Centrale TSI physique 2012 : "De la Terre à la Lune"

I - De la Terre

A - Décollage

1. Choix du référentiel :
   (a) Le référentiel géocentrique est le référentiel **en translation par rapport au référentiel héliocentrique et ayant pour origine le centre de la Terre**.
   Le référentiel terrestre est le **référentiel lié au sol terrestre**, c'est à dire en rotation avec la Terre autour du référentiel géocentrique et ayant pour origine le centre de la Terre.
   (b) Un référentiel galiléen est un **référentiel dans lequel le principe d'inertie** (première loi de Newton) est vérifié.
   (c) $\mathcal{R}_G$ est galiléen en très bonne approximation ; on peut montrer que cela revient à négliger les termes de marées.
2. Influence de la base de lancement :
   (a) Le point B décrit une trajectoire circulaire à vitesse constante autour de l'axe de rotation terrestre sur un parallèle terrestre de rayon $r = R_T \cos\lambda$.
   (b) Le point B parcourt le cercle en un jour $T = 2\pi/\Omega$, c'est à dire pour la vitesse :
   $$\boxed{v_B = \frac{2\pi R_T \cos\lambda}{T} = R_T \cos(\lambda)\Omega}$$
   (c) Application numérique :
   $$\boxed{v_B(\lambda_1) = 409 \text{ m.s}^{-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_B(\lambda_2) = 463 \text{ m.s}^{-1}}$$
   (d) Dans le référentiel géocentrique, la fusée a initialement la vitesse v_B et atteint, une fois en orbite, la vitesse v_0, ce qui représente une variation d'énergie cinétique :
   $$\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2} m_F \left(v_0^2 - v_B^2\right)}$$
   (e) Évaluons la variation relative d'énergie cinétique :
   $$\boxed{\frac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}} = \frac{v_{B2}^2 - v_{B1}^2}{v_0^2 - v_{B1}^2} = 7 \times 10^{-4}}$$
   L'apport supplémentaire de vitesse initiale permet de diminuer la variation d'énergie mécanique et de consommer moins de carburant.
   (f) On peut citer plusieurs autres avantages :
   ⋆ La Terre étant boursouflée au niveau de l'équateur, la force de gravitation y est un peu plus faible qu'à une latitude plus élevée ; lancée de Kourou, la fusée s'extrait plus facilement d'un champ de pesanteur un peu plus faible.
   ⋆ La base de Kourou est située au bord de la mer ; en cas de problème, les débris peuvent s'écraser en mer, loin de toute habitation.

B - Orbite circulaire

1. Généralités :
   (a) $\boxed{\vec{F}_G = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r^3}\vec{r}}$.
   (b) $\boxed{\vec{F}_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}}$.
   (c) Théorème de Gauss électrostatique :

> Le flux du champ électrostatique à travers une surface (Σ) **fermée** et **orientée** vers l'extérieur est égal à la charge totale Q_{int} contenue à l'intérieur de cette surface divisée par ε_0 :
> $$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

(d) En comparant les expressions des forces électrostatique et gravitationnelle, on constate qu'il faut remplacer Q_{int}/ε_0 par $-4\pi\mathcal{G}M_{int}$, ce qui donne :

Le flux du champ de gravitation à travers une surface (Σ) **fermée** et **orientée** vers l'extérieur est égal à la masse totale M_{int} contenue à l'intérieur de cette surface multipliée par $-4\pi\mathcal{G}$:

$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \vec{G}.\overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_{int} \quad \text{avec} \quad M_{int} = \iiint_{\text{int}\Sigma} \rho dv$$

2. Champ gravitationnel terrestre :

(a) Tout axe $(O, \vec{u}_r)$ est un axe de symétrie de révolution de la distribution, la champ de gravitation est donc selon $\vec{u}_r$.

(b) L'invariance selon θ et φ assure que le champ de gravitation ne dépend que de la variable r.

(c) On applique le théorème de Gauss gravitationnel en considérant une sphère centrée sur le centre de la Terre de rayon $r > R_T$ et contenant la masse totale de la Terre :

$$G(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G m_T \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{G} = -\frac{\mathcal{G}m_T}{r^2}\vec{u}_r}$$

(d) À la surface de la Terre, on pose $R_T = r$ pour obtenir :

$$\boxed{g_T = \frac{\mathcal{G}m_T}{R_T^2} = \frac{4,0 \times 10^{14}}{6,38^2 \times 10^{12}} = 9,8 \text{ m.s}^{-2}}$$

On retrouve bien évidemment la valeur de l'intensité de pesanteur terrestre.

(e) En multipliant la masse m_F par le champ de gravitation, on en déduit l'expression de la force :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}m_T m_F}{r^2}\vec{u}_r}$$

3. Mouvement d'un satellite :

(a) $\boxed{E_{p0} = -\frac{G m_T m_F}{r}}$.

(b) La force étant centrale, le moment cinétique du satellite $\vec{\sigma}_0$ se conserve ; comme $\vec{r}.\vec{\sigma}_0 = 0$ et $\vec{v}.\vec{\sigma}_0 = 0$, le mouvement a lieu dans un plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique.
Dans le cas général, la trajectoire est une conique.

(c) On applique la deuxième loi de Newton au satellite dans le référentiel géocentrique ; la projection de cette équation sur la direction radiale donne :

$$-m_F r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}m_F m_T}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_0^2 = \frac{\mathcal{G}m_T}{r}}$$

Pour l'énergie cinétique : $\boxed{E_{c0} = \frac{1}{2}m_F v_0^2 = \frac{\mathcal{G}m_T m_F}{2r}}$.

(d) Le satellite parcourt la distance $2\pi r$ en une durée T :

$$v_0^2 = \frac{4\pi r^2}{T_0^2} = \frac{\mathcal{G}m_T}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{T_0^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T}}$$

Cette relation est connue sous le nom de troisième loi de Kepler.

(e) Application numérique :

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{4,0 \times 10^{14}}{6,38 \times 10^6}} = \boxed{7,9 \text{ km.s}^{-1}}$$

$$T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_T^3}{\mathcal{G}m_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times (6,38 \times 10^6)^3}{4,0 \times 10^{14}}} = \boxed{5062 \text{ s}}$$

(f) L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_{m0} = \frac{\mathcal{G}m_T m_F}{2r} - \frac{G m_T m_F}{r} = -\frac{\mathcal{G}m_T m_F}{2r}}$$

II - ...à la Lune

A - Objectif Lune

1. Orbite de transfert :

   (a) Pour une trajectoire elliptique de grand axe d_{TL}, $\boxed{E_{m1} = -\dfrac{\mathcal{G} m_T m_F}{d_{TL}}}$.

   (b) L'énergie mécanique est constante sur la trajectoire elliptique, on l'exprime juste après l'augmentation de la vitesse :
   $$E_{m1} = \frac{1}{2} m_F v_1^2 - \frac{\mathcal{G} m_F m_T}{R_T} = -\frac{\mathcal{G} m_T m_F}{d_{TL}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_1^2 = 2\mathcal{G} m_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d_{TL}}\right)}$$
   Application numérique :
   $$v_1 = \sqrt{2\mathcal{G} m_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d_{TL}}\right)} = \sqrt{2 \times 4,0 \times 10^{14} \left(\frac{1}{6,38 \times 10^6} - \frac{1}{3,8 \times 10^8}\right)} = \boxed{11,1 \text{ km.s}^{-1}}$$

   (c) La Terre est située à un foyer de l'ellipse. Il faut allumer les moteurs avant que la Lune ne soit alignée sur l'axe focal de l'ellipse, de telle façon que la fusée et la Lune coupe au même moment le grand axe focal.

   (d) Le satellite parcourt une moitié d'ellipse, il suffit alors de déterminer la période de révolution grâce à la troisième loi de Kepler :
   $$T_1 = \sqrt{\frac{4\pi^2 (d_{TL}/2)^3}{\mathcal{G} m_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times (1,9 \times 10^8)^3}{4,0 \times 10^{14}}} \simeq 9,5 \text{ jours}$$
   Et donc pour la durée de parcours $\boxed{t_1 = \dfrac{T_1}{2} = 4,8 \text{ jours}}$

2. Orbite lunaire :

   (a) Il faut freiner la fusée ; en effet la fusée disposait d'une énergie lui permettant presque d'échapper à l'attraction terrestre ; l'attraction de la Lune étant plus faible, il faudra nettement réduire la vitesse pour que la fusée reste au voisinage de la Lune.

   (b) On applique la formule pour un mouvement circulaire :
   $$v_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} m_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{4,9 \times 10^{12}}{1,74 \times 10^6}} = \boxed{1,7 \text{ km.s}^{-1}}$$

B - Déplacements sur la Lune

1. Caractéristiques du sol lunaire :

   (a) Pour un astre sphérique quelconque $g_i = \dfrac{\mathcal{G} m_i}{R_i^2}$, on en déduit ;
   $$\boxed{g_L = g_T \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 \frac{m_L}{m_T} = 9,8 \times \left(\frac{6,38}{1,74}\right)^2 \times \frac{4,9}{4 \times 10^2} = 1,6 \text{ m.s}^{-2}}$$

   (b) L'athlète est 6 fois moins attiré par la Lune que par la Terre, il pourrait donc posséder une détente verticale de 6 m sur la Lune, sûrement moins en tenant compte de la combinaison spatiale.

   (c) En reportant l'expression de $x(t)$ dans celle de $z(x)$, on en déduit :
   $$z(t) = A \cos\left(\frac{2\pi v}{\lambda} t\right) = A \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}}$$

   (d) Le véhicule a une accélération verticale :
   $$\ddot{z}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$
   D'après la deuxième loi de Newton appliquée au véhicule soumis à son poids lunaire et à la réaction du sol :
   $$m\vec{a} = m\vec{g}_L + \vec{R} \quad \text{donc} \quad \vec{R} = m(\vec{a} - \vec{g}_L)$$
   Si la valeur absolue de la composante verticale de l'accélération atteint l'intensité de pesanteur lunaire, la réaction du support s'annule et le contact avec le sol est rompu ; pour assurer le maintien il faut donc :

$$\boxed{A\omega^2 \leq g_L}$$

(e) Application numérique :

$$\boxed{A_{max} = \frac{g_L}{\omega^2} = \frac{g_L \lambda^2}{4\pi^2 v^2} = \frac{1,6 \times 1^2}{4\pi^2 \times (14/3,6)^2} = 2,7 \text{ mm}}$$

Avec cette modélisation, le véhicule ne peut maintenir le contact avec le sol lunaire très "cabossé", d'où l'utilisation du "Rover lunaire".

2. Rover lunaire :

(a) Au repos, la tension du ressort équilibre le poids :

$$k\Delta l = m_r g_L \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta l = \frac{m_r g_L}{k}}$$

Le ressort est bien évidemment comprimé, nous avons déterminé ici la valeur absolue de l'allongement.

(b) Dans le référentiel lié au sol lunaire, supposé galiléen à l'échelle de l'expérience, on applique la deuxième loi de Newton à la masse soumise à son poids lunaire, à l'action du ressort et à la force de frottement :

$$m_r \vec{a} = m_r \vec{g}_L + \vec{T} + \vec{F}_f$$

On projette cette équation sur l'axe Oz et on appelle l_0 la longueur à vide du ressort :

$$m_r \ddot{z} = -m_r g_L - k\left(z(t) + l_{eq} - z_O(t) - l_0\right) - \beta\left(\dot{z}(t) - \dot{z}_O(t)\right)$$

Explication de l'expression de la force du ressort :

À l'instant t, la longueur du ressort est $z(t) + l_{eq} - z_O(t)$, en effet $z(t)$ est compté par rapport à l'équilibre et il faut retrancher $z_O(t)$ qui a tendance à comprimer le ressort. Pour obtenir l'allongement on retranche la longueur à vide l_0. Si $z(t)$ est très grand, le ressort exercera une force dirigée vers les $z < 0$ d'où le signe "-". Enfin on pose $l_{eq} - l_0 = -\Delta l$ avec la convention $\Delta l > 0$ que nous avons adoptée à la question précédente.

On remarque alors que le poids se simplifie avec la tension au repos et on obtient :

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{m_r}\dot{z}(t) + \frac{k}{m_r} z(t) = \frac{k}{m_r} z_0(t) + \frac{\beta}{m_r}\dot{z}_0(t)$$

Ce qui impose :

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m_r}} \qquad \boxed{\omega_1 = \frac{\beta}{m_r}} \qquad \boxed{f(t) = A\left(\omega_0^2 \cos(\omega t) - \omega\omega_1 \sin(\omega t)\right)}$$

(c) L'équation se réécrit pour les amplitudes complexes :

$$\underline{\ddot{z}} + \omega_1 \underline{\dot{z}} + \omega_0^2 \underline{z} = \underline{f}$$

En remarquant que $-\sin\omega t = \cos(\omega t + \pi/2)$, on en déduit :

$$\underline{z}\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + j\omega\omega_1\right) = \underline{z_0}\left(\omega_0^2 + j\omega\omega_1\right)$$

En divisant les deux membres par ω_0^2, on trouve la fonction de transfert proposée :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 + \dfrac{j\omega\omega_1}{\omega_0^2}}{1 + j\dfrac{\omega\omega_1}{\omega_0^2} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

(d) Pour k "suffisamment faible", ω_0^2 est "suffisamment faible" pour que les termes en $1/\omega_0^2$ deviennent prédominants :

$$\underline{H} \simeq \frac{\dfrac{j\omega\omega_1}{\omega_0^2}}{j\dfrac{\omega\omega_1}{\omega_0^2} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \boxed{\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}}$$

Cette expression est bien celle d'un filtre passe bas du premier ordre ayant pour pulsation de coupure $\boxed{\omega_c = \omega_1 = \dfrac{\beta}{m_r}}$.

(e) Exprimons le module de la fonction de transfert :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

La condition de l'énoncé impose $(\omega/\omega_1)^2 = 99$ et finalement :

$$\beta = \frac{2\pi v m_r}{\sqrt{99}\lambda} = \frac{2\pi \times (14/3,6) \times 700}{\sqrt{99}} = \boxed{1,7 \times 10^3 \text{ kg.s}^{-1}}$$

(f) k doit être suffisamment grand pour que $\omega\omega_1/\omega_0^2 \gg 1$; choisissons par exemple un rapport de 10 :

$$10\omega_0^2 = \frac{10k}{m_r} = \omega\omega_1 \qquad k = \frac{\omega\beta}{10} = \frac{2\pi v\beta}{10\lambda} = \frac{2\pi \times (14/3,6) \times 1,7 \times 10^3}{10} = \boxed{4,2 \times 10^3 \text{ N.m}^{-1}}$$

(g) On constate que l'intensité de pesanteur n'apparaît pas dans les équations dynamiques, **le comportement serait donc similaire** à la surface terrestre. Un ressort plus raide sera cependant nécessaire pour compenser le poids plus important du véhicule sur Terre.

III - Propulsion de la fusée

A - Étude du gaz

1. Modèle du gaz parfait :

(a) Dans le modèle du gaz parfait, **les particules sont supposées ponctuelles et sans interaction à distance**.

(b) Partant de l'équation du gaz parfait :

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{m}{V}\frac{R}{M}T = \rho r T = \boxed{\frac{rT}{v}}$$

2. Transformation isentropique :

(a) De l'expression différentielle de l'entropie d'un gaz parfait, on déduit pour une transformation adiabatique réversible et donc isentropique :

$$dS = nC_{v,m}\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} = n\frac{R}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}0$$

En intégrant cette équation, on obtient $\boxed{Pv^\gamma = cste}$ (Cf. cours).

(b) Loi de Laplace.

(c) On différencie l'expression :

$$d(Pv^\gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^\gamma dP + \gamma v^{\gamma-1} P dv = 0$$
$$v dP + \gamma P dv = 0 \text{ avec } \boxed{a = v} \text{ et } \boxed{b = \gamma P}$$

(d) L'identité thermodynamique reliant l'enthalpie et l'entropie s'écrit pour un fluide :

$$dh = Tds + vdP$$

Pour une transformation isentropique, la relation se simplifie selon $\boxed{dh = vdP}$

B - Tuyère

Remarque : Cette partie est à traiter sur le modèle vu en cours de la détente de Joule-Kelvin.

1. Premier principe :

(a) Pendant l'écoulement d'une masse δm en une durée dt, en amont les forces de pression exercent une force $P_1 S_1$ sur un déplacement $w_1 dt$, c'est à dire un travail :

$$\delta W_1 = P_1 S_1 w_1 dt = P_1 S_1 w_1 dt \frac{\rho_1}{\rho_1} = P_1 \left(S_1 w_1 dt \rho_1\right) \frac{1}{\rho_1} = P_1 \delta m v_1$$

De même en aval avec un signe "-" et finalement pour le travail des forces de pression :

$$\boxed{\delta W_p = \delta m \left(P_1 v_1 - P_2 v_2\right)}$$

(b) On applique le premier principe au système Σ initialement en $A_1A_2D_1D_2$ et en $B_1B_2C_1C_2$ en fin de transformation :

$$du + de_c = \delta W_P + \delta Q$$

Pour un écoulement stationnaire, $du = u_{B_1B_2C_1C_2} - u_{A_1A_2D_1D_2} = u_{A_2B_2C_2D_2} - u_{A_1B_1C_1D_1} = \delta m u_2 - \delta m u_1$.

Avec un raisonnement similaire pour la variation d'énergie cinétique et en négligeant les transferts thermiques avec la paroi, l'équation se simplifie selon :

$$u_2 - u_1 + ec_2 - ec_1 = P_1 v_1 - P_2 v_2 \quad \Leftrightarrow \quad (u_2 + P_2 v_2) + \frac{1}{2}w_2^2 = (u_1 + P_1 v_1) + \frac{1}{2}w_1^2$$

$u_i + P_i v_i$ s'identifie à l'enthalpie massique et on obtient : $\boxed{h + \frac{w^2}{2} = cste}$.

(c) Sous forme différentielle :

$$dh + wdw = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{a' = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{b' = w}$$

(d) Partons du système d'équation :

$$dh + wdw = 0 \ (1) \quad dh = vdP \ (2) \quad P = \frac{rT}{v} \ (3)$$

On reporte (2) dans (1) et on élimine le volume massique grâce à l'équation (3) se qui conduit à :

$$\boxed{\frac{dw}{w} = -\frac{rT}{w^2}\frac{dP}{P} = \frac{1}{\gamma}\frac{-\gamma rT}{w^2}\frac{dP}{P} = -\frac{1}{\gamma\mathcal{M}^2}\frac{dP}{P}}$$

2. Conservation du débit :

(a) La masse δm est contenue dans un volume $S_1 w_1 dt$, ce qui impose pour le débit massique :

$$q = \frac{\delta m}{dt} = \frac{S_1 w_1 \rho_1 dt}{dt} = \frac{S_1 w_1}{v_1} = \boxed{\frac{Sw}{v}}$$

La dernière égalité indique que le débit massique est le même pour toute section du tube en régime permanent.

(b) La différentielle logarithmique du débit massique donne :

$$\frac{dS}{S} + \frac{dw}{w} - \frac{dv}{v} = 0$$

$\boxed{a'' = 1/S}$; $\boxed{b'' = 1/w}$; $\boxed{c'' = -1/v}$.

3. Relation de Hugoniot :

(a) L'expression précédente se réécrit :

$$\frac{dS}{S} = -\frac{dw}{w} + \frac{dv}{v}$$

D'après la question III.A.2.c : $vdP = -\gamma P dv$ soit $\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\gamma}\frac{dP}{P}$, donc :

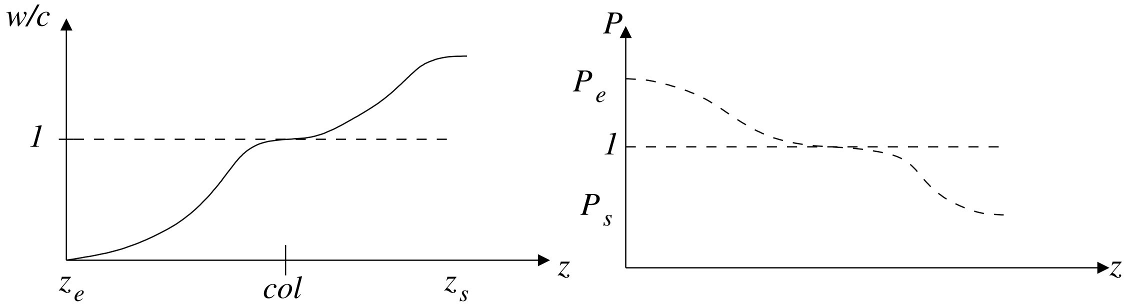
$$\boxed{\frac{dS}{S} = -\frac{dw}{w} - \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{P} = -\frac{dw}{w} + \mathcal{M}^2\frac{dw}{w} = \frac{dw}{w}\left(\mathcal{M}^2 - 1\right)}$$

(b) Supposons un écoulement suprasonique $\mathcal{M} < 1$:
dS et dw sont alors de signe opposé, une accélération du fluide nécessite une conduite qui se resserre.
C'est l'inverse pour un écoulement supersonique.

4. Tuyère de Laval :

(a) Dans la partie convergente, le nombre de Mach doit être inférieur à 1 et dans la partie divergente supérieur à 1. Ceci impose un nombre de Mach égal à 1 au niveau du col.

(b) Allure des courbes :



(c) Partons de la relation obtenue en III.B.1.b : $h + \frac{w^2}{2} = cste$, que l'on écrit pour l'entrée et la sortie :

$$h_e + 0 = h_s + \frac{w_s^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad w_s^2 = 2\left(h_e - h_s\right) = 2c_p\left(T_e - T_s\right) = 2c_p T_e\left(1 - \frac{T_s}{T_e}\right)$$

Sachant que $c_p = r\gamma/(\gamma-1)$, $c_e^2 = \gamma r T_e$ et en utilisant la loi de Laplace $P^{1-\gamma}T^\gamma = cste$, on en déduit :

$$\boxed{w_s^2 = \frac{2c_e^2}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right)}$$

C - Propulsion

1. Poussée :
   (a) Application numérique :
   $$w_s^2 = \frac{2\gamma r T_e}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right) = \frac{2 \times 1,2 \times 510 \times 3600}{0,2}\left(1 - \left(\frac{1}{67,5}\right)^{0,2/1,2}\right)$$
   $\boxed{w_s = 3,3 \text{ km.s}^{-1}}$.
   (b) $F_p = 5 \times 3,3 \times 10^3 \times 2,4 \times 10^3 = \boxed{4,0 \times 10^7 \text{ N}}$.
2. Séquence de lancement :
   (a) Partons de l'expression proposée :
   $$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{q_t w_s}{m_0 - q_t t} - g_T$$
   Intégrons cette équation avec la condition initiale $v(0) = 0$:
   $$\boxed{v(t) = -g_T t - w_s \ln\left(\frac{m_0 - q_t t}{m_0}\right)}$$
   (b) L'expression proposée vérifie $H(0) = 0$; dérivons alors cette expression :
   $$H'(t) = -g_T t + w_s \frac{m_0}{q_t}\left[\frac{m'(t)}{m_0}\left(\ln\frac{m(t)}{m_0} - 1\right) + \frac{m(t)}{m_0}\frac{m'(t)}{m(t)}\right] = -g_T t + w_s \frac{m'(t)}{q_t} \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)$$
   On constate que $H'(t) = v(t)$, l'expression proposée est bien la primitive de la vitesse qui vérifie la condition initiale, c'est donc la solution recherchée.
3. Applications numériques :
   Lorsque tout le carburant aura été consommé :
   $$m_c - q_t \times t_f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_f = \frac{m_c}{q_t} = \frac{2 \times 10^6}{5 \times 2,4 \times 10^3} = 167 \text{ s}}$$
   À cet instant, $m(t_f) = m_0 - m_c = 1000$ tonnes ce qui donne pour la vitesse :
   $$\boxed{v(t_f) = -3,3 \times 10^3 \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 9,8 \times 167 = 2,0 \text{ km.s}^{-1}}$$
   Et finalement pour l'altitude :
   $$\boxed{H(t_f) = 3,3 \times 10^3 \times \frac{3 \times 10^6}{5 \times 2,4 \times 10^3}\left[\frac{1}{3}\left(\ln(1/3) - 1\right) + 1\right] - 9,8 \times 167^2/2 = 114 \text{ km}}$$

Remarque : À l'adresse suivante "http ://en.wikipedia.org/wiki/Saturn_V" on peut obtenir les caractéristiques suivantes pour le premier étage de la fusée :
⋆ Force de poussée : $3,4 \times 10^7$ N.
⋆ Durée de la poussée $\simeq 160$ s
⋆ Vitesse atteinte : $2,3$ km.s^{-1} ; altitude atteinte : 67 km.
À l'exception de l'altitude, ces données sont comparables aux résultats obtenus ; il ne faut toutefois pas oublier que nous n'avons, par exemple, pas tenu compte des frottements et que le gaz a été considéré parfait pour des pressions nettement supérieures à la pression atmosphérique.

Remarques et commentaires : cedric.grange@laposte.net