec le tracé de figure 2 pour $b/\delta = 10$.

Q 6. La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport b/δ, pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de R_{th} commune aux différents matériaux lorsque $b \ll \delta$; justifier sa valeur numérique.

si $b \ll \delta$, on voit d'après la figure 2 (pour $b/\delta = 0{,}1$) que T est uniforme dans la barre. Autrement dit le transfert thermique latéral est négligeable devant le transfert thermique à l'extrémité de l'ailette



(car δ est la distance caractéristique d'atténuation de T, due au flux latéral, ici $b \ll \delta$: le flux latéral impacte peu le champ de T)

d'où $\phi = \phi_{lat} + \phi_S \simeq \phi_S = h\underset{\pi a^2}{S}\,(T(x=b) - T_a) \underset{T(x) \text{ uniforme si } b \ll \delta}{\simeq} hS(T_d - T_a)$

D'où $R_{th} \overset{def}{=} \frac{T_d - T_a}{\ } \quad \frac{1}{\ }$

πa^2 T(x) uniforme si $b \ll \delta$

D'où $\boxed{R_{th} \overset{def}{=} \frac{T_d - T_a}{\phi} = \frac{1}{hS}}$ $(\phi = \mathcal{P})$

si h ne dépend pas de la nature du métal/semi-conducteur (Si) ; ce que semblent suggérer les données à la fin de l'énoncé, alors on $\boxed{\text{a bien } R_{th} \text{ indépendant du matériau lorsque } b \ll \delta}$

AN avec ventilateur ($h = $ "h_2")

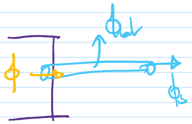
$\boxed{R_{th} = \frac{1}{h_2 \pi a^2} = 1.10^3\ K.W^{-1}}$ on retrouve la valeur du graphique.

Q 7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique R_{th} de l'ailette en silicium dans le cas où $b \gg \delta$.

si $b \gg \delta$, on a $T(x) = (T_d - T_a)\, e^{-x/\delta} + T_a$

a $\underset{\mathcal{P}}{\phi} = \phi(x=0) = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} S = \frac{\lambda}{\delta}(T_d - T_a) S$

loi de Fourier



D'où $\boxed{R_{th} = \frac{\delta}{\lambda S}} = 0{,}03.10^3\ K.W^{-1}$

cohérent avec figure 3 quand $b \gg \delta$

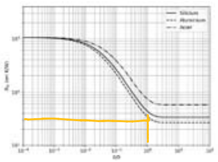
$= 3{,}4.10^1\ K.W^{-1}$ avec 2CS.

Q 8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à $b = 2$ cm. En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon $a = 1$ mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède par 60 °C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

Pour l'Aluminium, on trouve $\delta = 2$ cm

et donc $\frac{b}{\delta} = 1$

La figure 3 nous indique alors que



$R_{th} \simeq 3.10^2\ K/W = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{P}}$

où $\mathcal{P}$ est la puissance évacuée par 1 ailette.

Ici, avec N ailettes et une puissance totale à évacuer $\mathcal{P}_{tot} = 200W$; on a $\boxed{\mathcal{P}_{tot} = N\mathcal{P} = N \times \frac{T_d - T_a}{R_{th}}}$

Si $T_d < 60°C$, et en supposant $T_a = 20°C$

on a $\boxed{N = \frac{P_{tot} R_{th}}{T_d - T_a} > \frac{200 * 30}{40} = 150}$

NB je suis "obligé" de mettre 3 CS ici alors que depuis le début, avec a = 1mm je travaillais avec 1 CS. On pouvait travailler avec 2CS depuis le début même, ce qui serait un meilleur compromis...

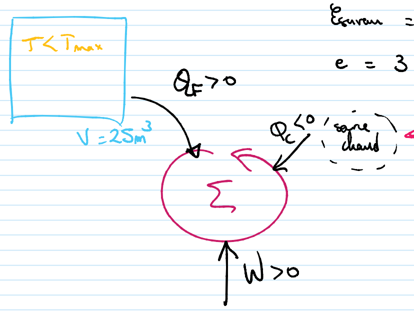
150 ailettes paraissent nécessaires, ce qui semble élevé. Mais leur rayon étant de 1mm, c'est envisageable.

Q 9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.

$T_{max} = 35°C$

$E_{serveurs} = 100$ kW.h chaque jour.

$e = 3$



Σ = fluide circulant dans la machine frigorifique.

La pièce constitue donc ici la source froide de la machine frigorifique représentée ci-dessus.

Par définition $e = \frac{Q_F}{W}$

Sur une année $W^{an} = \frac{Q_F^{an}}{e} = \frac{365 * E_{serveurs/jour}}{e}$ en faisant l'hypothèse qu'il faut évacuer toute l'énergie thermique apportée par les serveurs (de sorte que la température de la pièce reste constante).

Soit un coût annuel $ca = p * W^{an} = 0{,}17 * \frac{365}{3} * 100$ €

prix / kWh — en kWh

$\boxed{ca = 2{,}1 k€}$

Q 10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température T_{max}. Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique ρ_{air} de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air D_m, en kg·s^{-1}, brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

Loi des gaz parfaits : $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$

Donc $\rho_{air} = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$ or $M = 0{,}2 M_{O_2} + 0{,}8 M_{N_2} = 29$ g/mol

d'où $\boxed{\rho_{air} = \frac{1.10^5 * 29.10^{-3}}{8{,}31 * (273+35)} kg/m^3 = 1{,}1 kg/m^3}$

De plus $\boxed{D_m = \rho_{air} D_V = 0{,}94.10^{3} kg/l}$ $= 0{,}26$ kg/s

kg/s — m³/s

Q 11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de *free-cooling* est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de *free-cooling* dans cette salle informatique.

Modélisons le système "free-cooling" par de l'air à la température Text rentrant dans la salle (température Tmax) et sortant à la température Tmax :

Le 1er principe industriel sur l'air circulant donne

$$D_m(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = P_{th} + P_{utile}$$

$c_p \Delta T$

négligé si $S_e = S_s$ (sections en entrée et sortie)

négligé si altitude entrée = altitude sortie

négligé en l'absence de pièces mobiles autres que la pompe.

⊕ conservation D_m en RP

d'où $D_m c_p (T_{max} - T_{ext}) = P_{th}$

puissance thermique captée par l'air ... et donc évacuée par le free cooling.

cours physique statistique :

→ chaque degré de liberté quadratique (5 pour GP diatomique) compte pour R/2 dans $C_{v,molaire}$

$\Rightarrow C_{v,m} = \frac{5R}{2}$

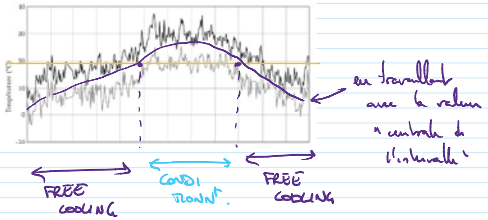
$\Rightarrow c_{p,m} = C_{v,m} + R = \frac{7}{2}R$

$\Rightarrow$ $\boxed{c_p = \dfrac{7}{2}\dfrac{R}{M} \quad (\text{massique})}$ $= 1{,}0 \cdot 10^3 \ J \cdot kg^{-1}$

or $P_{th} = \dfrac{100 \ kW.h}{24 \ h} = 4{,}2 \ kW$ à évacuer. ($\gg \mathcal{P}_v$ donc hypothèse $\mathcal{P}_{utile}$ négligeable ok)

d'où $T_{max} - T_{ext}$ doit être supérieur à $\dfrac{P_{th}}{D_m c_p} = 16°C$.

soit $\boxed{T_{ext} < 19°C}$



Donc pendant 8 mois : free cooling $\quad$ coût $= p \cdot \mathcal{P}_v \cdot \Delta t = 0{,}17 \cdot 0{,}06 \cdot 8 \cdot 30 \cdot 24 = 59€$

4 mois : conditionnement $\quad$ coût $= \dfrac{2{,}1 \cdot 10^3}{3}$

soit $\boxed{\text{coût} = 0{,}8 \ k€}$

donc $\dfrac{\text{coût (avec free cooling)}}{\text{coût (sans free cooling)}} = 0{,}4$: ça vaut le coup.

$\boxed{\text{gain en euros} \approx 1 \ k€}$