Transduction électro-acoustique — Centrale TSI 2013

I/ Le haut-parleur seul.

A) 1.a)

$d\vec{F}_L = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$

$= i r d\theta\, \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r (-B)$

$= + i r B d\theta\, \vec{u}_z$ qui est bien suivant $\vec{u}_z$ si $i > 0$

vue de face.

b) $\vec{F}_L = \int_\ell i\, dl\, B\, \vec{u}_z$ avec $dl = r d\theta$

$\boxed{\vec{F}_L = i \ell B \vec{u}_z}$

c) On applique le PFD au système "équipage mobile" dans le référentiel terrestre galiléen.

Bilan des forces : × Poids
× forces de rappel ⊥ à $\vec{u}_z$ } se compensent d'après les "hypothèses du modèle".
× Force de Laplace $\vec{F}_L = i\ell B\vec{u}_z$
× Force de rappel $\vec{F}_r = -kz\,\vec{u}_z$
× Force de frottement $\vec{F}_f = -h\, v\, \vec{u}_z$

D'où $m\vec{a} = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_L + \vec{F}_r + \vec{F}_f + \vec{0}$

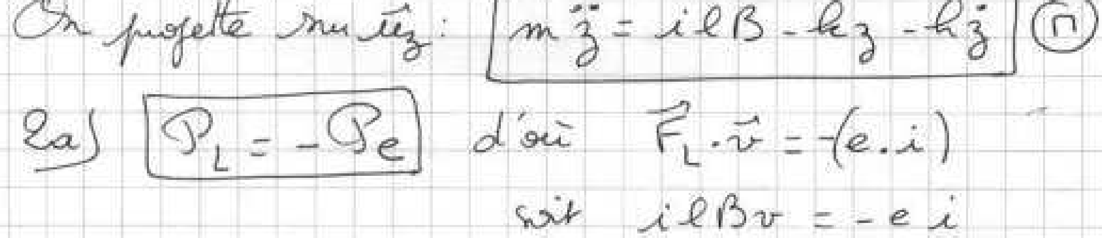
On projette sur $\vec{u}_z$: $\boxed{m\ddot{z} = i\ell B - kz - h\dot{z}}$ (M)

2a) $\boxed{\mathcal{P}_L = -\mathcal{P}_e}$ d'où $\vec{F}_L \cdot \vec{v} = -(e \cdot i)$

soit $i\ell B v = -e\, i$

Ainsi $\boxed{e = -v\ell B} \boxed{= -\ell B \frac{dz}{dt}}$

b)



c) $u(t) = u_R + u_L - e$ d'où $\boxed{u(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \ell B \dot{z}}$ (E)

B] 1] (M) devient $\boxed{-\omega^2 m \underline{z} = \underline{i} l B - k \underline{z} - j\omega h \underline{z}}$

et (E) devient $\boxed{\underline{u} = (R + jL\omega)\underline{i} + lB \underline{z} j\omega}$

avec $\underline{z} = z_0 e^{+j\omega t}$

On veut $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ donc il faut supprimer z de (E)

On réécrit (M) : $\underline{z}(k - m\omega^2 + j\omega h) = \underline{i} l B$

d'où $\boxed{\underline{z} = \frac{\underline{i} lB}{k - m\omega^2 + j\omega h}}$

d'où (E) devient $\underline{u} = (R+jL\omega)\underline{i} + \frac{(lB)^2 j\omega}{k - m\omega^2 + j h\omega}\underline{i}$

Ainsi $\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + jL\omega + \frac{(lB)^2}{h + j\omega m + \frac{k}{j\omega}}}$

2] a] On identifie ci-dessus : $\boxed{\underline{Z}_m = \frac{(lB)^2}{h+j\omega m + \frac{k}{j\omega}}}$

J'écris le dénominateur en 1+...

$\underline{Z}_m = \frac{(lB)^2/h}{1 + j\left(\omega \frac{m}{h} - \frac{k}{\omega h}\right)}$ avec $\boxed{R_0 = \frac{(lB)^2}{h}}$

et $\begin{cases} \frac{Q_e}{\omega_0} = \frac{m}{h} \\ Q_e\omega_0 = \frac{k}{h} \end{cases}$

d'où $Q_e^2 = \frac{Q_e}{\omega_0}\times Q_e\omega_0 = \frac{mk}{h^2}$ et $\boxed{Q_e = \frac{\sqrt{mk}}{h}}$

puis $\omega_0^2 = \frac{Q_e\omega_0}{\frac{Q_e}{\omega_0}} = \frac{k}{h}\frac{h}{m} = \frac{k}{m}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$\underline{Z}_m$ s'écrit alors comme prévu.

b] Si $\omega \ll \omega_0$ $\quad Z_m \simeq \frac{R_0}{-jQ_e\frac{\omega_0}{\omega}} \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0$

Si $\omega \gg \omega_0$ $\quad Z_m \simeq \frac{R_0}{jQ_e \frac{\omega}{\omega_0}} \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0$

D'où

$|\underline{Z}_m|$ est maximal pour $\boxed{\omega = \omega_0}$
et alors $\boxed{\underline{Z}_m = |\underline{Z}_m| = R_0}$

C]1] Si $\omega \to 0$ ($f \ll 10\,Hz$ par exemple), on voit que $|Z|$ est constante et vaut $7\,\Omega$, de plus $\varphi \simeq 0$ d'où $\underline{Z} = R = 7\,\Omega$ à basse fréquence.

$$|jL\omega| = L\omega = 2\pi f L < \underbrace{2\pi .300.\,0{,}5.10^{-3}}_{=0{,}94}$$

Soit $|jL\omega| < 1\,\Omega$ pour $f < 300\,Hz$.

On peut alors $\boxed{\text{négliger } jL\omega \text{ devant } R}$

d'où $\boxed{\underline{Z} = R + \underline{Z}_m}$

2]a] Pour $f < 300\,Hz$, on voit que $|Z|$ est constant ($=R$) sauf au niveau de la "résonance" : hors du pic, on peut négliger $\underline{Z}_m$. Et surtout, on observe bien le pic prévu au B2b]

En ce qui concerne la phase, on observe qu'elle s'annule au maximum du pic, c'est-à-dire pour $f = 40\,Hz$, ce qui est compatible avec $\underline{Z}_m = R_0$ et $\underline{Z} = R + R_0$ réel.

b] On a déjà trouvé R au C1] : $\boxed{R = 7\,\Omega}$ ($\underline{Z} \xrightarrow[\omega \to 0]{} R$)

f_0 au C2a] : $\boxed{f_0 = 40\,Hz}$ qui est la fréquence où $|\underline{Z}_m|$ est maximale et $\underline{Z}_m$ réelle donc $\underline{Z}$ réelle aussi et maximale (car $\underline{Z}_m$ et R sont alors réels).

Alors $|\underline{Z}| = 34\,\Omega = R + R_0$ Ainsi $\boxed{R_0 = 27\,\Omega}$

3]a] $$\underline{Z} = \frac{R\left(1 + jQ_e\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) + R_0}{1 + jQ_e\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{R + R_0}{1 + jg(x)} + \frac{jg(x)R}{1 + jg(x)}$$

d'où $$\boxed{\underline{Z} = \frac{R_m}{1 + jg(x)} + \frac{jg(x)R}{1 + jg(x)}} \cancel{= \frac{R_m(1 - jg(x))}{1 + g^2(x)} + \frac{j(1 - jg(x))g(x)R}{1 + g^2(x)}}$$

b] Calculons $$|\underline{Z}|^2 = \underline{Z}\,\underline{Z}^* = \frac{(R_m + jg(x)R)(R_m - jg(x)R)}{(1 + jg(x))(1 - jg(x))} = \frac{R_m^2 + (g(x)R)^2}{1 + g(x)^2}$$

si $|Z|^2 = RR_m$ alors $RR_m = \dfrac{R_m^2 + [g(x)R]^2}{1+g^2(x)}$

c'est-à-dire $g^2(x)\left[RR_m - R^2\right] = R_m^2 - RR_m$

ou encore $\boxed{g^2(x) = \dfrac{R_m\,(\cancel{R_m-R})}{R\,(\cancel{R_m-R})} = \dfrac{R_m}{R}}$ CQFD

c) $g^2(x) = Q_e^2\left(x - \left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2$ Si $y = \dfrac{1}{x}$.

alors $g^2(y) = Q_e^2\left(y - \dfrac{1}{y}\right)^2 = Q_e^2\left(\dfrac{1}{x} - x\right)^2 = Q_e^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = g^2(x)$.

Ainsi si $\boxed{x_0 \text{ convient, } \dfrac{1}{x_0} \text{ aussi}}$ car $g^2(x) = g^2(\frac{1}{x})$

d) $x > 0$ ~~donc~~ et $g(x \to 0^+) \to -\infty$ De plus g est continue sur $\mathbb{R}^+$
$g(x \to +\infty) \to +\infty$.

donc toutes les valeurs sont atteintes par g donc toutes les valeurs positives sont atteintes par $g^2(x)$. Il y a au moins 1 solution et d'après 2) il y en a 2. (au moins) : une supérieure à 1 et l'autre inférieure à 1.

Justifions qu'il n'y a qu'1 solution supérieure à 1 : $g(1) = 0$
$g(x \to \infty) \to +\infty$

de plus $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ est strictement positive

donc $g(x)$ strictement croissante. Chaque valeur de g n'est atteinte qu'une fois.

Il y a donc 2 solutions : x_0 et $\dfrac{1}{x_0}$.

inutile car comme je les trouve, c'est qu'elles existent!

Les solutions sont x_1 et $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$ donc $g^2(x_1) = Q_e^2(x_1 - x_2)^2 = \dfrac{R_m}{R}$

soit $x_1 - x_2 = \pm\sqrt{\dfrac{R_m}{R}\dfrac{1}{Q_e^2}}$ soit $\boxed{\Delta x = \dfrac{1}{Q_e}\sqrt{\dfrac{R_m}{R}}}$ si $x_2 > 1 > x_1$

e) $Q_e = \sqrt{\dfrac{R_m}{R}}\,\dfrac{1}{\Delta x}$ où $\Delta x = \dfrac{\Delta f}{f_0}$ avec Δf l'écart entre les fréquences pour lesquelles $|Z_m| = \sqrt{RR_m}$

On cherche donc pour quelles fréquences f_1 et f_2 ($f_1 < f_0 < f_2$)
$|\underline{Z}_m| = \sqrt{R R_m} \simeq 15,3\ \Omega$

On trouve $f_1 = 21\ Hz$ et $f_2 = 67\ Hz$ d'où $\Delta x = \frac{46}{40} = 1,2$.

Ainsi $Q_e = \sqrt{\frac{34}{7}} \times \frac{1}{\Delta x} = 1,9$.

On trouve $\boxed{Q_e = 1,9}$ et $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2,5.10^2\ rad.s^{-1}$

Or $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc $\boxed{k = m\omega_0^2 = 8,6.10^2\ N.m^{-1}}$

or $Q_e = \frac{\sqrt{mk}}{h}$ donc $\boxed{h = \frac{\sqrt{mk}}{Q_e} = 0,96\ N.m^{-1}.s = 0,96\ kg.s^{-1}}$

or $R_0 = \frac{(Bl)^2}{h}$ d'où $\boxed{Bl = \sqrt{R_0 h} = 5,1\ T.m}$

4) A "haute fréquence", on doit avoir $\underline{Z} = R + jL\omega$ ($\underline{Z}_m$ négligeable)
mais $R + jL\omega$ a une phase positive, et sur le diagramme de Bode la phase est négative...

D) 1) On repart de (1) et (E) en notation complexe (B1). mais cette fois, c'est i qu'on supprime.

(1) donne $\underline{i} = \underline{z}\,\frac{k - m\omega^2 + j\omega h}{lB}$

négligée, c'est écrit !

On reporte dans (E) : $\underline{u} = \frac{(R + \cancel{jL\omega})(k - m\omega^2 + j\omega h)}{lB}\underline{z} + lBj\omega\underline{z}$

$lB\underline{u} = \left[Rk + \cancel{jL\omega k} - Rm\omega^2 - \cancel{L\omega^3 m} + j\omega hR - \cancel{\omega^2 Lh} + (lB)^2 j\omega\right]\underline{z}$

$\frac{lB}{R}\underline{u} = k\underline{z} - m\omega^2\underline{z} + j\omega\left(h + \frac{(lB)^2}{R}\right)\underline{z}$

Soit $m\ddot{z} = \underbrace{\frac{lB}{R}u}_{\text{terme d'excitation}} \underbrace{- kz}_{\text{force de rappel}} \underbrace{- \left(h + \frac{(lB)^2}{R}\right)\dot{z}}_{\text{force de frottement fluide}}$

$\boxed{h' = h + \frac{(Bl)^2}{R}}$

2) On repasse en notation complexe

$$-\frac{m\omega^2}{k}\underline{z}+\frac{k\underline{z}}{k}+\frac{h'}{k}\underline{z}\,j\omega=\frac{\ell B}{kR}\underline{u}$$

avec $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\frac{\underline{z}}{\underline{u}}=\underline{A}=\frac{\frac{\ell B}{kR}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\omega\frac{h'}{k}}$$

avec $\frac{h'}{k}=\frac{1}{Q_t\omega_0}$

d'où $\boxed{Q_t=\frac{k}{h'\omega_0}=\frac{\sqrt{km}}{h'}}$

or $Q_e=\frac{\sqrt{mk}}{h}$ donc $Q_t=Q_e\frac{h}{h'}$

et $R_0=\frac{(\ell B)^2}{h}$ d'où $\begin{cases} h'=(B\ell)^2\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R}\right)=(B\ell)^2\frac{R+R_0}{RR_0} \\ h=(B\ell)^2\frac{1}{R} \end{cases}$

Ainsi $\boxed{Q_t=Q_e\frac{\frac{1}{R}R_0}{\frac{R+R_0}{RR_0}}=Q_e\frac{R_0}{R+R_0}}$

$\left.\begin{array}{ll}\text{Si } \omega\to 0 & |\underline{A}|\to\frac{\ell B}{kR} \\ \text{Si } \omega\to\infty & |\underline{A}|\to\infty\end{array}\right\}$ c'est donc un passe-bas.

3) $R_0=7\,\Omega$ $\qquad R+R_0=34\,\Omega$

d'où $\boxed{Q_t=0{,}39}$

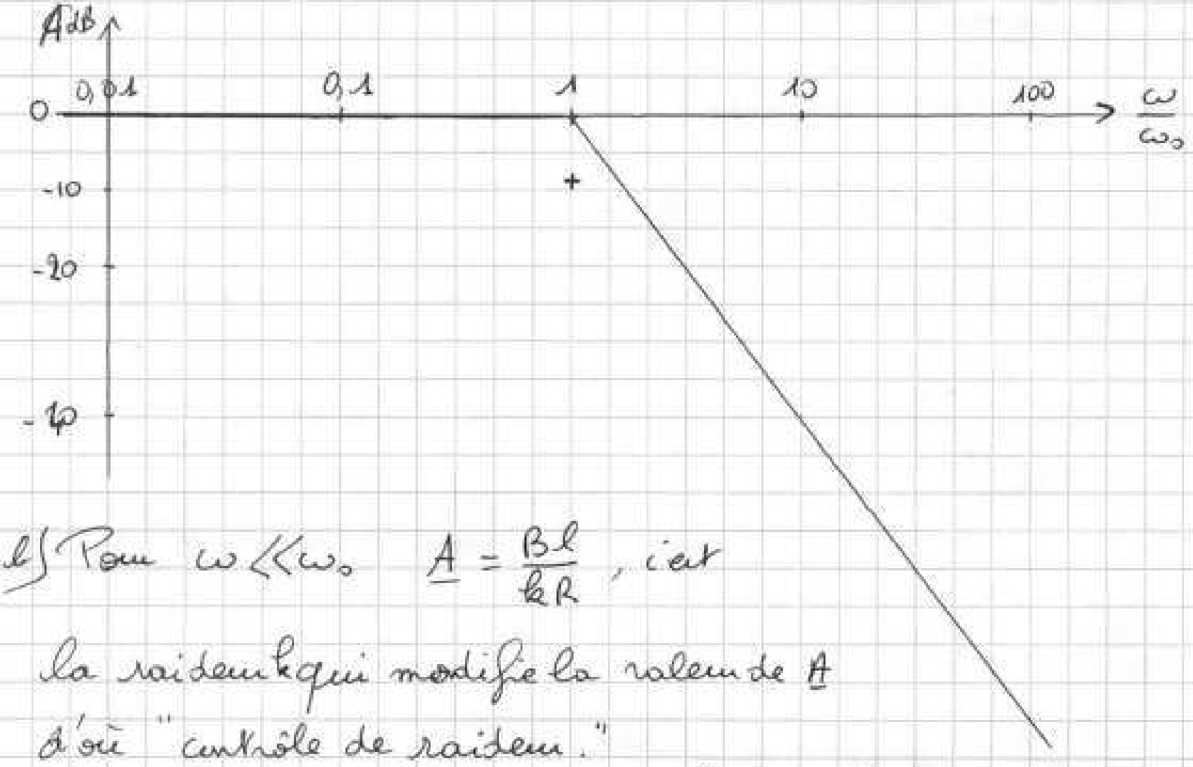
4) si $\omega\ll\omega_0$ $\quad \underline{A}=\frac{B\ell}{kR}=A_0=|A|_{max}$

si $\omega\gg\omega_0$ $\quad \underline{A}=\frac{A_0}{-(\omega/\omega_0)^2}$ soit $20\log\frac{|A|}{|A|_{max}}=-40\log\omega/\omega_0$.

soit $-40\,dB/$décade

en $\omega=\omega_0$ $\quad A=\frac{A_0}{j\frac{1}{Q_t}}$ soit $20\log\frac{|A|}{A_0}=20\log Q_t=-8{,}1$.

Il n'y a pas de résonance (normal car Q_t est trop petit) $Q_t<1$



b) Pour $\omega \ll \omega_0$ $\underline{A} = \frac{Bl}{kR}$, c'est

la raideur k qui modifie la valeur de $\underline{A}$

d'où "contrôle de raideur."

Pour $\omega \gg \omega_0$ $\underline{A} = \frac{Bl}{kR}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{Bl}{mR}\frac{1}{\omega^2}$; avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

c'est alors la masse m qui modifie la valeur de $\underline{A}$ à ω constant,

d'où "contrôle de masse"

c) $|A|_{max} = \frac{Bl}{kR} = \frac{7,0}{8,6 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{86 \cdot 10^2} = 1,2 \cdot 10^{-3}$ m/V

d'où $|z|_{max} = |A|_{max}\,|u|_{max}$ donc $|u|_{max} = \frac{|z|_{max}}{|A|_{max}} = 4,3$ V

Il faut limiter l'amplitude de la tension d'entrée à 4,3 V,

sinon le haut-parleur sort de la zone élastique des ressorts,

ou risque de casser, ou le son est trop fort et dangereux

II Célérité des ondes acoustiques

A) Pour un gaz parfait, $P_0 M = \mu_0 R T_0$

B) D'après les lois de Laplace pour une transformation isentropique

$PV^\gamma = $ cste d'où $\boxed{P\mu^{-\gamma} = P_0 \mu_0^{-\gamma}}$ ou $\mu = \mu_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}$

$\chi_S = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial P}\Big|_S = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\, \mu_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}}{\partial P} = \frac{\mu_0}{\mu_0}\frac{1}{P_0^{1/\gamma}}\frac{1}{\gamma}P_0^{(1/\gamma - 1)}$

puis en $P = P_0$

$$\boxed{\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}}$$

d'où $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \frac{\sqrt{\gamma P_0}}{\sqrt{\rho_0}} = \boxed{\sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = c}$

c) $\boxed{c = 3{,}4 \cdot 10^2 \ m \, s^{-1}}$, c'est la valeur habituelle d'où $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} = \dfrac{\sqrt{\gamma P_0}}{\sqrt{\rho_0}} = \boxed{\sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{\Pi}} = c}$

C] $\boxed{c = 3{,}4 \cdot 10^2 \ m\,s^{-1}}$, c'est la valeur habituelle

III Enceinte acoustique

A 1] Pour un gaz parfait en évolution isentropique, on peut utiliser les lois de Laplace : $PV^\gamma = cste$

or $V = V_0 + Sz$. d'où $P(V_0+Sz)^\gamma = P_0 V_0^\gamma$

et finalement $\boxed{P(z) = P_0 \left(\dfrac{1}{1+\frac{Sz}{V_0}}\right)^\gamma}$

2] On introduit ε $\quad P(z) = P_0 \left(\dfrac{1}{1+\varepsilon}\right)^\gamma = P_0(1+\varepsilon)^{-\gamma}$

$\boxed{P(z) = P_0(1-\gamma\varepsilon)}$ après DL.

or $\boxed{P(z) = P_0\left(1 - \dfrac{\gamma S}{V_0} z\right)}$ Ainsi $\boxed{\alpha = P_0 \gamma \dfrac{S}{V_0}}$

3] On suppose qu'à gauche, P reste égal à P_0

On regarde la résultante des forces de pression :

$\vec{F}_p = P_{gauche} S(-\vec{u}_z) + P_{droite} S \vec{u}_z$

$= [P_0 - (P_0 - \alpha z)] S(-\vec{u}_z)$

$\boxed{\vec{F}_p = -\alpha S z \vec{u}_z}$ On trouve l'expression de l'énoncé avec $\boxed{k' = \alpha S = P_0 \gamma \dfrac{S^2}{V_0}}$

B] Pour que $k' = k$, il faut que $V_0 = \boxed{V_{AS} = \dfrac{P_0 \gamma S^2}{k}}$

On introduit alors A dans k' : $\boxed{k' = P_0 \gamma \dfrac{S^2}{V_0} \dfrac{V_{AS}}{V_{AS}} = kA}$

C] L'équation mécanique devient

(Π') : $m\ddot{z} = ilB - kz - k'z - h\dot{z}$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

d'où $\boxed{\ddot{z} = \dfrac{ilB}{m} - \omega_0^2 z(1+A) - h\dot{z}}$

D] On remplace juste k par $k(1+A)$ dans l'équation de B1].

$$\underline{Z} = R + \underbrace{jL\omega}_{\text{négligé}} + \frac{(\ell B)^2}{h + j\omega m + \frac{k(1+A)}{j\omega}}$$

d'où $$\underline{Z} = R + \frac{(\ell B)^2/h}{\underbrace{1 + j\frac{\omega m}{h} + \frac{k(1+A)}{j\omega h}}_{\to \underline{Z}_m}}$$

$$\boxed{R_0' = R_0 = \frac{(\ell B)^2}{h}}$$

$$\frac{\omega m}{h} = Q_e' \frac{\omega}{\omega_0'} \qquad \frac{k(1+A)}{\omega h} = Q_e' \frac{\omega_0'}{\omega}$$

d'où $$Q_e'^2 = \frac{\cancel{\omega} m}{h} \frac{k(1+A)}{\cancel{\omega} h} = \frac{mk(1+A)}{h^2}$$

d'où $$\boxed{Q_e' = \frac{\sqrt{mk}}{h}\sqrt{1+A} = Q_e\sqrt{1+A}}$$

et $$\left(\frac{\omega_0'}{\omega}\right)^2 = \frac{k(1+A)}{\omega h} \frac{h}{m\omega} = \omega_0^2 (1+A) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\omega_0' = \omega_0\sqrt{1+A}}$$

E] 1] On procède comme au IC3 :

$f_0' = 70\,Hz$ $\qquad \boxed{\omega_0' = 4{,}4.10^2\ rad.s^{-1}}$

$R_m' = R_0' + R = 29\,\Omega$ d'où $\boxed{R_0' = 22\,\Omega}$

$\sqrt{R_m' R} = 14{,}2\,\Omega$ $\qquad |Z| = \sqrt{R_m' R}$ pour $f_1' = 43\,Hz$

$f_2' = 95\,Hz$

d'où $$\Delta x' = \frac{f_2' - f_1'}{f_0'} = 0{,}74$$

d'où $$\boxed{Q_e' = \sqrt{\frac{R_m'}{R}}\frac{1}{\Delta x} = 2{,}7}$$

2] $f_0' = f_0(1+A)$ $\quad$ d'où $$\boxed{A = \frac{f_0' - f_0}{f_0} = 0{,}75}$$

Or $A = \frac{V_{AS}}{V_0}$ d'où $\boxed{V_{AS} = AV_0 = 9{,}5\ L = 9{,}5.10^{-3}\ m^3}$

or $S = \sqrt{\frac{kV_{AS}}{\gamma P_0}} = 7{,}6.10^{-3}\ m^2 = 76\ cm^2$ (soit un cercle de rayon $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \simeq 5\ cm$, c'est raisonnable).

3) $\frac{f_0'}{f_0} = 1,8$ $\frac{Q_e'}{Q_e} = 1,4$

Les deux rapports ne sont pas égaux.

c'est qu'en fait $Q_e' = \frac{\sqrt{mk(1+A)}}{h'}$ et $Q_e = \frac{\sqrt{mk}}{h}$

d'où $\boxed{\frac{h'}{h} = \sqrt{1+A}\,\frac{Q_e}{Q_e'} = \frac{f_0'}{f_0}\frac{Q_e}{Q_e'} = 1,2}$

ou $\boxed{\frac{h}{h'} = 0,81}$

4) $|\underline{Z}|_{max} = \frac{(lB)^2}{h}$ et $|\underline{Z}'|_{max} = \frac{(lB)^2}{h'}$

d'où $\boxed{\frac{h}{h'} = \frac{|\underline{Z}'|_{max}}{|\underline{Z}|_{max}} = \frac{29}{34} = 0,85}$

C'est compatible avec le résultat du 3)

vgadiou@netcourrier.com