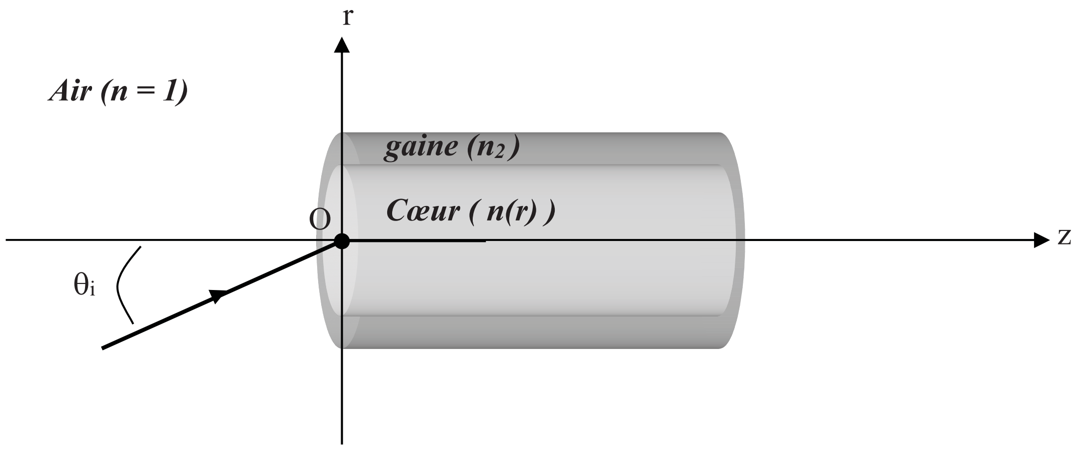
Fibre à gradient d'indice.
Pour remédier à l'élargissement temporel des impulsions dans les fibres à saut d'indice, on a fabriqué des fibres à gradient d'indice dans lesquelles l'indice n du cœur varie en fonction de la distance à l'axe de la fibre (r) . Le cœur est ainsi constitué d'un grand nombre de couches d'indice décroissant quand r augmente.

On suppose que l'indice n(r) du cœur obéit à la loi : $n(r)^2 = n_1^2\left(1 - 2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$

Où n_1 *est l'indice pour r = 0 (axe de la fibre), a est le rayon du cœur de la fibre,* $\Delta = (n_1^2 - n_2^2)/(2n_1^2)$ *et* n_2 *est l'indice de la gaine. Dans la pratique* n_1 *et* n_2 *ont des valeurs très voisines et Δ est très petit devant 1 (* $\Delta \approx 10^{-2}$ *).*
On note (Oz) l'axe de la fibre.



1- *Un rayon lumineux arrivant sur le centre O de la base avec un angle d'incidence* θ_i *, se propage alors dans la fibre dans un plan axial et reste dans le cœur.*
   a. *Montrer que* $\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \left(\frac{n}{A}\right)^2 - 1$ *où* $A = n_1.\cos(\theta_0)$ *et* $\sin(\theta_0) = \sin(\theta_i)/n_1$.
   On pourra utiliser le fait que, dans le cœur, n(r).sin(i(r)) = cste (où i(r) est l'angle que fait le rayon lumineux avec la verticale).

- En un point quelconque du cœur on a le schéma suivant :

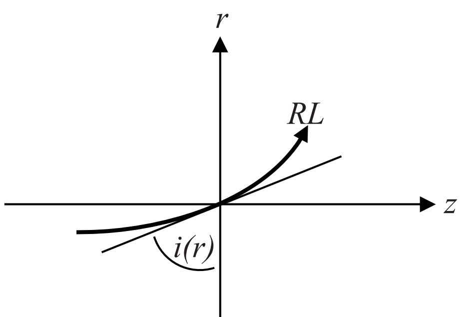
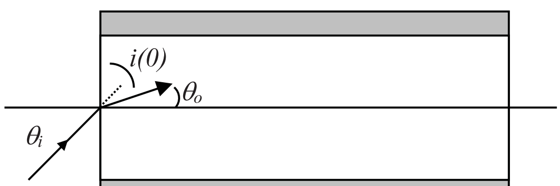


Figure1

Avec n(r).sin(i(r)) = cste.
Pour déterminer la valeur de la constante, on détermine le produit pour r = 0 et z = 0 (entrée de la fibre). On a alors :
Cste = n_1. sin(i(0)).



D'après la relation $\sin(\theta_0) = \sin(\theta_i)/n_1$, on sait que θ_o est l'angle que fait le RL avec l'axe quand il rentre dans la fibre
$\Rightarrow \theta_o = \pi/2 - i(0)$

$\Rightarrow$ Cste = $n_1 \cos(\theta_o)$ = A
Conclusion : dans le cœur, on a : $\boxed{n(r).\sin(i(r)) = A}$

D'après la figure 1. on a : $\tan i(r) = \dfrac{dz}{dr}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\cos(i(r))}{\sin(i(r))} = \frac{\sqrt{1-\sin^2(i(r))}}{\sin(i(r))} = \frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{n(r)}{A}\right)^2}}{\left(\dfrac{n(r)}{A}\right)} = \sqrt{\left(\frac{n(r)}{A}\right)^2 - 1}$$

D'où : $\boxed{\left(\dfrac{dz}{dr}\right)^2 = \left(\dfrac{n(r)}{A}\right)^2 - 1}$

b. *Intégrer l'équation différentielle précédente et montrer que l'équation de la trajectoire d'un rayon est :* $r = \dfrac{\sin(\theta_0).a}{\sqrt{2\Delta}}.\sin\left(\dfrac{\sqrt{2\Delta}}{\cos(\theta_0).a}.z\right)$ *Quelle est la nature de la trajectoire ?*

Afin d'intégrer, remplaçons n(r) par son expression dans l'équation différentielle :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n(r)^2}{A^2} - 1 = \frac{n_1^2}{A^2}\left(1 - 2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) - 1 = \underbrace{\left(\frac{n_1^2}{A^2} - 1\right)}_{\tan^2\theta_o} - \underbrace{\frac{n_1^2}{A^2}}_{\frac{1}{\cos^2\theta_o}} 2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \tan^2\theta_o\left(1 - \frac{2\Delta}{\sin^2\theta_o}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) = \tan^2\theta_o\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2\Delta}r}{\sin\theta_o a}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dz}\right) = \tan\theta_o\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2\Delta}r}{\sin\theta_o a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2\Delta}r}{\sin\theta_o a}\right)^2}} = \tan\theta_o.dz$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\sin\theta_o a}{\sqrt{2\Delta}} = \tan\theta_o.dz \quad \text{où } u = \frac{\sqrt{2\Delta}r}{\sin\theta_o a}$$

On intègre pour z variant de 0 à z quelconque et u variant de 0 à u quelconque :

$$\Rightarrow arcin(u)\frac{\sin\theta_o a}{\sqrt{2\Delta}} = \tan\theta_o.z$$

$$\Rightarrow arcin(u) = \frac{\sqrt{2\Delta}}{\cos\theta_o a}.z$$

$$\Rightarrow u = \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{\cos\theta_o a}.z\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{\sin\theta_0.a}{\sqrt{2\Delta}}.\sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{\cos\theta_0.a}.z\right)}$$

c. *Montrer que le rayon coupe l'axe (Oz) en des points régulièrement espacés d'une longueur d que l'on exprimera en fonction de a, Δ et θ_0.*

Le rayon lumineux coupe l'axe pour r = 0 ⇒ $\frac{\sqrt{2\Delta}}{\cos\theta_0.a}.z = n\pi \Rightarrow .z = n\underbrace{\left(\frac{\pi\cos\theta_0.a}{\sqrt{2\Delta}}\right)}_{d}$

Conclusion : Le rayon lumineux coupe l'axe pour $z = z_n = n.d$ où $\boxed{d = \frac{\pi\cos\theta_0.a}{\sqrt{2\Delta}}}$

d. *Application numérique.*
On donne : a = 25 µm ; n_1 = 1,5 ; Δ = 10^{-2} ; θ_i = 8°
Donner la valeur de d.

<u>AN : d = 0,55 mm</u>

2- *Dans la question précédente, on a supposé que le rayon lumineux restait confiné dans le cœur de la fibre.*

a. *A quelle condition sur θ_i ceci est-il vérifié ? On note θ_a la valeur limite de θ_i . Donner la valeur numérique de θ_a et vérifier que cette condition est réalisée dans l'application numérique de la question 1-d.*

La trajectoire du rayon lumineux est de la forme : $r = r_{\max}.\sin\left(\frac{\pi.z}{d}\right)$ où : $r_{\max} = \frac{\sin\theta_0.a}{\sqrt{2\Delta}}$

⇒ Pour que le rayon lumineux reste dans le cœur il faut donc que : $r_{max} < a$

⇒ $\frac{\sin\theta_0.a}{\sqrt{2\Delta}} < a \Rightarrow \sin\theta_0 < \sqrt{2\Delta}$

Soit : $\sin\theta_i < n_1\sqrt{2\Delta}$

En notant θ_a la valeur limite de θ_i, on a donc : $\boxed{\sin\theta_a = n_1\sqrt{2\Delta}}$

<u>AN : θ_a = 12°</u> (on a bien $\theta_I < \theta_a$)

b. *On appelle ouverture numérique O.N. la quantité sin(θ_a). Donner la valeur numérique de O.N.*

$\boxed{ON = \sin\theta_a = n_1\sqrt{2\Delta}}$

<u>AN : ON = 0,21</u>

3- *Une impulsion lumineuse arrive à t = 0, au point O (r = 0) sous la forme d'un faisceau conique convergent, de demi angle au sommet $\theta_i < \theta_a$. La fibre a une longueur L = 10 m.*

a. *Calculer littéralement puis numériquement le temps t_1 mis par un rayon lumineux d'incidence nulle pour traverser la fibre.*
Pour l'application numérique on prendra les valeurs de la question 1-d.

Si θ_i = 0 alors le rayon lumineux va est une droite confondue avec l'axe de la fibre
⇒ Le milieu dans lequel se propage la lumière a un indice constant égal à n_1
⇒ La longueur du trajet géométrique est d_1 = L et la vitesse de la lumière est V = c/n_1
⇒ La durée de propagation dans la fibre est $t_1 = \frac{d_1}{V} = \frac{d_1}{c/n_1} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{n_1L}{c}}$

<u>AN : t_1= 50 ns</u>

b. *Calculer littéralement puis numériquement le temps t_2 mis par un rayon lumineux d'incidence θ_i pour traverser la fibre.*
Pour l'application numérique on prendra les valeurs de la question 1-d.

Ici, l'indice n'est pas constant, exprimons la vitesse de la lumière pour une position quelconque de la lumière dans le cœur :

$V(r) = \dfrac{c}{n(r)} = \dfrac{ds}{dt}$ où s est l'abscisse curviligne du RL

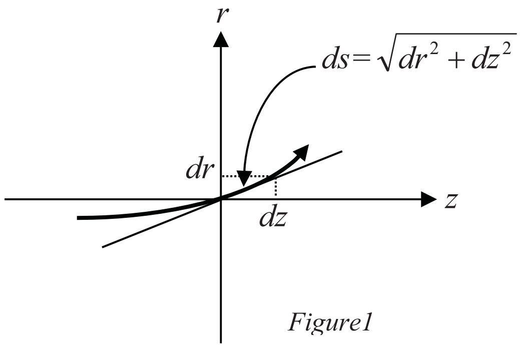


Figure1

$$\Rightarrow\ ds = \sqrt{dr^2 + dz^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + 1} = dz\sqrt{\left(\left(\frac{n(r)}{A}\right)^2 - 1\right) + 1} = \frac{n(r)}{A}dz$$

D'où : $V(r) = \dfrac{c}{n(r)} = \dfrac{n(r)}{A}\dfrac{dz}{dt}$

$$\Rightarrow\ dt = \frac{n^2(r)}{Ac}dz$$

Pour intégrer, remplaçons n(r) et r par leurs expressions :

$$dt = \frac{n_1^2}{Ac}\left(1 - 2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)dz = \frac{n_1^2}{A}\left(1 - 2\Delta\left(\frac{r_{\max}}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi.z}{d}\right)\right)dz$$

$$\Rightarrow\ dt = \frac{n_1^2}{Ac}\left(1 - \Delta\left(\frac{r_{\max}}{a}\right)^2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi.z}{d}\right)\right)\right)dz$$

$$\Rightarrow\ dt = \frac{n_1^2}{Ac}\left(1 - \Delta\left(\frac{r_{\max}}{a}\right)^2 + \Delta\left(\frac{r_{\max}}{a}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi.z}{d}\right)\right)dz$$

Intégrons pour z variant de 0 à L et t variant de 0 à t_2 :

$$t_2 = \frac{n_1^2}{Ac}\left(1 - \Delta\left(\frac{r_{\max}}{a}\right)^2\right)L + \frac{n_1^2\Delta r_{\max}^2}{cAa^2}\left(\frac{d}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{2\pi.L}{d}\right)$$

En remplaçant les différentes grandeurs par leurs expressions ($r_{\max} = \dfrac{\sin\theta_0.a}{\sqrt{2\Delta}}$, $d = \dfrac{\pi\cos\theta_0.a}{\sqrt{2\Delta}}$,$\sin(\theta_0) = \sin(\theta_i)/n_1$ et $A = n_1\cos(\theta_o)$) , on trouve :

$$\boxed{t_2 = \frac{n_1 L}{c}\frac{\left(1 - \dfrac{\sin^2(\theta_i)}{2n_1^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}} + \left(\frac{a}{4.\sqrt{2\Delta}.c.n_1}\right)\sin^2(\theta_i).\sin\left(\frac{2.L.\sqrt{2\Delta}}{a\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}}\right)}$$

AN : t_2 = 50,000469 ns

c. *En déduire l'élargissement temporel de l'impulsion Δt à la sortie de la fibre.*

Pour une fibre a saut d'indice (cœur de rayon a et d'indice n_1) utilisée dans les mêmes conditions (mêmes valeurs pour θ_i, et L) on trouve $\Delta t = 2{,}17.10^{-10}$ s. Conclusion ?

AN : $\Delta t = t_2 - t_1 = 4{,}69.10^{-13}$ s

Si l'on veut comparer ce résultat à ce que l'on aurait obtenu avec une fibre à saut d'indice, il faut utiliser les résultats de l'exercice sur la fibre à saut d'indice.
On avait obtenu :

$t_1 = \frac{n_1 L}{c}$ (Inchangé) et $t_2 = \frac{n_1 L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}}$

D'où : $\boxed{\Delta t = \frac{n_1 L}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}}-1\right)}$

AN : $t_1 = 50$ ns ; $t_2 = 50{,}217$ ns ; $\Delta t = 2{,}17.10^{-10}$ s

⇒ On voit que tout de suite que la fibre à gradient d'indice est nettement plus performante !
En termes de fréquence d'utilisation, la fréquence limite d'utilisation de la fibre à gradient d'indice est : $f_{\max} = \frac{1}{\Delta t} \approx 2$THz alors que la fréquence limite d'utilisation de la fibre à saut d'indice est $f_{\max} = \frac{1}{\Delta t} \approx 5$ GHz
(Pour une longueur de 10m)