

DM3 - Corrigé

1 Oscillateur quasi-sinusoïdal

1. Équation différentielle :

On remarque que les dipôles R, r, L et C sont en série.

$$u_s(t) = L \frac{di}{dt} + (R + r)i(t) + \frac{q}{C}$$

Avec : $u_s(t) = k \times Ri(t) \times E$.



Indiquer systématiquement les grandeurs qui interviennent dans les calculs ! de nombreuses erreurs ici car souvent le condensateur était en convention générateur



Forme canonique obligatoire ! détermination de Q obligatoire !

En remplaçant $u_s(t)$ par son expression et en dérivant, on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{L} (R + r - kER) \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = 0$$

Cette équation est de la forme :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0$$

Avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R + r - kER} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

On obtient un oscillateur harmonique (et donc des oscillations sinusoïdales) si Q est infini et donc si :

$$E = \frac{R + r}{kR}$$

La pulsation des oscillations est alors : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



De nombreuses confusions ici : oscillations sinusoïdales ne signifie pas régime pseudo-périodique !

2. Les oscillations vont débiter si l'oscillateur est instable : c'est à dire si $Q < 0$. En effet, cette condition étant vérifiée, le bruit électronique va être amplifié de manière cohérente pour permettre d'obtenir des signaux non nuls en régime permanent. De fait, pour que les oscillations puissent débiter, il faut que :

$$E > \frac{R + r}{kR}$$

L'amplitude de ces oscillations va au bout d'un moment être limitée par la tension de sortie du multiplieur : en effet $u_s(t)$ ne peut pas dépasser V_{sat} en valeur absolue.

3. À défaut d'informations sur un dispositif de limitation de l'amplitude des oscillations, on considère que l'amplitude de ces oscillations vaut V_{sat} : $u_s(t) = V_{sat} \cos \omega_0 t$, (voir figure 1).

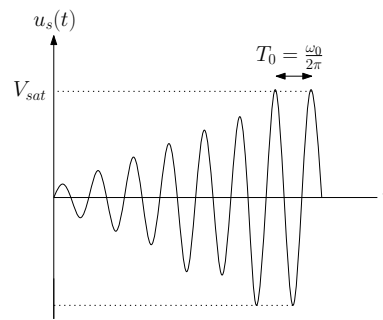


Figure 1 – croissance et limitation de l'amplitude de sortie

on a alors :

$$i(t) = \frac{V_{sat}}{kER} \cos \omega_0 t$$

et donc :

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i(t)}{C} = \frac{V_{sat}}{kERC} \cos \omega_0 t$$

Soit :

$$u_c(t) = \frac{V_{sat}}{kERC\omega_0} \sin \omega_0 t$$

D'où l'amplitude de $u_c(t)$: $\frac{V_{sat}}{kERC\omega_0}$.

4. Pour ne pas perturber le circuit, il faut brancher le circuit de charge à la sortie du multiplieur. En effet l'impédance de sortie de ce dernier étant nulle, sa tension de sortie ne varie pas quand il est en charge.

2 Ligne en continu

Préliminaires.

1.

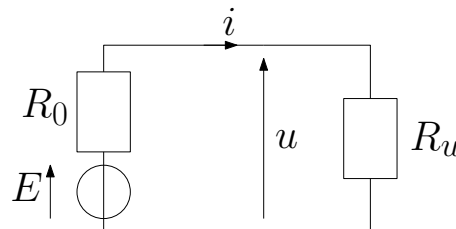


Figure 2 – Schéma de la situation



Indiquer systématiquement les grandeurs qui interviennent dans les calculs !

2. On a :

$$P = R_u \cdot i^2$$

avec, grâce à la loi de Pouillet :

$$i = \frac{E}{(R_0 + R_u)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{R_u E^2}{(R_0 + R_u)^2}$$

3. On calcule facilement la dérivée de P par rapport à R_u et on l'annule :

$$\frac{dP}{dR_u} = 0 \Rightarrow R_u = R_0$$

C'est ce que l'on appelle l'adaptation d'impédance qui permet le transfert maximal de puissance.



Ne pas laisser des grandeurs inconnues dans l'expression de P

Modélisation d'une ligne bifilaire en régime continu.

4. (a) On modifie le circuit grâce aux lois d'association et à l'équivalence Thévenin/Norton :

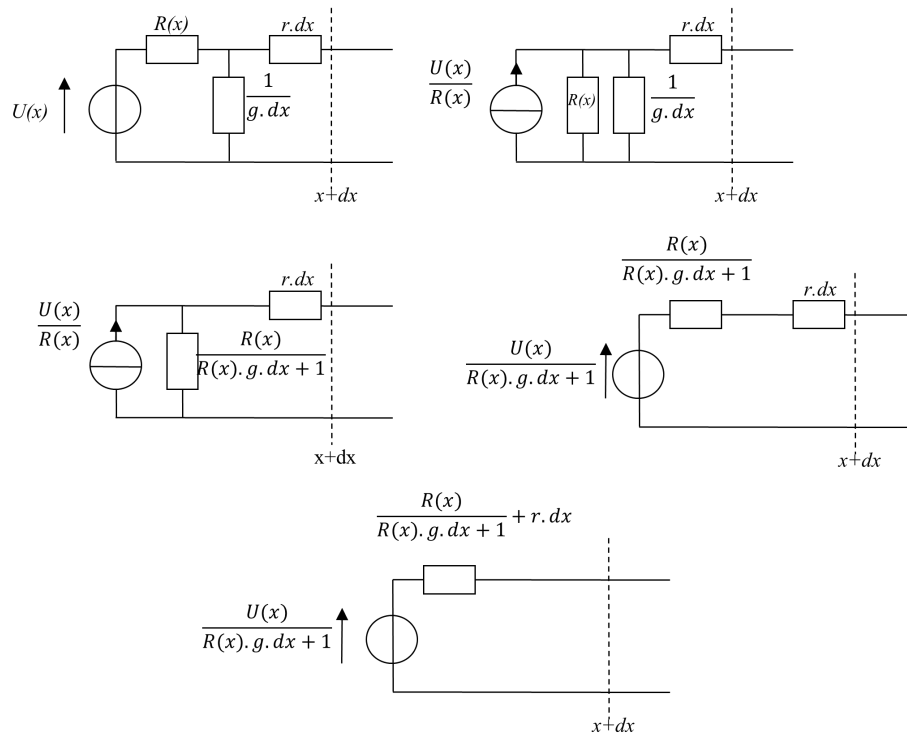


Figure 3 – Modification du circuit



De nombreuses erreurs d'homogénéité : $R(x)$ est une résistance et gdx est une conductance !

D'où :

$$U(x + dx) = \frac{U(x)}{R(x) \cdot g \cdot dx + 1}$$

- (b) Pour la résistance on obtient facilement :

$$R(x + dx) = \frac{R(x)}{R(x) \cdot g \cdot dx + 1} + r \cdot dx$$

5. Détermination de la résistance interne $R(x)$.

(a)

$$\begin{aligned}
R(x+dx) &= \frac{R(x)}{R(x) \cdot g \cdot dx + 1} + r \cdot dx \\
\Rightarrow R(x+dx) &= R(x) \cdot \underbrace{(R(x) \cdot g \cdot dx + 1)^{-1}}_{\varepsilon} + r \cdot dx \\
\Rightarrow R(x+dx) &= R(x) \cdot (1 - R(x) \cdot g \cdot dx) + r \cdot dx \\
\Rightarrow R(x+dx) - R(x) &= -R^2(x) \cdot g \cdot dx + r \cdot dx \\
\Rightarrow dR &= (-R^2(x) \cdot g + r) dx = (R^2(x) - R_c^2) \cdot (-g dx) \text{ avec } R_c = \sqrt{\frac{r}{g}} \\
\Rightarrow \frac{dR}{R(x)^2 - R_c^2} &= -g \cdot dx
\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{dR}{R(x)^2 - R_c^2} = -g \cdot dx \text{ où } R_c = \sqrt{\frac{r}{g}}$$

(b) Partons de :

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{R(x)^2 - R_c^2} &= -g \cdot dx \\
\Rightarrow \int \frac{dR}{R(x)^2 - R_c^2} &= - \int g \cdot dx + A
\end{aligned}$$

(A= constante à déterminer)



De nombreux points perdus par oubli de la constante d'intégration !

D'après l'intégrale donnée, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2R_c} \ln \left| \frac{R(x) - R_c}{R(x) + R_c} \right| + A &= -g \cdot x \\
\Rightarrow \ln \left| \frac{R(x) - R_c}{R(x) + R_c} \right| &= A - 2R_c g \cdot x \\
\Rightarrow \frac{R(x) - R_c}{R(x) + R_c} &= e^{A - 2R_c g \cdot x} = \underbrace{e^A}_B \cdot e^{-2R_c g \cdot x} = B \cdot e^{-2R_c g \cdot x}
\end{aligned}$$

D'où :

$$R(x) = R_c \frac{1 + B e^{-2g R_c x}}{1 - B e^{-2g R_c x}}$$

Sachant que pour $x = 0, R = R_0$, on détermine B :

$$\begin{aligned}
R(0) = R_0 &= R_c \frac{1 + B}{1 - B} \\
\Rightarrow B &= \frac{R_0 - R_c}{R_0 + R_c}
\end{aligned}$$

D'où :

$$R(x) = R_c \frac{(R_0 + R_c) + (R_0 - R_c) e^{-2gR_c x}}{(R_0 + R_c) - (R_0 - R_c) e^{-2gR_c x}}$$

Soit

$$R(x) = R_c \frac{(R_0 + R_c) e^{gR_c x} + (R_0 - R_c) e^{-gR_c x}}{(R_0 + R_c) e^{gR_c x} - (R_0 - R_c) e^{-gR_c x}}$$

D'où :

$$R(x) = R_c \frac{a_1 e^{bx} + a_2 e^{-bx}}{a_1 e^{bx} - a_2 e^{-bx}}$$

avec : $a_1 = R_0 + R_c$; $a_2 = R_0 - R_c$ et $b = R_c \cdot g$

6. Détermination de la fem $U(x)$.

(a) Partons de $U(x + dx) = \frac{U(x)}{R(x) \cdot g \cdot dx + 1}$

$$\Rightarrow U(x + dx) = U(x) \underbrace{(R(x) \cdot g \cdot dx + 1)^{-1}}_{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow U(x + dx) = U(x) (1 - R(x) \cdot g \cdot dx)$$

$$\Rightarrow U(x + dx) - U(x) = -U(x) \cdot R(x) \cdot g \cdot dx$$

$$\Rightarrow dU = -U(x) \cdot R(x) \cdot g \cdot dx$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{U(x)} = -R(x) \cdot g \cdot dx$$

(b) Partons de :

$$\frac{dU}{U(x)} = -R(x) \cdot g \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dU}{U(x)} = - \int R(x) \cdot g \cdot dx + A$$

(A constante à déterminer)

$$\Rightarrow \ln(U(x)) = -gR_c \int \frac{a_1 e^{bx} + a_2 e^{-bx}}{a_1 e^{bx} - a_2 e^{-bx}} dx + A$$

D'après l'intégrale donnée, on a donc :

$$\ln(U(x)) = - \underbrace{\frac{gR_c}{b}}_1 \ln(a_1 e^{bx} - a_2 e^{-bx})$$

$$\ln(U(x)) = \ln \left(\frac{\widehat{e^A}^B}{a_1 e^{bx} - a_2 e^{-bx}} \right)$$

$$\Rightarrow U(x) = \frac{B}{a_1 e^{bx} - a_2 e^{-bx}}$$

Sachant que $U(0) = V_0$, on détermine B :

$$V_0 = \frac{B}{a_1 - a_2} \Rightarrow B = V_0 (a_1 - a_2)$$

$$\Rightarrow U(x) = V_0 \frac{a_1 - a_2}{a_1 e^{bx} - a_2 e^{-bx}}$$



Sachant que $a_1 > a_2$, il n'y a pas de problème de signe dans $\ln$

7. On veut que $R(x)$ soit constante

$$\Rightarrow R = R_c \frac{a_1 e^{bx} + a_2 e^{-bx}}{a_1 e^{bx} - a_2 e^{-bx}}$$

$$\Rightarrow R (a_1 e^{bx} - a_2 e^{-bx}) = R_c (a_1 e^{bx} + a_2 e^{-bx})$$

Ceci étant vrai quelque soit x , on obtient en identifiant :

$$Ra_1 = R_c a_1$$

et :

$$Ra_2 = -R_c a_2$$

Sachant que les résistances R et R_c ne peuvent pas être négatives, on peut affirmer que a_2 est nulle. a_1 ne pouvant pas être également nulle et on en déduit :

$$R = R_0 = R_c$$

$U(x)$ vaut donc :

$$U(x) = V_0 e^{-bx}$$

Adaptation de la charge au maximum de puissance

8. D'après le préliminaire il faut : $R_u = R_0 = R_c$

3 Projet Méga-Gauss

1. ☐ L'énergie emmagasinée par le condensateur au cours de la charge est :

$$E_C = \frac{1}{2} C E^2$$



La notion de charge fait intervenir le temps de charge, il fallait prendre $t \rightarrow \infty$

En adoptant la convention générateur pour le générateur, l'énergie fournie par le générateur au cours de la charge est :

$$E_{fournie} = \int_0^\infty E i_g(t) dt = E \int_0^\infty \frac{dq}{dt} dt = E [q(t)]_0^\infty$$

où $q(t)$ est la charge portée par l'armature supérieure du condensateur.

Ainsi :

$$E_{fournie} = Eq(\infty) = CE^2$$

D'où :

$$\frac{E_C}{E_{fournie}} = 0.5$$

Ce résultat étant indépendant de la valeur de R .



Résultat connu, voir cours de SUP

□ La valeur de R doit donc être choisie comme un compromis entre un temps de charge rapide (RC faible) et le respect de l'A.R.Q.S. ($\ell \ll cRC$ où ℓ est la longueur du circuit de charge).

2. (a) □ On établit l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

$$\text{où : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 9,13 \times 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,913$$



Forme canonique obligatoire ! détermination de Q obligatoire !

Il s'agit du régime *pseudo-périodique*.

□ Les conditions initiales sont : $i(0) = 0$ et $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$.

□ On obtient alors :

$$i(t) = \frac{E}{L\Omega} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \sin(\Omega t)$$

L'allure de $t \rightarrow i(t)$ est la suivante :

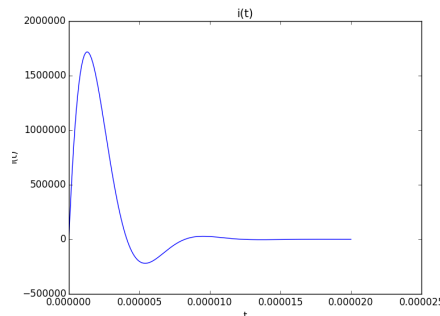


Figure 4

□ On calcule alors les dates τ pour lesquelles $\frac{di}{dt}(\tau) = 0$:

$$\tan(\Omega\tau) = \sqrt{4Q^2 - 1}$$



Pour chercher le maximum, il fallait dériver !!

La plus petite valeur positive de τ est celle qui permettra d'accéder à i_{max} . On obtient $\tau = 1,3 \times 10^{-6}$ s et on calcule :

$$i_{max} = i(\tau) = 1,72 \times 10^6 \text{ A}$$

(b) ☐ On calcule alors :

$$B_{max} = \frac{\mu_0 i_{max}}{D} = 108 \text{ T}$$

☐ Pour obtenir un ordre de grandeur de la durée de vie de ce champ, on peut arbitrairement considérer une demi pseudo-période :

$$\frac{\pi}{\Omega} = 4,1 \times 10^{-6} \text{ s}$$

3. (a) Dans le circuit précédent, le courant permettant de produire le champ magnétique s'inverse au bout d'une demi-période : pour éviter cette inversion, on introduit une diode de roue libre qui va permettre de s'affranchir de ces pseudo-oscillations.

(b) Sens de la diode :

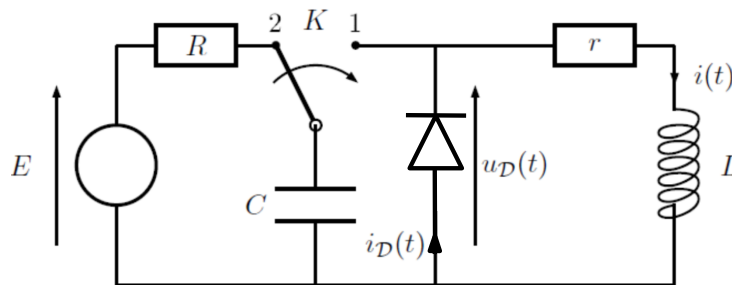


Figure 5



La caractéristique de la diode telle que décrite dans l'énoncé, ne correspond pas à la caractéristique classique : les conventions d'orientation n'étaient pas les conventions habituelles !

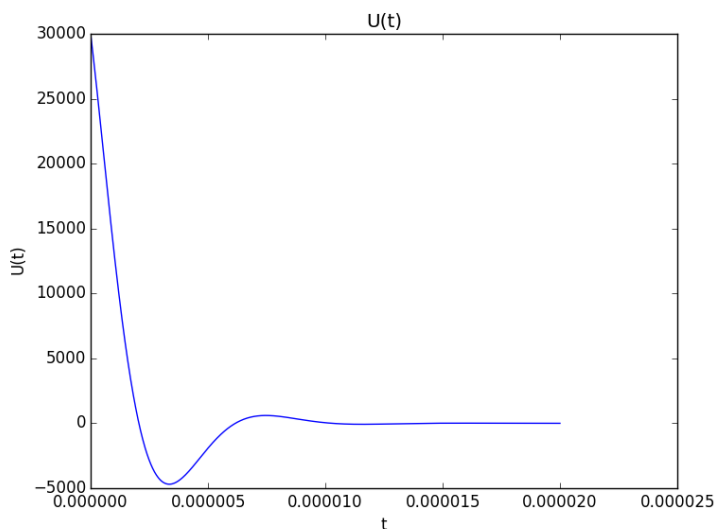
- (c) Au début, compte-tenu de la question précédente, la diode est bloquée. La charge $q(t)$ portée par l'armature supérieure du condensateur est solution de l'équation :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

avec les conditions initiales $q(0) = CE$ et $\frac{dq}{dt}(0) = 0$ ce qui mène à :

$$u_D(t) = \frac{q(t)}{C} = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \cos(\Omega t)$$

tant que la diode est bloquée.

**Figure 6**

Le déblocage va intervenir à partir de la date θ telle que :

$$\Omega\theta = \frac{\pi}{2}$$

On trouve :

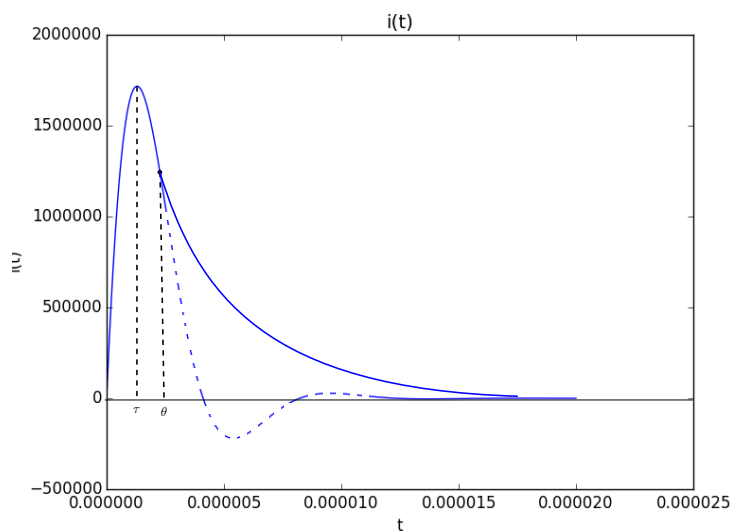
$$\theta = 2.1 \times 10^{-6} \text{ s}$$

, qui est supérieure à τ et inférieure à une demie-période : la diode joue bien son rôle.

La diode étant déblocuée, on obtient un circuit (L, r) dont le temps de décharge est :

$$\tau' = \frac{L}{r} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Le courant s'annulant pour environ 5τ ,

**Figure 7**

4 Étude de filtres

1. COURS (inverseur, intégrateur)

$$\underline{H}_2 = -1$$

$$\underline{H}_3 = -\frac{1}{jR_2C\omega}$$

2. Théorème de Millman sur l'entrée V_- du filtre 1 :

$$\underline{V}_- \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + jC\omega \right) = \frac{e}{R} + \underline{s}_1 \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) + \frac{\underline{s}_2}{R_2} = 0$$

car AOI + RL + $\underline{V}_+ = 0$ entraîne $\underline{V}_- = 0$.

3. Sachant que l'on a : $\underline{s}_1 = -\underline{s}$ et $\underline{s}_2 = -\frac{1}{jR_2C\omega}\underline{s}$, on obtient, en injectant $\underline{s}_1$ et $\underline{s}_2$ dans la formule obtenue précédemment :

$$\frac{e}{R} - \frac{1}{jR_2C\omega}\underline{s} - \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) \underline{s} = 0$$

Soit, en faisant apparaitre la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{1}{1 + j \left(RC\omega - \frac{R}{R_2^2 C\omega} \right)}$$

En identifiant avec la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = H_0 \frac{\frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)}{1 + \frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

on obtient :

$$H_0 = 1$$

$$\frac{Q}{\omega_0} = RC \text{ et } Q\omega_0 = \frac{R}{R_2^2 C}$$

Soit :

$$\omega_0 = \frac{1}{R_2 C}$$

$$Q = \frac{R}{R_2}$$

On reconnait la formule classique d'un filtre passe-bande.

4. ☐ Application numérique (pour $R = 47 \Omega$) : $H_0 = 1$; $\omega_0 = 31.2 \text{krad}^{-1}$; $f_0 = 4.98 \text{ kHz}$; $Q = 145 \gg 1$: le filtre est très selectif.

☐ Diagramme asymptotique de Bode :

• BF : Si $\omega \rightarrow 0$ alors $\underline{H} \sim \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} G \sim \frac{\omega}{Q\omega_0} \\ \theta \sim \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} \sim 20 \log \omega - 20 \log (Q\omega_0) \\ \theta \sim \frac{\pi}{2} \end{cases}$

On a une droite de pente **+20dB** par décade.

• HF : Si $\omega \rightarrow \infty$ alors $\underline{H} \sim -\frac{j}{Q} \frac{\omega_0}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} G \sim \frac{\omega_0}{Q\omega} \\ \theta \sim -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} \sim -20 \log \omega + 20 \log \left(\frac{\omega_0}{Q} \right) \\ \theta \sim -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

On a une droite de pente **-20dB** par décade.

☛ Intersection des asymptotes :

$$-20 \log \omega + 20 \log \left(\frac{\omega_0}{Q} \right) = 20 \log \omega - 20 \log (Q\omega_0) \Rightarrow 40 \log \omega = 40 \log \omega_0 \Rightarrow \omega = \omega_0.$$

Le point d'intersection a pour abscisse ω_0 et pour ordonnée $-20 \log Q$.



Encore trop de diagramme de Bode faux pour le passe-bande !

☛ On a toujours une résonance pour $\omega = \omega_0$. La courbe réelle vaut pour $\omega = \omega_0$: $G(\omega_0) = 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$ dB

☛ Pulsations de coupure à **-3dB** : ce sont les pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles $G(\omega_1) = G(\omega_2) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.

La bande passante à **-3dB** vaut $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$. AN : $\Delta f = 34$ Hz

□ Diagramme asymptotique de Bode :

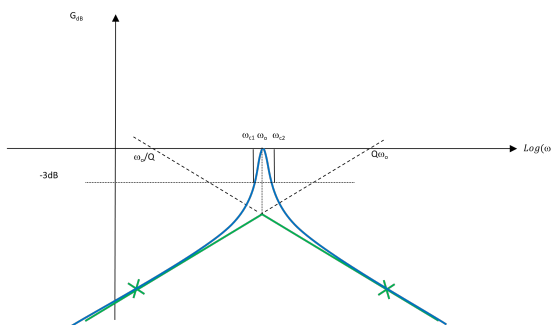


Figure 8 – diagramme asymptotique de Bode

5. □ Signal d'entrée :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

☛ E_0 est la valeur moyenne du signal : ici elle est nulle

☛ C'est une fonction impaire, donc $a_0 = 0$.

$$☛ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$☛ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \sin(n\omega t) dt$$

☛ Comme $e(t)$ est impaire, $e(t) \cos(n\omega t)$ est impaire, donc $a_n = 0$.

$\Rightarrow$ Il reste $e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$.

□ Signal de sortie :

☛ On applique le théorème de superposition et la fonction de transfert à chaque composante spectrale. L'effet de $H(jn\omega)$ est de multiplier l'amplitude par $G_n = G(n\omega)$ et de rajouter un déphasage $\theta_n = \theta(n\omega)$.

$$e_n(t) = b_n \sin(n\omega t) \rightarrow s_n(t) = b_n G_n \sin(n\omega t + \theta_n)$$

Avec :

$$G_n = G(n\omega) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{n\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{nf}{f_0} - \frac{f_0}{nf} \right)^2}}$$

et :

$$\theta_n = \arg(\underline{H}(jn\omega)) = -\arg\left(1 + jQ\left(\frac{nf}{f_0} - \frac{f_0}{nf}\right)\right)$$

- On a $\tan(-\theta_n) = Q\left(\frac{nf}{f_0} - \frac{f_0}{nf}\right)$ et $\cos(-\theta_n) \geq 0$ donc :

$$\theta_n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

- Approche qualitative : on superpose le diagramme de Bode du filtre et le spectre de la tension d'entrée.

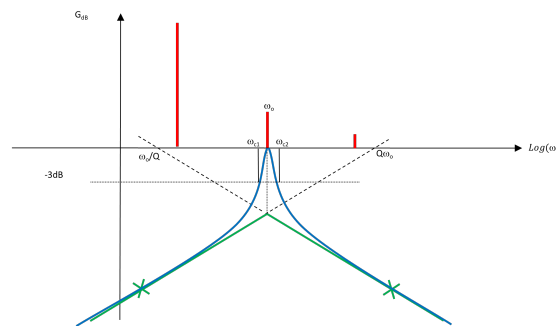


Figure 9 – Approche qualitative

On s'aperçoit que seul l'harmonique 3 est proche de la BP : le signal de sortie sera sinusoïdal de fréquence $3f$ et d'amplitude égale à celle de l'harmonique 3.

- Approche quantitative : on calcul des amplitudes et déphasages des harmoniques 1, 3 et 5.

$$n = 1 : f = 1650 \text{ Hz}; G_1 = 0,00257; S_1 = 0,0327 \text{ V}; \theta_1 = 1,568 \text{ rad}$$

$$n = 3 : 3f = 4950 \text{ Hz}; G_3 = 0,496; S_3 = 2,10 \text{ V}; \theta_3 = 1,050 \text{ rad}$$

$$n = 5 : 5f = 8250 \text{ Hz}; G_5 = 0,0065; S_5 = 0,0167 \text{ V}; \theta_5 = -1,577 \text{ rad}$$

Conclusion : La fréquence de résonance du filtre passe-bande est $f_0 = 4980 \text{ Hz}$ proche de $3f$ et la bande passante vaut $\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 34 \text{ Hz}$. Ainsi, l'harmonique 3, avec une fréquence égale à $3 \times 1650 = 4950 \text{ Hz}$, est très légèrement en dehors de la bande passante du filtre mais c'est la seule qui est effectivement transmise (son amplitude est environ 100 fois plus grand que le fondamental et l'harmonique n°5).



On n'a pas exactement $3f = f_0$ et vu la valeur de Q , il fallait faire les applications numériques

On a donc

$$s(t) \simeq s_3(t) = b_3 G_3 \sin(3\omega t + \theta_3) = 2,10 \sin(3\omega t + 1,049)$$

- Allure du signal :

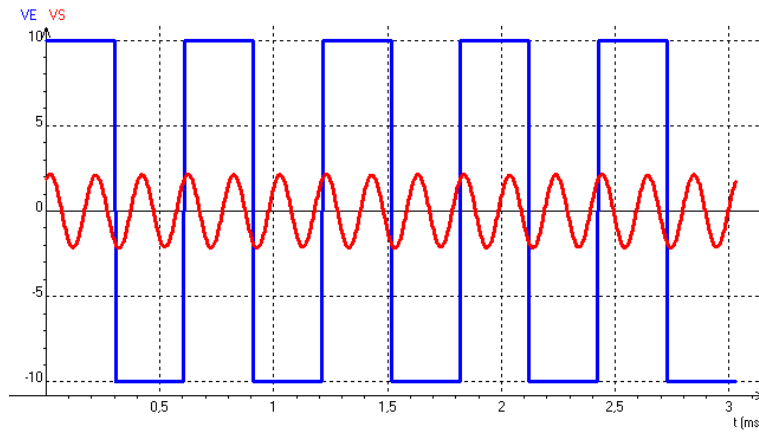
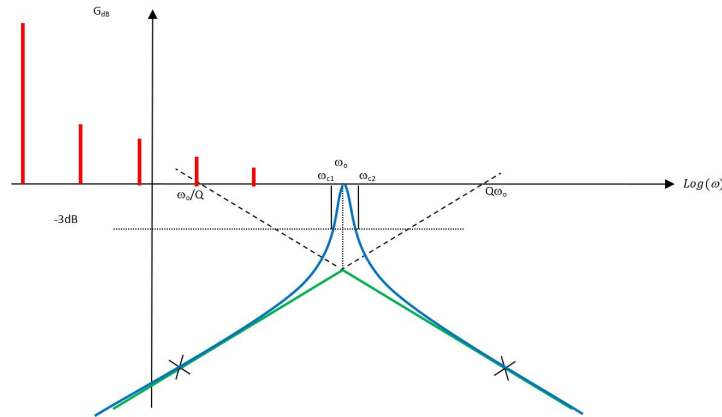
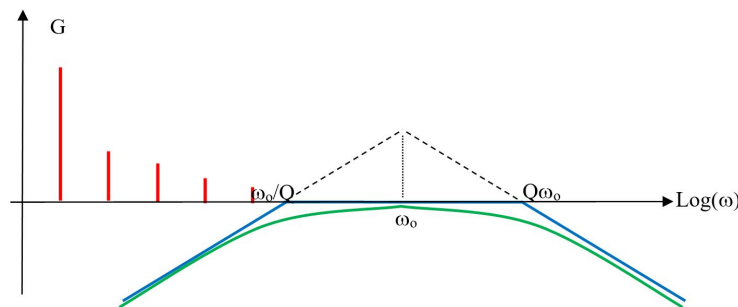


Figure 10

6. ☐ Approche qualitative : les fréquences qui composent le spectre sont cette fois très inférieures devant f_0 : le signal est dérivé. C'est bien ce que l'on observe grossièrement sur les deux chronogrammes. Notons que dans le premier cas, des oscillations pseudo-périodiques apparaissent, ce qui signifie que dans le premier cas, le facteur de qualité est supérieur à $1/2$ (de l'ordre du nombre d'oscillations, c'est à dire de 5).

Figure 11 – Cas où $Q \gg 1$ Figure 12 – Cas où $Q \ll 1$

- ☐ Approche quantitative et détermination de Q :

☛ On est dans le cas où $\omega \ll \omega_0$:

$$\underline{H} \sim \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{S}{e}$$

C'est un montage dérivateur. On a donc :

$$s(t) = \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{de}{dt}$$

- ☛ Si $e = \alpha T + cte$, alors $s(t) = \frac{1}{\omega_0 Q} \alpha$.
- ☛ Application numérique :

$$\alpha = \frac{100}{5 \times 10^{-3}} = 4000$$

$$\text{Premier cas : } s(t) = \frac{1}{\omega_0 Q} \alpha = 25,3 \text{ mV} \Rightarrow Q = 5$$

$$\text{Deuxième cas : } s(t) = \frac{1}{\omega_0 Q} \alpha = 256 \text{ mV} \Rightarrow Q = 0,5$$

- ☛ Lors des changements de pente, on voit le régime transitoire :
 - ✓ $Q = 5$: régime pseudo périodique amorti. La pseudo fréquence vaut $f_0 = 4980 \text{ Hz}$ et la pseudo période vaut : $0,2 \text{ ms}$. Le régime libre s'écrit : $\alpha \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q}\right) \cos(\omega' t + \varphi)$. On peut poser $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 0,32 \text{ ms}$. Au bout de $5\tau = 1,6 \text{ ms}$, il tend vers 0. C'est ce qu'on observe sur la courbe.
 - ✓ $Q = 0,5$: régime critique. On a $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 0,032 \text{ ms}$ et $5\tau = 0,16 \text{ ms}$. On n'observe quasiment plus le régime transitoire.

5 Bille sur un chariot



Exercice très peu cherché : prenez la peine de regarder le corrigé

- ☐ On commence par paramétrer le problème :

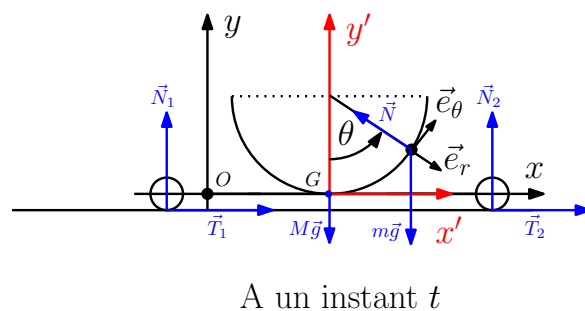
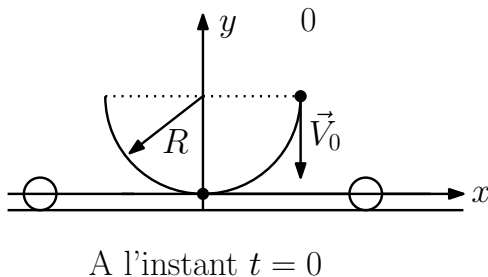


Figure 13 – Paramétrage du problème

- ☐ Approche qualitative : la bille fait accélérer le plateau vers la droite pour θ compris entre 0 et $\pi/2$, la bille décélère de la même façon pour θ compris entre $-\pi/2$ et 0. Quand la bille quitte le plateau (θ vaut alors $-\pi/2$), l'accélération du plateau et sa vitesse sont nulles mais le plateau a avancé. En l'absence de dissipation, l'énergie du système se conserve et donc la bille va remonter jusqu'à l'altitude h .
- ☐ On note $(X, Y = 0)$ les coordonnées du C-I du plateau ; on note (x, y) les coordonnées de la bille dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ supposé galiléen. La force de contact exercée par le plateau sur la bille est :

$$\vec{N} = N_x \vec{e}_x + N_y \vec{e}_y$$

- ☐ On applique le TRC au plateau et à la bille dans le référentiel $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} M\ddot{X} &= \bar{T}_1 + \bar{T}_2 - N_x \\ 0 &= -Mg + N_1 + N_2 - N_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= N_x \\ m\ddot{y} &= -mg + N_y \end{cases}$$

□ Le TMC appliqué dans le référentiel barycentrique de la roue avant donne :

$$J\dot{\Omega}_2 = -\bar{T}_2 R$$

Si on néglige l'inertie de la roue, on obtient :

$$\bar{T}_2 = 0$$

De même, on aura :

$$\bar{T}_1 = 0$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} M\ddot{X} &= -N_x \\ 0 &= -Mg + N_1 + N_2 - N_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= N_x \\ m\ddot{y} &= -mg + N_y \end{cases}$$

□ On obtient donc :

$$M\ddot{X} + m\ddot{x} = 0$$

$$M\dot{X} + m\dot{x} = 0$$

$$MX + mx = mR$$

Notons que ce résultat peut être proposé dès le début :



Si on néglige l'inertie des roues, le système composé par le plateau et la bille est isolé suivant (Ox) et donc sa quantité de mouvement est constante.

□ En l'absence de dissipation et de puissance d'actions internes, on peut écrire la conservation de l'énergie mécanique du système :

$$E_m = mgR + \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy$$

□ Sachant que :

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = mgh$$

$$\dot{X} = -\frac{m}{M}\dot{x}$$

$$x = X + R\sin\theta \Rightarrow x = \frac{mR + MR\sin\theta}{m + M} \Rightarrow \dot{x} = \frac{MR\cos\theta}{m + M}\dot{\theta}$$

$$y = R(1 - \cos\theta) \Rightarrow \dot{y} = R\sin\theta\dot{\theta}$$

On obtient :

$$mg(R + h) = \frac{1}{2} \left(M \left(\frac{m}{M} \right)^2 + m \right) \left(\frac{MR\cos\theta}{m + M} \dot{\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(R\sin\theta\dot{\theta} \right)^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

$$mg(R + h) = \frac{1}{2} mR^2 \left(\frac{M}{M + m} \cos^2\theta + \sin^2\theta \right) \dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

- On vérifie assez facilement que $\dot{\theta}$ ne peut pas s'annuler : la bille sort de la glissière.
 □ On détermine alors la vitesse de la bille au moment où elle quitte la glissière ($\theta = -\pi/2$) :

$$mg(R+h) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + mgR$$

$$R^2\dot{\theta}_1^2 = 2gh$$

$$\vec{V}_1 = R\dot{\theta}_1 \vec{e}_y = \sqrt{2gh} \vec{e}_y$$

- On en déduit la hauteur maximale atteinte par la bille :

$$\frac{1}{2}mV_1^2 + mgR = mg(R+h')$$

$$h' = h$$



La bille remonte à la même hauteur

- Notons que l'on a alors :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= 0 \\ X_1 &= \frac{2mR}{M+m} \neq 0 \end{aligned}$$



Ainsi le chariot a avancé mais cette translation n'intervient pas dans le bilan énergétique en raison de l'absence de frottements.

6 Méthode inverse

On note O le centre de la planète, on assimile la sonde à un point matériel M de masse m , on note $\mu(r)$ la masse volumique de la planète.



Commencer à identifier un mouvement à force centrale et dérouler rapidement le cours

- La sonde est soumise à l'attraction de la planète : son mouvement est un mouvement à force centrale :

- ☛ Son moment cinétique $\vec{L}_O$ est constant,
- ☛ Le mouvement est plan : plan perpendiculaire à $\vec{L}_O$ passant par O ,
- ☛ En utilisant les coordonnées polaires dans ce plan (ρ, θ) , on trouve :

$$\vec{L}_O = m\rho^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

où $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan, orienté dans le sens de $\vec{L}_O$.

- ☛ On note $C = \rho^2\dot{\theta}$ la constante des aires.

- Le champ de gravitation créé par la planète en M , à une distance ρ de O , est celui d'une planète de masse $m(\rho)$:

$$\vec{A}(M) = -\frac{Gm(\rho)}{\rho^2}\vec{e}_\rho$$

où :

$$m(\rho) = \int_0^\rho \mu(r) \times 4\pi r^2 dr$$

□ Le PFD appliqué à la sonde, projeté sur $\vec{e}_\rho$ donne :

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = mA(\rho)$$

Soit :

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{Gm(\rho)}{\rho^2}$$

□ On utilise l'expression de ρ en fonction de θ pour exprimer $\ddot{\rho}$ et $\dot{\theta}$:

$$\dot{\rho} = \frac{\rho_0 a k \sin k\theta}{(1 + a \cos k\theta)^2} \dot{\theta}$$

$$\dot{\rho} = \frac{\rho^2}{\rho_0} a k \sin k\theta \dot{\theta}$$

$$\dot{\rho} = \frac{C}{\rho_0} a k \sin k\theta$$

$$\ddot{\rho} = \frac{C}{\rho_0} a k^2 \cos k\theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{\rho} = \frac{C^2}{\rho_0 \rho^2} a k^2 \cos k\theta$$

$$\ddot{\rho} = \frac{C^2 k^2}{\rho_0 \rho^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)$$

□ Le PDF donne donc :

$$\frac{C^2 k^2}{\rho_0 \rho^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) - \frac{C^2}{\rho^3} = -\frac{Gm(\rho)}{\rho^2}$$

D'où :

$$m(\rho) = -\frac{C^2}{G} \left(\frac{k^2 - 1}{\rho} - \frac{k^2}{\rho_0} \right)$$

□ Pour remonter à la masse volumique, on part de la masse élémentaire dm comprise entre ρ et $\rho + d\rho$:

$$dm = 4\pi\rho^2 d\rho \mu(\rho) = \frac{C^2}{G\rho^2} (k^2 - 1) d\rho$$

$$\mu(\rho) = \frac{C^2(k^2 - 1)}{4\pi G\rho^4}$$

□ Pour remonter à la pression, on utilise l'équilibre d'une particule fluide :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \mu(\rho)\overrightarrow{A}(\rho)$$

$$\frac{dP}{d\rho} = -\frac{G\mu(\rho)m(\rho)}{\rho^2}$$

Soit, après simplifications :

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{C^4(k^2 - 1)}{4\pi G} \left(\frac{k^2 - 1}{\rho^7} - \frac{k^2}{\rho^6 \rho_0} \right)$$

On intègre en prenant P nulle à l'infini :

$$P(\rho) = \frac{C^4(k^2 - 1)}{4\pi G} \left(-\frac{k^2 - 1}{6\rho^6} + \frac{k^2}{5\rho^5 \rho_0} \right)$$

- On détermine le champ des températures en utilisant la relation des gaz parfaits :

$$\mu = \frac{PM}{RT} \Rightarrow T(\rho) = \frac{P(\rho)M}{R\mu(\rho)}$$

$$T(\rho) = \frac{C^2 M}{R} \left(\frac{k^2}{5\rho_0\rho} - \frac{(k^2 - 1)}{6\rho^2} \right)$$

7 Condition de décollement



Il s'agit d'un exercice CCINP, il faut donc proposer un modèle simple, proche du cours. On va donc considérer que le cycliste, assimilé à un point matériel, glisse sans frottement. Ceux qui veulent un modèle plus élaboré peuvent commencer par considérer une seule roue avec un roulement sans glissement

- On considère alors le paramétrage suivant :

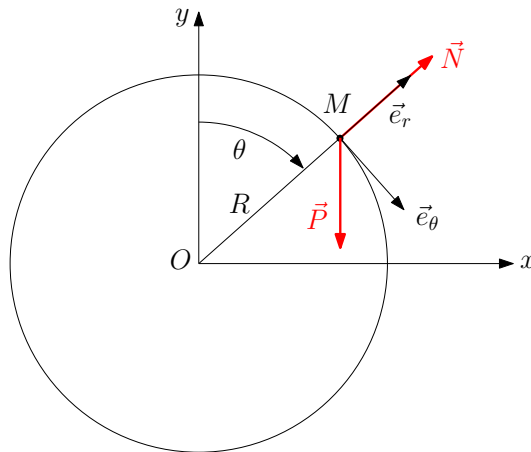


Figure 14 – Paramétrage du problème

- Le PFD appliqué au cycliste donne :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

Soit en projetant sur la base polaire :

$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 &= N - mg \cos \theta \\ mr\ddot{\theta} &= mg \sin \theta \end{cases}$$

- On en déduit :

$$\ddot{\theta} = \omega_0^2 \sin \theta$$

où, $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$

- En multipliant l'équation précédente par $\dot{\theta}$ et en intégrant, on obtient :

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos \theta)$$

- En remplaçant dans l'équation différentielle faisait intervenir N , on obtient :

$$N = mR\omega_0^2 (-2 + 3 \cos \theta)$$

□ Le cycliste décolle quand N s'annule :

$$N = 0 \Rightarrow \cos \theta_\ell = \frac{2}{3}$$

□ On utilise alors l'expression de $\dot{\theta}^2$ pour exprimer la vitesse au moment du décollément :

$$\dot{\theta}_\ell^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos \theta_\ell) = \frac{2}{3}\omega_0^2$$

D'où :

$$V_\ell = R\dot{\theta}_\ell = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

8 Masse accrochée à deux ressorts



Exercice en partie dans le TD

□ On commence par paramétrer le dispositif :

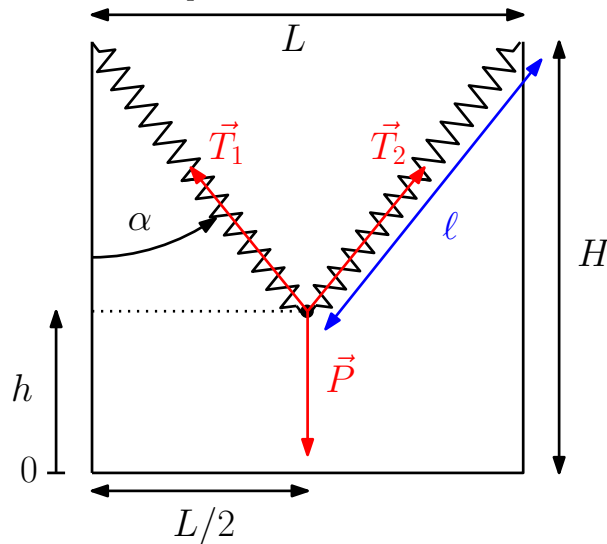


Figure 15 – Paramétrage du dispositif

□ On met alors en évidence la relation suivante :

$$\ell = \sqrt{(H - h)^2 + \frac{L^2}{4}}$$

□ A $t = 0$, on a plus particulièrement :

$$h = H \Rightarrow \ell = \sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}}$$

□ On écrit ensuite de la conservation de l'énergie mécanique de M :

$$E_m = k \left(\sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0 \right)^2 = k \left(\sqrt{(H - h)^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0 \right)^2 + mgh + \frac{1}{2}m\dot{h}^2$$

□ Hauteur maximale : on cherche $h = h_{max}$ telle que $\dot{h} = 0$:

$$E_m = k \left(\sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0 \right)^2 = k \left(\sqrt{(H - h_{max})^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0 \right)^2 + mgh_{max}$$

□ Vitesse maximale : on cherche h'_{max} et $\dot{h}_{max}$ telle que $\ddot{h} = 0$:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = 2k \left(\sqrt{(H - h)^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0 \right) \left(\frac{-\dot{h}(H - h)}{\sqrt{(H - h)^2 + \frac{L^2}{4}}} \right) + mg\dot{h} + m\dot{h}\ddot{h}$$

On en déduit la relation donnant h'_{max} :

$$2 \left(\sqrt{(H - h'_{max})^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0 \right) \left(\frac{(H - h'_{max})}{\sqrt{(H - h'_{max})^2 + \frac{L^2}{4}}} \right) = \frac{mg}{k}$$

Ainsi que la relation donnant $\dot{h}_{max}$:

$$k \left(\sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0 \right)^2 = k \left(\sqrt{(H - h'_{max})^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0 \right)^2 + mgh'_{max} + \frac{1}{2}m\dot{h}_{max}^2$$

□ Pour proposer des résultats achevés, deux options : on peut négliger l_0 devant les autres distances (peu réaliste) ou proposer des valeurs numériques :

☛ En négligeant l_0 , on obtient :

$$k \left(H^2 + \frac{L^2}{4} \right) = k \left((H - h_{max})^2 + \frac{L^2}{4} \right) + mgh_{max}$$

Soit :

$$h_{max} = \left(H - \frac{mg}{k} \right)$$

Et :

$$h'_{max} = \left(H - \frac{mg}{2k} \right)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{h}_{max}^2 = kH^2 - mgH + \frac{(mg)^2}{2k}$$

□ On peut proposer aussi des odg relatifs à ce genre d'exercice :

$$l_0 = 10 \text{ m} ; k = 400 \text{ N/m} ; m = 300 \text{ kg}$$

9 Chocs

- Le système, constitué des deux masses, étant considéré comme mécaniquement isolé, sa quantité de mouvement se conserve au cours du choc.



Cet argument vient du fait que les forces, au cours du choc, reste finies alors que la durée du choc elle est infirment petite : les impulsions¹ des forces sont négligeables

- L'énergie totale du système se conserve au cours du choc (pas de transfert thermique reçu ni de travail reçu de l'extérieur). Le choc étant considéré comme ponctuel, il n'y a pas de variation de l'énergie potentielle du système. Le choc étant considéré comme élastique, les énergies internes des masses se conservent. On en déduit que l'énergie cinétique du système se conserve.
- On projette les vitesses sur (Ox) et on note v la vitesse de la particule de masse m . On obtient alors :

$$\begin{cases} MV_0 = MV_1 + mv & = M(V_1 + \varepsilon v) & \Rightarrow V_0 - V_1 = \varepsilon v \\ MV_0^2 = MV_1^2 + mv^2 & = M(V_1^2 + \varepsilon v^2) & \Rightarrow V_0^2 - V_1^2 = \varepsilon v^2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$V_0 + V_1 = v > 0$$

Et donc :

$$V_1 = V_0 \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \approx V_0 (1 - 2\varepsilon)$$

2. □ Si on refait le calcul précédent en prenant particules de même masse, on trouve le résultat suivant : Les deux particules échangent leur vitesse. Ainsi, concernant le choc de la deuxième particule avec la troisième, on aura le résultat suivant :

La particule 2 s'arrête au niveau de l'emplacement de la particule 3 avant le choc et la particule 3 part vers la droite avec la vitesse v : en rentrant en collision avec la particule 4, elle échangera à nouveau sa vitesse avec la particule 4...

- La particule de masse M va donc percuter à nouveau la particule 2, au repos à l'emplacement initial de la particule 3, mais cette fois avec une vitesse $\vec{V}_1$. Après ce dernier choc, la particule 2 va partir vers la droite et rentrer en collision avec la particule 3 qui elle est au repos à l'emplacement de la particule 4. Après ce choc, la particule de masse M part donc avec une vitesse $\vec{V}_2$ vers la droite et ainsi de suite...

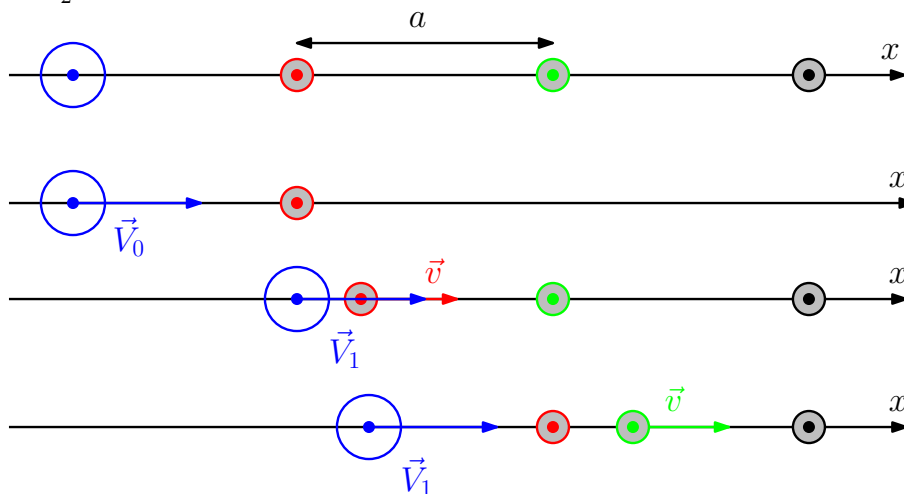


Figure 16 – Choc successifs

- Ainsi, la particule M rentrera uniquement en collision avec la particule 1, avec une vitesse sans cesse décroissante
3. □ D'après ce qui suit, on a :

$$V_2 = V_1(1 - 2\varepsilon) = V_0(1 - 4\varepsilon)$$

$$V_3 = V_2(1 - 2\varepsilon) = V_0(1 - 6\varepsilon)$$

- On en déduit par récurrence immédiate :

$$V_n = V_{n-1}(1 - 2\varepsilon) = V_0(1 - 2n\varepsilon)$$

Avec $k = 2$

4. ☐ On peut estimer la force exercée sur la particule de masse M entre quand sa vitesse passe de V_n à V_{n+1} :

$$F_n = M \frac{V_{n+1} - V_n}{\tau_n} = \frac{-2M\varepsilon V_n}{\tau_n}$$

Où τ_n est la durée du n ème choc :

$$\tau_n = \frac{a}{V_n}$$

On obtient donc :

$$F_n = -\frac{2M\varepsilon V_n^2}{a}$$

- ☐ Dans l'approximation des milieux continus, la vitesse devient une fonction du temps :

$$V_n \rightarrow V(t)$$



Attention ici, on n'étudie pas des ondes mais un point matériel (M) et donc la vitesse est fonction du temps ($V(t)$) voire de x ($V(x)$) mais pas des deux : les variables d'espace et de temps ne sont pas découplées, on est dans une approche Lagrangienne comme à chaque fois en mécanique du point.

La force F_n devient donc :

$$F(t) = -\frac{2M\varepsilon V(t)^2}{a}$$

5. ☐ Le PFD appliqué à la particule de masse M s'écrit donc :

$$M \frac{dV}{dt} = F(t) = -\frac{2M\varepsilon V(t)^2}{a}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2\varepsilon V(t)^2}{a}$$

- ☐ Par séparation des variables, on obtient :

$$\frac{dV}{V^2} = -\frac{2\varepsilon}{a} dt$$

D'où :

$$\frac{1}{V(t)} = \frac{1}{V_0} + \frac{2\varepsilon}{a} t$$

10 Mines 2024



Pas de problème particulier dans cet exercice mis à part les nombreuses erreurs de calcul.

1. ☐ Paramétrage du système :

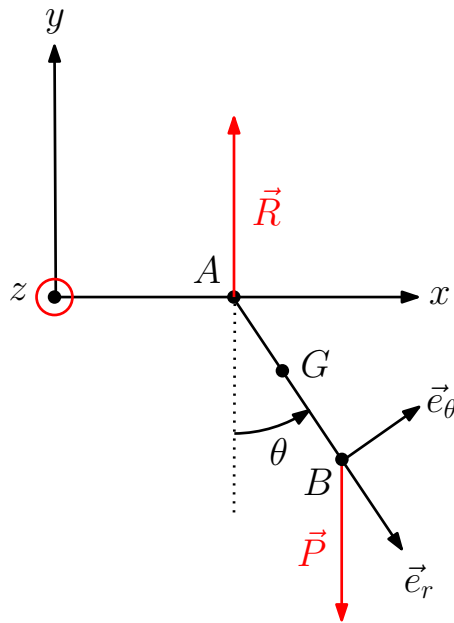


Figure 17 – Paramétrage du système

□ On applique le TRC au système constitué de A et B :

$$(m_A + m_B)\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} = (-mg + R)\vec{e}_y$$

On a donc :

$$\ddot{x}_G = 0 \Rightarrow \dot{x}_G = cste = 0$$

Le système est donc pseudo-isolé suivant (Ox)

□ Position de G :

$$(m_A + m_B)\vec{OG} = m_A\vec{OA} + m_B\vec{OB}$$

Avec :

$$\vec{OA} = \begin{cases} x \\ 0 \end{cases}$$

et

$$\vec{OB} = \begin{cases} x + L \sin \theta \\ -L \cos \theta \end{cases}$$

D'où :

$$\vec{OG} = \begin{cases} x_G = x + \frac{m_B}{m_A + m_B} L \sin \theta \\ y_G = -\frac{m_B}{m_A + m_B} L \cos \theta \end{cases}$$

On en déduit la vitesse de G :

$$\vec{V}_G = \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + \frac{m_B}{m_A + m_B} L \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_G = \frac{m_B}{m_A + m_B} L \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

□ La vitesse de G suivant (Ox) étant constamment nulle, on a :

$$\dot{x} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} L \cos \theta \dot{\theta}$$

$$x = \frac{m_B}{m_A + m_B} L (\sin \theta_0 - \sin \theta)$$

Et,

$$V_G^2 = \dot{y}_G^2 = \frac{m_B^2}{(m_A + m_B)^2} L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2$$

2. $\square$ Par définition :

$$E_c = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2$$

Avec :

$$\vec{V}_A = \begin{cases} \dot{x} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} L \cos \theta \dot{\theta} \\ 0 \end{cases}$$

et

$$\vec{V}_B = \begin{cases} \dot{x} + L \cos \theta \dot{\theta} = \frac{m_A}{m_A + m_B} L \cos^2 \theta \dot{\theta} \\ L \sin \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

Et donc :

$$V_A^2 = \frac{m_B^2}{(m_A + m_B)^2} L^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2$$

$$V_B^2 = \left(1 - \frac{m_B(m_B + 2m_A)}{(m_A + m_B)^2} \cos \theta \right) L^2 \dot{\theta}^2$$

On obtient donc, après calculs :

$$E_c = \frac{1}{2} \mu L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_B}{m_A} \mu L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2$$

Avec :

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

$\square$ On retrouve ce résultat en utilisant :

$$E_c = \frac{1}{2} (m_A + m_B) V_G^2 + E_c^*$$

Où E_c^* est l'énergie de rotation du système dans le référentiel barycentrique :

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_A (AG)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_B (BG)^2 \dot{\theta}^2$$

Avec :

$$AG = \frac{m_B}{m_A + m_B} L$$

$$BG = \frac{m_A}{m_A + m_B} L$$

Après simplification, on retrouve le résultat précédent.

3. $\square$ L'énergie potentielle du système est égale à l'énergie potentielle de pesanteur de G :

$$E_p = (m_A + m_B) g y_G = -m_B g L \cos \theta$$



L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide est mgz_G

4. ☐ On écrit la conservation de l'énergie mécanique du système :

$$E_m = -m_B g L \cos \theta_0 = \frac{1}{2} \mu L^2 \dot{\theta}^2 \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \sin^2 \theta \right) - m_B g L \cos \theta$$

D'où :

$$0 = L^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \sin^2 \theta \right) + L^2 \dot{\theta}^3 \frac{m_B}{m_A} \sin \theta \cos \theta + m_B g L \sin \theta \dot{\theta}$$

Soit :

$$\ddot{\theta} \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \sin^2 \theta \right) + \dot{\theta} \frac{m_B}{m_A} \sin \theta \cos \theta + \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \right) \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

- ☐ On peut simplifier cette équation dans le cadre de l'approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

On trouve alors l'équation d'un pendule simple dans le cadre des petits angles.

11 Condition pour passer une marche



La modélisation se fait en deux temps : une très simple qui pose rapidement un problème (conservation de l'énergie mécanique) et une plus élaborée utilisant la conservation du moment cinétique

Premier modèle : collision élastique

- ☐ On commence par paramétrer le système :

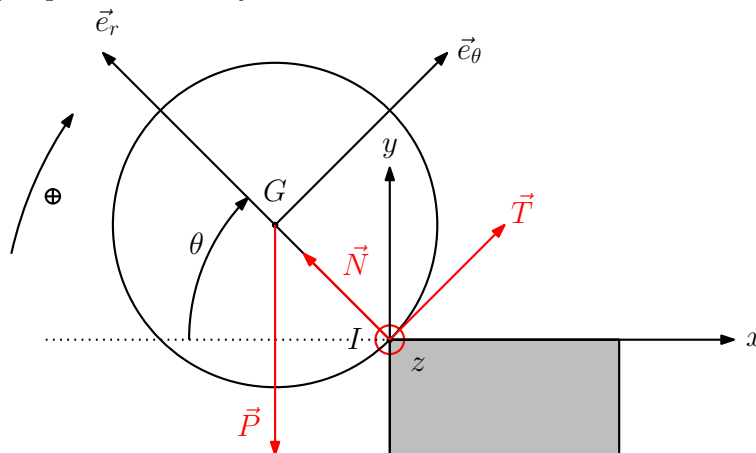


Figure 18 – Paramétrage du système

- ☐ Approche énergétique : On considère que le contact avec la marche se fait sans perte d'énergie cinétique (collision élastique). Cette conservation permet d'écrire la conservation de l'énergie mécanique de la roue au passage de la marche. On se place alors dans le cas limite où la roue franchit la marche (G à la verticale de la marche) avec une vitesse nulle :

$$E_m = \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} J \Omega^2 + m g a = m g (a + h)$$

Avec : $J = \frac{1}{2} m a^2$ et $\Omega = \frac{V_0}{a}$

D'où :

$$V_0 = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

Deuxième modèle : collision inélastique

- Le modèle de la collision élastique ne convient pas. En effet, le roulement sans glissement de la roue sur la piste horizontale fait que le contact avec la marche se fait obligatoirement avec glissement au départ. Ainsi la composante tangentielle de la force de contact travaille au cours du choc et donc l'énergie mécanique de la roue ne se conserve pas.
- La grandeur qui se conserve au cours du choc est le moment cinétique de la roue projeté sur (Δ_I) . En effet, le moment de la force de contact entre la roue et la marche est alors nul. La durée du choc étant très brève, le moment du poids est négligeable :

$$L_{\Delta_I}(0^+) - L_{\Delta_I}(0^-) = \int_{0^-}^{0^+} \underbrace{M_{\Delta}(\vec{T})}_0 dt + \int_{0^-}^{0^+} \underbrace{M_{\Delta}(\vec{N})}_0 dt + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} M_{\Delta}(\vec{P}) dt}_0 = 0$$

Avec :

$$L_{\Delta_I}(0^+) = J_{\Delta_I} \dot{\theta}(0^+)$$



attention $\dot{\theta}$ n'est pas constante au cours de la rotation autour de I et donc : $\dot{\theta}(t \neq 0) \neq \dot{\theta}(0^+)$

où :

$$J_{\Delta_I} = ma^2 + \frac{1}{2}ma^2 = \frac{3}{2}ma^2$$

et, d'après le théorème de Koenig :

$$L_{\Delta_I}(0^-) = J_{\Delta_C} \Omega + (\vec{IC} \wedge \vec{V}_0) \cdot \vec{u}_{\Delta_I}$$

Soit :

$$L_{\Delta_I}(0^-) = \frac{1}{2}ma^2 \times \frac{V_0}{a} + m(a-h)V_0$$

$$L_{\Delta_I}(0^-) = \left(\frac{3}{2}a - h\right) mV_0$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{2}ma^2 \dot{\theta}(0^+) = \left(\frac{3}{2}a - h\right) mV_0$$

Soit :

$$\dot{\theta}(0^+) = \left(1 - \frac{2h}{3a}\right) \frac{V_0}{a}$$

- Les équations du mouvement de la roue, lorsqu'elle monte la marche, sont :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 &= N - mg \sin \theta \\ ma\ddot{\theta} &= -mg \cos \theta \end{cases}$$

- On en déduit :

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \cos \theta$$

où, $\omega_0^2 = \frac{g}{a}$

- En multipliant l'équation précédente par $\dot{\theta}$ et en intégrant, on obtient :

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^2(0^+) = -2\omega_0^2 (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

Avec :

$$\sin \theta_0 = 1 - \frac{h}{a}$$

□ La roue passe la marche si $\dot{\theta}$ reste positive jusqu'à $\theta = \pi/2$. Dans le cas limite, on a :

$$-\dot{\theta}^2(0^+) = -2\omega_0^2 \left(1 - 1 + \frac{h}{a}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2h}{3a}\right)^2 \frac{V_0^2}{a^2} = \frac{2gh}{a^2}$$

$$V_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{1 - \frac{2h}{3a}}$$