Centrale - PC - Physique 2 - Année 2011

Une étude dynamique de la couche limite

Correction proposée par Ch. Brunel - ck.brunel@free.fr

I Préliminaire

I - A

Sur une surface élémentaire dS, la force exercée par la partie supérieure du fluide sur la partie inférieure est

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\downarrow} = \eta \mathrm{d}S \frac{\partial v}{\partial y}|_y \overrightarrow{u}_x$$

η s'exprime en Pa.s ou en Pl (Poiseuille)

Les particules situées en $y + \mathrm{d}y$ passent en y et y amènent leur quantité de mouvement transverse : $mv_x(y + \mathrm{d}y)\overrightarrow{u}_x$.

Leur vitesse suivant $\overrightarrow{u}_y$ est due à l'agitation thermique.

I - B

Sur un volume dτ, on peut chercher la force suivant la direction $\overrightarrow{u}_x$ provoquée par le passage de particules provenant des régions en $y + \mathrm{d}y$ et y.

Cette force est notée $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_x = \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\downarrow y+\mathrm{d}y} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\uparrow y} = \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\downarrow y+\mathrm{d}y} - \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\downarrow y}$

On a

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_x = \eta \mathrm{d}S\left(\frac{\partial v}{\partial y}|_{y+\mathrm{d}y} - \frac{\partial v}{\partial y}|_y\right)\overrightarrow{u}_x$$
$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_x = \eta \mathrm{d}S\mathrm{d}y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}|_y \overrightarrow{u}_x$$

On peut généraliser ce résultat pour des particules provenant des trois directions :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_x = \eta\left(\triangle v\right)\mathrm{d}\tau\overrightarrow{u}_x$$

On peut généraliser ce résultat sur les trois directions :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \eta\left(\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{v}\right)\ \mathrm{d}\tau}$$

I - C

1. On écrit le TCI (théorème du centre d'inertie) à une particule de fluide dans $(\mathcal{R})$ galiléen.

$$\mu \mathrm{d}\tau\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \mu \mathrm{d}\tau\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{v}\right)$$
$$= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\ \mathrm{d}\tau + \eta\left(\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{v}\right)\mathrm{d}\tau + \mu\overrightarrow{g}\mathrm{d}\tau$$

On retrouve l'équation de Navier-Stokes.

2. On étudie les projections sur le vecteur $\overrightarrow{u}_x$:
   - $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\ .\overrightarrow{u}_x = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$
   - $\overrightarrow{g}.\overrightarrow{u}_x = 0$
   - $\eta\left(\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{u}_x = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$
   - $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)v_x = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

   On trouve donc

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}$$

On trouve une équation de diffusion, de coefficient de diffusion $\nu = \frac{\eta}{\mu}$ qui s'exprime en $\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$.

I - D

La diffusion augmente le désordre du système isolé (en le rendant plus homogène), le manque d'information sur le système augmente, donc son entropie, c'est une évolution irréversible.

Mathématiquement un remplacement de t par $-t$ dans l'équation de diffusion transforme cette équation en une équation différente : cela traduit un phénomène irréversible.

L'équation de propagation de D'Alembert traduit un phénomène réversible.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

I - E

On fait une étude en ordre de grandeur

$$\frac{\partial v}{\partial t} \simeq \frac{v}{\tau}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \simeq \frac{v}{L_y^2}$$

L'équation de diffusion permet donc d'avoir le résultat :

$$\boxed{L_y \simeq \sqrt{\nu\tau}}$$

II Ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite

La formule précedente s'applique ici en écrivant : $\delta \simeq \sqrt{\nu\tau} = \sqrt{\frac{\nu x_0}{U}}$

le nombre de Reynolds est $\mathcal{R}e_{x_0} = \frac{U x_0}{\nu}$

On trouve donc

$$\boxed{\frac{\delta}{x_0} \simeq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_{x_0}}}}$$

On peut considérer que l'épaisseur de la couche limite est négligeable dès que

$$\mathcal{R}e_{x_0} \gg 10^4 \Longleftrightarrow \frac{\delta}{x_0} \ll 10^{-2}$$

III Cas d'un écoulement de Poiseuille plan

III - A

1. (a) On étudie les projections de l'équation de NAVIER-STOKES sur les deux axes en régime stationnaire :

$$\mu\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - g$$

(b) On dérive la première équation par rapport à x,à l'aide du théorème de SCHWARTZ en remarquant que $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ et donc $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$, on trouve donc

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

Donc $\frac{\partial p}{\partial x}$ est indépendant de x.
En dérivant la seconde équation par rapport à x, on trouve $\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$
Donc $\frac{\partial p}{\partial x}$ est indépendant de y.
En conclusion
$$\frac{\partial p}{\partial x} = K$$

(c) La première équation s'écrit donc $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{K}{\eta}$, donc $v_x = \frac{K}{2\eta}y^2 + \alpha y + \beta$
L'écoulement est visqueux, la vitesse du fluide s'annule sur l'obstacle, donc $v_x\left((\frac{d}{2}\right) = v_x\left((-\frac{d}{2}\right) = 0$
Par différence des deux équations, on trouve $\alpha = 0$, puis
$$\boxed{v_x = \frac{Kd^2}{8\eta}\left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right)}$$

2. Comme $\frac{\partial p}{\partial x} = K$, on en déduit que $p = Kx + \gamma$.
$\Delta p = -KL$, d'ou finalement

$$K = -\frac{\Delta p}{L}$$

Le débit volumique est par définition

$$D_v = \iint \overrightarrow{v}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$
$$= \iint v_y \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

On trouve donc

$$\boxed{D_v = -\frac{\Delta p d^3 h}{12L\eta}}$$

Cette formule est à rapprocher du la loi d'OHM pour un conducteur : le débit de charge I est proportionnel à la différence de potentiel U divisé par la résistance électrique.

$$I = \frac{U}{R}$$

On peut donc définir une résistance hydraulique

$$\boxed{R_h = \frac{12L\eta}{d^3 h}}$$

3. Si d est divisée par 2, alors le débit est divisé par 8.
Si on place 2 tubes à débit divisé par 8, on obtient un débit divisé par 4.
Dans le cas d'une résistance électrique $R_e = \rho\frac{\ell}{dh}$, une division de d par 2, divise le courant par 2 ! Pour un écoulement les diminutions de section de l'écoulement réduisent considérablement le débit (voir les problèmes de circulation sanguine).

III - B

On atteint le régime parabolique pour l'écoulement lorsque $\delta = \dfrac{d}{2}$, à l'aide du résultat de la question précédente, on trouve donc

$$\boxed{\frac{x_1}{d} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}e}}{2}}$$

IV Equation du mouvement dans la couche limite

IV - A

L'écoulement est incompressible, le volume des particules de fluide reste constant donc div $\overrightarrow{v} = 0$
Cela donne l'équation

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0}$$

IV - B

On remarque que pour un écoulement bidimensionnel, $\left(\overrightarrow{v}\ .\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\overrightarrow{v} = v_x\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial y}$
En régime stationnaire $\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$
Sur les axes x et y, les équations s'écrivent :

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\mu}\triangle v_x$$
$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\mu}\triangle v_y - g$$

IV - C

1. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_x}{x_0}$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_y}{\delta}$$
$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow \frac{v_x}{x_0} \sim \frac{v_y}{\delta}$$

   On peut donc conclure que

$$\frac{v_y}{v_x} \sim \frac{\delta}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e}} \ll 1$$

2. De même, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{v_x}{\delta^2}$$
$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{v_x}{x_0^2}$$
$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \left(\frac{\delta}{x_0}\right)^2 = \frac{1}{\mathcal{R}e} \ll 1$$

   De même pour v_y.

3. Pour les termes croisés, on a :

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{v_x v_y}{\delta} \sim \frac{v_x^2}{x_0}$$
$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_x^2}{x_0}$$

   Les deux termes sont du même ordre de grandeur.

4. Les projections de l'équation de Navier Stokes sur les deux axes donnent les résultats suivants :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu g$$

IV - D

En dehors de la couche limite, l'équation de Navier Stokes devient l'équation d'Euler stationnaire d'où

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu g$$

Donc $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ en dehors de la couche limite. On trouve finalement l'équation IV-D :

$$\boxed{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

V Autosimilitude des profils de vitesse

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{U}{x_0} \frac{\partial v_x'}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{U}{\delta \sqrt{\mathcal{R}e}} \frac{\partial v_y'}{\partial y'}$$

L'équation de conservation du débit s'écrit donc

$$\boxed{\frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = 0}$$

On transforme de même l'équation IV-D, on trouve finalement :

$$\boxed{v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + v_y' \frac{\partial v_x'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}}$$

VI Equation de Blasius

VI - A

On a $\theta = \frac{y}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{U}{\nu}}$ et $v_x = U f(\theta)$
On calcule $\frac{\partial v_x}{\partial x}$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = U f' \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{U^{3/2}}{2\nu^{1/2}} f' y x^{-3/2} \tag{VI.1}$$

De même $v_y = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} h(\theta)$, on calcule $\frac{\partial v_y}{\partial y}$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} h'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = U \frac{h'(\theta)}{x} \tag{VI.2}$$

On remplace dans l'équation $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, on trouve :

$$\boxed{h'(\theta) = \frac{1}{2} \theta f'(\theta)}$$

VI - B

On fait une intégration par parties du résultat précédent, on trouve donc :

$$\int \theta f' = [\theta f] - \int f$$

En intégrant entre $\theta = 0$ et θ, l'équation ci-dessus, on a

$$\boxed{h(\theta) - h(0) = \frac{1}{2} \left(\theta f - \int_0^\theta f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right)}$$

VI - C

Pour $y = 0$ (soit $\theta = 0$), la vitesse normale à l'obstacle est nulle (imperméable) donc $v_y(\theta) = 0$ donc

$$\boxed{h(\theta = 0) = 0}$$

VI - D

Il faut exprimer les différents termes qui interviennent dans l'équation IV.D, on trouve :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{U^{5/2}}{2\nu^{1/2}x^{3/2}} y f' f$$
$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{U^2}{x} f' h$$
$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{U^2}{x} f''$$

On remplace ces termes dans l'équation IV.D, en simplifiant par $\frac{U^2}{x}$, cela donne :

$$-\theta f f' + \theta f f' - f' \int_0^\theta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2f''$$

Les deux premiers terme s'annulent, on trouve l'équation de Blasius.

$$\boxed{f'' = -\frac{1}{2} f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

VII Résolution approchée de l'équation de Blasius

Lorsque $\theta \ll 1 \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{x'}} \ll 1$, on se trouve à l'intérieur de la couche limite.

Lorsque $\theta \gg 1 \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{x'}} \gg 1$, on se trouve en dehors de la couche limite.

VII - A Comportement à θ faible

1. Pour un écoulement visqueux (dans la couche limite), la vitesse tangentielle v_x sur la surface est nulle, donc $v_x(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
2. On suppose que $f'(\theta = 0)$ reste bornée, $f(\theta)$ est supposée continuement dérivable, donc

$$\lim_{\theta \to 0} \int_0^\theta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

En utilisant l'équation de Blasius, on en déduit que $\boxed{f^{(2)}(0) = 0}$

3. On dérive l'équation de Blasius, si on note F la primitive de f, on a

$$f^{(3)}(\theta) = -\frac{1}{2} f^{(2)}(F(\theta) - F(0)) - \frac{1}{2} f' f(\theta)$$

On passe à la limite en 0, comme $\lim_{\theta \to 0} f(\theta) = 0$ et $\lim_{\theta \to 0} f^{(2)}(\theta) = 0$, on a

$$\boxed{f^{(3)}(0) = 0}$$

4. On fait un DL de Taylor à l'ordre 4 autour de $\theta = 0$, les termes d'ordre $0, 2$ et 3 sont nuls donc :

$$\boxed{f(\theta) = \theta f'(0) + \frac{\theta^4}{24} f^{(4)}(0)}$$

5. En dérivant une fois de plus l'équation de Blasius, on trouve

$$\boxed{f^{(4)}(0) = -\frac{1}{2} f'^2(0)}$$

Cela permet d'exprimer b,

$$b = -\frac{1}{48} f'^2(0)$$

VII - B Comportement à θ grand

1. Lorsque θ est grand, on se place en dehors de la couche limite, donc

$$v_x = U f(\theta) \to U$$

En conclusion

$$\boxed{\lim_{\theta \to \infty} f(\theta) = 1}$$

La fonction $F = \int_0^\theta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ a sa dérivée qui est équivalente à 1 en plus infini, on en déduit que

$$F \sim_{\theta \to \infty} \theta$$

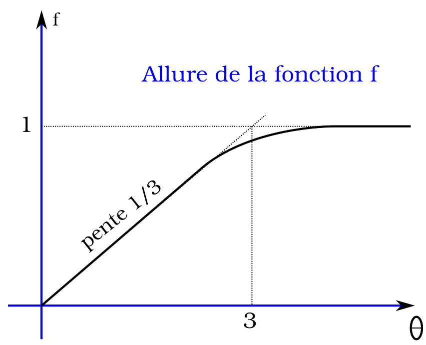
2. Pour θ grand, l'équation de Blasius devient :

$$\boxed{f''(\theta) \simeq -\frac{1}{2} f'(\theta)\,\theta}$$

3. f' vérifie une équation du premier ordre, donc $f' = A \exp\left(-\frac{\theta^2}{4}\right)$
4. La dérivée tend exponentiellement vers 0 donc f rejoint rapidement son asymptote.

VII - C

On obtient une courbe qui a l'allure suivante : La droite à l'origine de pente $\frac{1}{3}$ coupe l'asymptote en $\theta_i = 3$.



VIII Force de Frottement

VIII - A

On a $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U^{3/2}}{\sqrt{\nu x}} f'(0)$ et $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ en $y = 0$.
Finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}x\mathrm{d}z} = \sqrt{\frac{\nu\mu^2 U^{3/2}}{x}} f'(0)}$$

VIII - B

On intègre sur la direction x entre 0 et L pour avoir la force sur un coté par unité de longueur suivant z, cela donne

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{3}\mu U^{3/2}\sqrt{\nu}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{4}{3}\mu U^{3/2}\sqrt{\nu L}}$$

IX Approche de la force de trainée par des bilans

IX - A

1. En régime stationnaire le flux volumique sortant du volume de contrôle est nul : $\iint \overrightarrow{v}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$
   Le flux se décompose en trois parties :

   $$\iint \overrightarrow{v}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} = a\left[-Uh + \int_0^L v_y(x,h)\mathrm{d}x + \int_0^h v_x(L,y)\,\mathrm{d}y\right]$$

   On peut donc exprimer l'intégrale demandée :

   $$\boxed{\int_0^L v_y(x,h)\mathrm{d}x = \int_0^h (U - v_x(L,y))\,\mathrm{d}y}$$

2. En régime stationnaire, on fait un bilan de quantité de mouvement sur le système, on trouve après projection sur l'axe horizontal, en notant D_m le débit massique,

   $$[D_m v_x]_e^s = -\frac{T}{2}$$
   $$\int_0^h \mu v_x^2(L,y)\,\mathrm{d}y - \mu U^2 h = -\frac{T}{2}$$

   On trouve T :

   $$\boxed{T = 2\mu U^2 \int_0^h \left[1 - \left(\frac{v_x(L,y)}{U}\right)^2\right]\mathrm{d}y}$$

   Cela revient à poser

   $$\boxed{\phi = 1 - \left(\frac{v_x(L,y)}{U}\right)^2}$$

IX - B

1. On retrouve la courbe donnée en VII-C avec $f(\theta) = \frac{\theta}{3}$ pour $\theta < \theta_i$ puis $f(\theta) = 1$.
2. On peut exprimer la fonction ϕ :

   $$\phi = 1 - \frac{y^2}{e^2} \text{ pour } y < e(L)$$
   $$\phi = 0 \text{ pour } y \geq e(L)$$

   Cela permet de calculer T

   $$\boxed{T = 2\mu U^2 \int_0^{e(x)} \left[1 - \left(\frac{y}{e(x)}\right)^2\right]\mathrm{d}y}$$

   On a

   $$\boxed{T = 4\mu\sqrt{\nu L}U^{3/2}}$$

   On trouve $T = 3\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$.
3. On en déduit la valeur du coefficient C_x :

   $$\boxed{C_x = \frac{T}{\mu U^2 L} = \frac{4}{\sqrt{\mathcal{R}e}}}$$