

## Introduction aux phénomènes de propagation

### EXERCICE 1

#### Modes propres d'un système de trois mobiles couplés

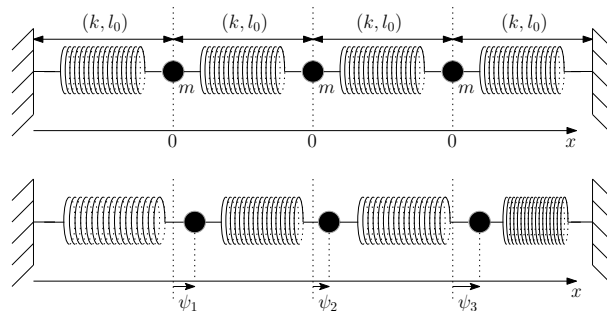


FIGURE 1 –

1. Écrire le système d'équations du mouvement d'un système de trois mobiles couplés identiques, tel que dessiné sur la figure (les ressorts sont identiques).
2. Rechercher les pulsations propres de ce système.
3. Interpréter les trois modes propres obtenus en termes de mouvements des trois mobiles couplés.

### EXERCICE 2

#### Ondes de compression dans un réseau cristallin

On étudie la propagation d'une onde de compression dans un réseau cubique de paramètre de maille  $a$ . Les atomes de la chaîne ont une masse  $m$ .

1. On considère une chaîne linéaire d'atomes dans ce réseau, exprimer la célérité  $c$  des ondes de compression le long de cette chaîne en fonction de  $a$ ,  $m$  et de la raideur équivalente  $k$  modélisant la liaison entre les atomes de la chaîne.
2. Exprimer  $c$  en fonction du module de Young  $E$  du solide et de sa masse volumique  $\rho$ .
3. En réalité, la liaison entre les atomes, n'est pas rigoureusement élastique : elle est correctement modélisée par l'énergie potentielle représentée figure (2).
  - (a) Dans quel domaine de la courbe la liaison est-elle élastique ?
  - (b) En vous plaçant dans ce domaine, exprimer la raideur  $k$  de la liaison.
  - (c) En déduire une relation entre le module de Young  $E$ ,  $a$  et  $\left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_0}$ .

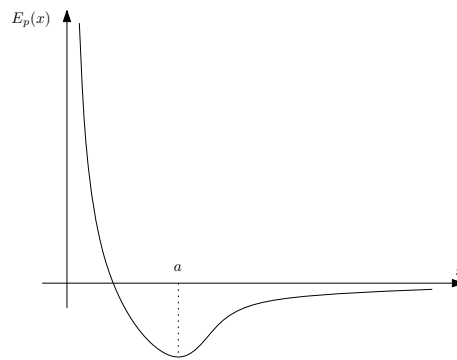


FIGURE 2 –

4. Application au fer  $\alpha$  :  $E = 196 \text{ GPa}$ ,  $a = 289 \text{ pm (c.c.)}$ ,  $M = 56 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ , déterminer  $k$ ,  $\left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_0}$  et  $c$ .

### EXERCICE 3

#### Modes propres d'une craie

On souhaite déterminer les fréquences propres de vibration d'une craie (longueur  $L = 80 \text{ mm}$ , diamètre  $D = 9 \text{ mm}$ , masse  $m = 9 \text{ g}$ ). Pour cela, on utilise le modèle des poutres dans lequel, l'équation de propagation d'une onde élastique le long de la poutre est :

$$\frac{EI}{\mu A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Où :

- ✘  $E = 0.15 \text{ GPa}$  est le module de Young de la craie,
- ✘  $I = \frac{\pi R^4}{4}$  est le moment quadratique de la section,
- ✘  $A$  est la surface de la section,
- ✘  $\mu$  est la masse volumique de la craie.

On pose :  $\frac{EI}{\mu A} = C$ .

1. Montrer que les solutions à variables séparées sont de la forme :

$$y(x, t) = [X_1 \cos(kx) + X_2 \sin(kx) + X_3 \cosh(kx) + X_4 \sinh(kx)] \cos(\omega t + \phi)$$

avec  $\omega = \sqrt{C}k^2$ .

2. Dans l'expérience, on fixe la craie à ses deux extrémités et on excite les modes propres grâce à des impulsions laser. En considérant alors qu'aux extrémités, le déplacement et le déplacement angulaire sont nuls, établir le système d'équations vérifiées par  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  et  $X_4$ .

3. Le déterminant de ce système s'annule pour :

$$k \times L = 4.73; k \times L = 7.85; k \times L = 10.99$$

En déduire les fréquences propres.

4. Les fréquences propres obtenues expérimentalement sont données par la figure (3). Commenter.

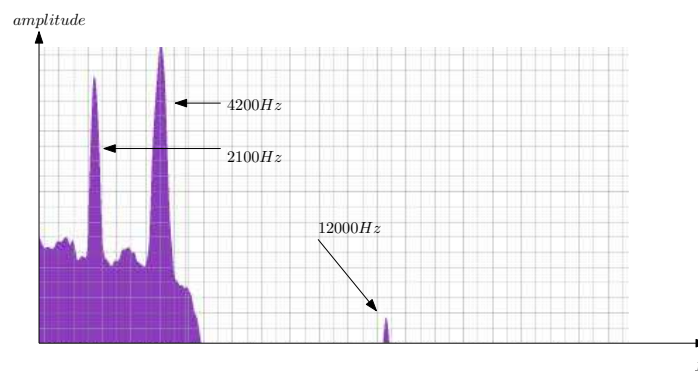


FIGURE 3 –

## EXERCICE 4

### Câble coaxial

Un câble coaxial peut être décrit comme une ligne à constantes réparties, caractérisée par une inductance linéique  $\Gamma$  et une capacité linéique  $\Lambda$ . On peut en modéliser une tranche infinitésimale d'épaisseur  $dx$  par le circuit comportant une inductance élémentaire  $dL = \Gamma dx$  et une capacité élémentaire  $dC = \Lambda dx$ . On traite ce circuit de faible dimension  $dx$  – mais pas la ligne complète, dans l'ARQS.

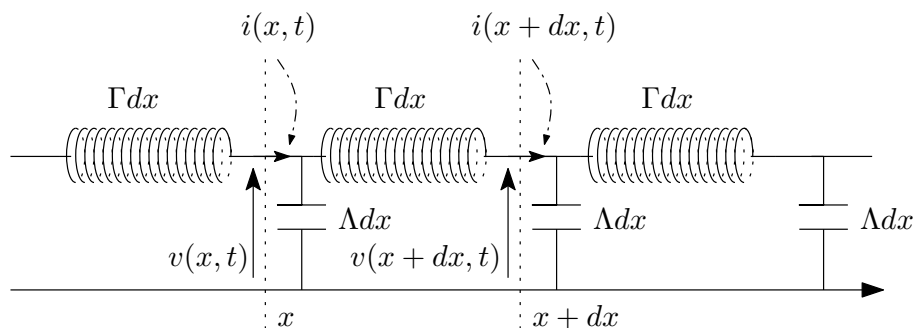


FIGURE 4 –

1. Établir deux équations aux dérivées partielles couplées reliant l'intensité  $i(x, t)$  à la tension  $v(x, t)$ . En déduire que ces grandeurs sont solution d'une équation de d'Alembert unidimensionnelle, et exprimer la célérité correspondante.

2. Dans le cas d'une onde harmonique incidente  $v_i(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$  émise en  $x = -\infty$ , déterminer la tension et le courant en tout point de la ligne sachant qu'en bout de ligne on place une impédance de charge quelconque.

### EXERCICE 5

#### Onde élastique dans une réseau (sans l'approximation des milieux continus)

Un réseau monoatomique est modélisé par des particules de masse  $m$ , situées à l'équilibre aux points d'abscisses :  $x = n.a$  ( $n$  entier relatif). On considère que toutes ces particules sont reliées par des ressorts de constante de raideur  $k$ . On repère le déplacement de la particule  $n$ , par rapport à sa position de repos par :  $U_n$ .

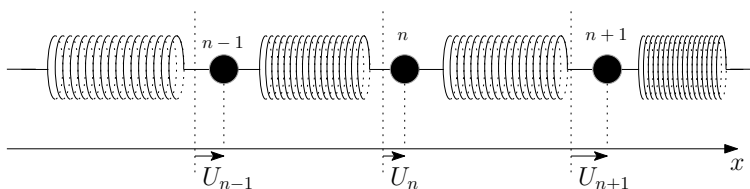


FIGURE 5 –

- Déterminer l'équation du mouvement de la particule  $n$ .
- On recherche des solutions de cette équation sous la forme d'une onde progressive :  $U_n = A \exp j(\omega t - kna)$ . Trouver la relation, dite de dispersion, reliant  $\omega$  et  $k$ .
- Étude de la relation de dispersion :  $\omega(k)$ .
  - Quelle est la valeur de la période  $G$  de la relation de dispersion ?
  - Vérifier que :  $U_n(k) = U_n(k+G)$ . A quoi correspond le changement  $k$  en  $k+G$  ?
  - A quoi correspond le changement  $k$  en  $-k$  ?
  - Sur quel domaine peut-on limiter l'étude ? Cette zone est appelée zone de Brillouin.
  - Tracer le diagramme de dispersion en se limitant à la zone ci-dessus et en notant la valeur de la pulsation maximale :  $\omega_c$ .
- On s'intéresse maintenant à des solutions amorties de l'équation du mouvement du type :

$$U_n = (-1)^n A \exp(-kna) \exp(j\omega t)$$

- Déterminer la nouvelle relation de dispersion qui correspond à ces solutions.
- Déterminer le rapport  $U_{n+1}/U_n$ .
- Tracer le diagramme de dispersion correspondant.

5. Les deux diagrammes de dispersion tracés, correspondent à des solutions d'onde différentes. Néanmoins, lorsque l'on augmente la pulsation excitatrice en partant de zéro, on passe d'un diagramme à l'autre. A quel type d'onde correspond le point de raccordement de ces deux diagrammes ?

## EXERCICE 6

### Chaîne linéaire infinie contenant une impureté.

On considère une chaîne infinie d'atomes identiques de masse  $m$ , qui au repos se trouvent sur l'axe  $(xx')$  aux abscisses  $x_n^0 = na$  avec  $n$  entier relatif et  $a > 0$ . On modélise les liaisons entre atomes par des rappels élastiques de raideur  $K$ . Lorsque l'on perturbe l'état d'équilibre, l'atome  $n$  subit un déplacement  $u_n \ll a$  selon  $(xx')$ . On remplace l'atome  $n = 0$  de la chaîne par un atome de masse  $m'$ .

1. Écrire les équations du mouvement de l'atome  $n$ .
2. Que devient cette équation dans l'approximation des milieux continus ? Pour la suite on se placera dans cette approximation.
3. Une onde harmonique de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{e}_x$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants arrive de  $-\infty$ . Montrer qu'il existe une onde réfléchie et une onde transmise par l'impureté. Déterminer l'amplitude et le déphasage de chacune de ces ondes par rapport à l'amplitude et à la phase de l'onde incidente. Faire un bilan de puissance. Étudier les cas particuliers  $m' = m$ ;  $m' \ll m$  et  $m' \gg m$ .
4. La chaîne, de longueur  $L$ , est maintenant fixée à ses extrémités (en  $x = 0$  et  $x = L$ ), l'impureté est elle en  $x = L/2$  au repos. Déterminer les modes propres de vibration de la chaîne.

## EXERCICE 7

### Onde longitudinale le long d'un ressort.

On considère un ressort à spires non jointives, de raideur  $K$ , de masse  $\mu$  par unité de longueur. Ce ressort est supporté horizontalement par un guide sans frottement et attaché à un bâti en  $O$ . On repère la position au repos – c'est-à-dire en l'absence de traction ou de compression – d'une spire par son abscisse  $x$ . Si on exerce une traction  $\vec{F}_L$  à l'extrémité en  $L$ , les spires se déplacent et, à l'équilibre on appelle  $u(x)$  le déplacement longitudinal – par rapport à sa position au repos – de la spire dont l'abscisse au repos est  $x$ . On appelle  $\vec{F}_L$  la force qu'exerce, dans ces conditions, au niveau de la spire d'abscisse  $x$  au repos, la partie droite du ressort sur la partie gauche. S'il y a un mouvement longitudinal des spires du ressort le déplacement  $u$  ainsi que la valeur algébrique  $F_x$  de la force  $\vec{F}_x$  précédemment définie sont alors des fonctions de  $x$  et de  $t$ . On admettra,

dans l'hypothèse où les déplacements sont de faible amplitude que :

$$F_x = KL \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{(x,t)}$$

1. Vérifier l'homogénéité de cette relation et la commenter.
2. On étudie les mouvements longitudinaux du ressort. Montrer, en envisageant un élément de ressort en mouvement compris entre les spires d'abscisses au repos  $x$  et  $x + dx$ , que le déplacement longitudinal  $u(x, t)$  doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Donner l'expression de  $c^2$ . Quelle est la solution générale d'une telle équation ?  
Donner l'interprétation physique de cette solution.

3. On impose à l'extrémité  $x = L$  du ressort un mouvement longitudinal harmonique  $u_0(t) = U_0 \cos(\omega t)$ . Déterminer  $u(x, t)$  en régime établi.

## EXERCICE 8

### Chaîne illimitée de pendules identiques.

Une chaîne illimitée est constituée d'une infinité de pendules identiques couplés. Chaque pendule est constitué d'une tige de longueur  $L$  sans masse au bout de laquelle est fixée une masse ponctuelle  $m$ . Les fils de torsion exercent entre deux pendules successifs un couple de rappel de constante  $C$  proportionnel à l'écart de leurs positions angulaires. Le pendule numéro  $n$ , est mobile dans le plan  $(xO_ny)$  autour de son extrémité fixe  $O_n$  d'abscisse  $z_n = nd$ ; son mouvement est repéré par l'angle  $\theta_n$  qu'il fait avec la verticale descendante  $(O_nx)$ .

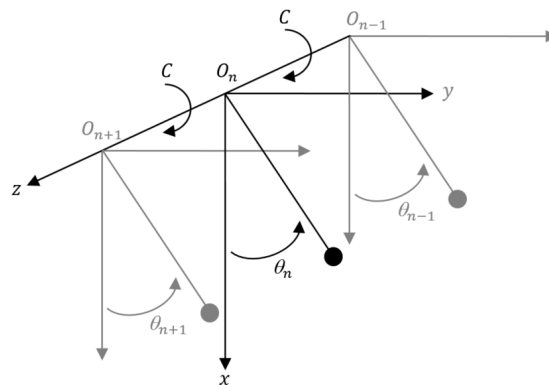


FIGURE 6 –

1. Établir l'équation différentielle du mouvement du pendule .
2. Les angles sont supposés petits et on cherche les solutions de la forme :  $\theta = Ae^{j(\omega t - knd)}$  . Établir la relation de dispersion donnant le nombre d'onde  $k$  en fonction de la pulsation  $\omega$  .
3. Montrer qu'il existe deux pulsations de coupures  $\omega_1$  et  $\omega_2$  telles que les solutions de la relation de dispersion n'existe que pour  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ .
4. Comment se simplifie la relation de dispersion pour des grandes longueurs d'onde ? Comment obtenir directement cette nouvelle relation de dispersion ?

## EXERCICE 9

### Aspect énergétique des cordes vibrantes.

Un corde sans raideur, de longueur  $L$ , de masse linéique  $\mu$ , de poids négligeable et dont la tension  $T$  a même valeur en tout point à tout instant, effectue des mouvements transversaux de faible amplitude dans le plan  $(Oxy)$ . On notera  $y(x, t)$  le déplacement à l'instant  $t$  du point d'abscisse  $x$ . On néglige toute cause d'amortissement.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $y(x, t)$ .
2. Déterminer l'énergie mécanique de l'élément de longueur  $dx$  au repos. En déduire la densité d'énergie mécanique  $e(x, t)$  de la corde.
3. Montrer qu'il existe une fonction  $P(x, t)$  telle que :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Que représente cette fonction ? En déduire la signification physique de la relation précédente.

4. Dans le cas d'une onde de la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Déterminer l'énergie  $E_n$  du mode propre  $n$  puis l'énergie totale  $E$  de la corde.

## EXERCICE 10

### Corde présentant une double discontinuité.

On considère une corde, inextensible et sans raideur, constituée de trois morceaux de masses linéiques respectives  $\mu_1$  ;  $\mu_2$  et  $\mu_3$ . Elle est tendue horizontalement par une force  $\vec{T}$ . Elle est suffisamment longue pour négliger les effets aux extrémités.

Une onde progressive harmonique :

$$y_i(x, t) = \text{Re} \left[ A e^{j(\omega t - k_1 x)} \right]$$

avec  $k_1 = \omega/c_1$  arrive du coté des  $x < 0$ .

On appelle  $r$  le coefficient de réflexion en amplitude et  $R$  en énergie au niveau de la discontinuité en  $x = 0$ .

On introduira dans les calculs les coefficients :

$$\alpha = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } \beta = \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

Où  $Z_k$  est l'impédance caractéristique du tronçon de corde considéré.

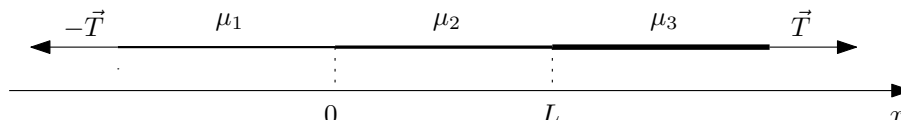


FIGURE 7 –

1. Exprimer, en régime établi, le coefficient  $r$  en fonction de  $\alpha, \beta$  et  $\psi = k_2 L = \frac{\omega L}{c_2}$ .  
En déduire l'expression de  $R$ .
2. Montrer que, sous certaines conditions, il n'y a pas d'onde réfléchie du coté des  $x < 0$ . Commenter.

## EXERCICE 11

### Corde présentant un défaut ponctuel.

Une corde tendue, inextensible et sans raideur, supposée infinie, se confond au repos avec l'axe  $(xx')$ ; lorsqu'elle bouge, elle est animée de petits mouvements transversaux parallèles à  $(Oy)$ .

- ✘ On notera  $\mu$  la masse linéique de la corde et  $\vec{T}$  sa tension.
- ✘ On supposera que la tension de la corde reste constante tant que les écarts à la position d'équilibre restent faibles et on ne se préoccupe pas du dispositif qui assure cette tension.
- ✘ On négligera les effets de la pesanteur et toute cause d'amortissement.

En  $x = 0$ , on fixe sur la corde une petite masse  $m$ .

Une onde incidente progressive harmonique,  $y_i(x, t) = \text{Re} [Y_m e^{j(\omega t - kx)}]$  où  $k = \omega/c$  est envoyée vers la masse  $m$ .

Il apparaît alors une onde réfléchie  $y_r(x, t) = \text{Re} [Y_{mr} e^{j(\omega t + kx)}]$  et une onde transmise  $y_t(x, t) = \text{Re} [Y_{mt} e^{j(\omega t - kx)}]$ .

1. Calculer les coefficients de réflexion  $r = Y_{mr}/Y_m$  et de transmission  $t = Y_{mt}/Y_m$ .  
On posera :  $\eta = 2T/m\omega c$ .



- Vérifier la conservation de l'énergie.

## EXERCICE 12

### Corde tendue par son poids.

Une corde sans raideur, de longueur  $L$ , de masse linéique  $\mu$  est fixée à une extrémité  $A$  et libre par ailleurs. Elle pend verticalement dans le champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$ . L'extrémité inférieure  $O$  est prise comme origine de l'axe  $(Ox)$  vertical ascendant. La corde étant au repos déterminer la tension  $T(x)$  en tout point.

- On lance sur cette corde un signal isolé sous la forme d'une petite déformation transversale brève que l'on notera  $y(x, t)$ . Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $y(x, t)$ .
- Le point  $A$ , lié à un vibreur, subit des déplacements transversaux de la forme  $y_A(t) = y(L, t) = Y_0 \cos(\omega t)$  avec  $y_0 \ll L$ . Déterminer l'onde stationnaire résultante.

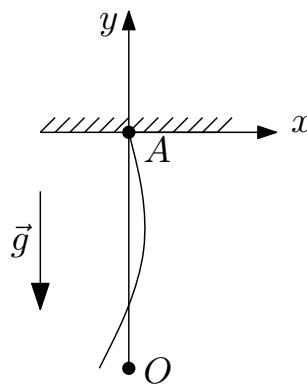


FIGURE 8 –

## EXERCICE 13

### EXERCICE OUVERT

- Par une approche théorique, comparer les spectres des sons émis par les différents types de cordes :
  - ✕ Corde de piano : La corde est frappée rapidement, et quasiment ponctuellement à l'aide d'un petit marteau.
  - ✕ Corde de Clavecin : La corde est pincée (en un point) et est lâchée sans vitesse initiale.
  - ✕ Corde de guitare : La corde est pincée également mais sa forme initiale n'est pas triangulaire mais plutôt parabolique, puis elle est lâchée sans vitesse initiale.

Notamment, préciser quel son sera le plus pur.

On utilisera les décompositions en série de Fourier du complément de maths.

2. Comparer vos résultats aux spectres ci-dessous.

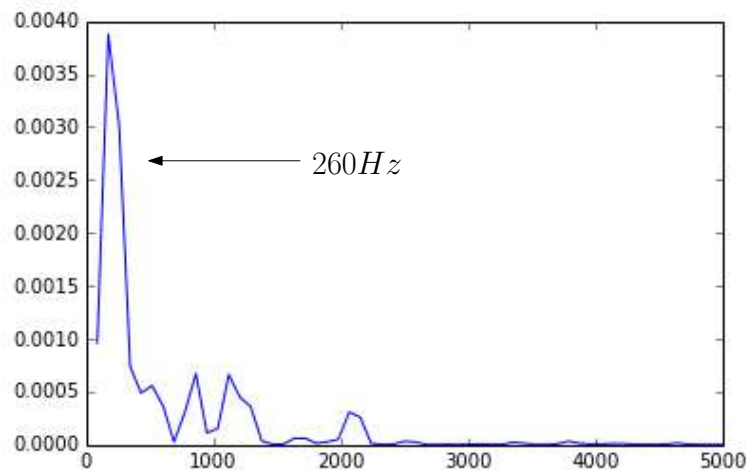


FIGURE 9 – Spectre d'une corde de guitare

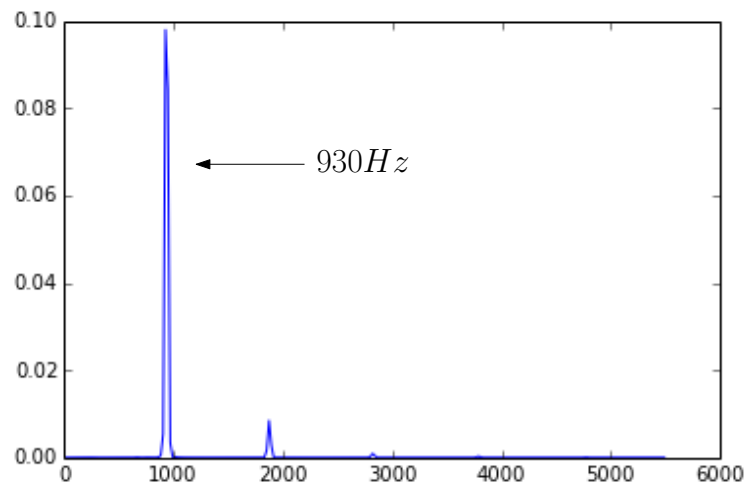


FIGURE 10 – Spectre d'une corde de piano

Pouvez-vous déterminer la note jouée ?

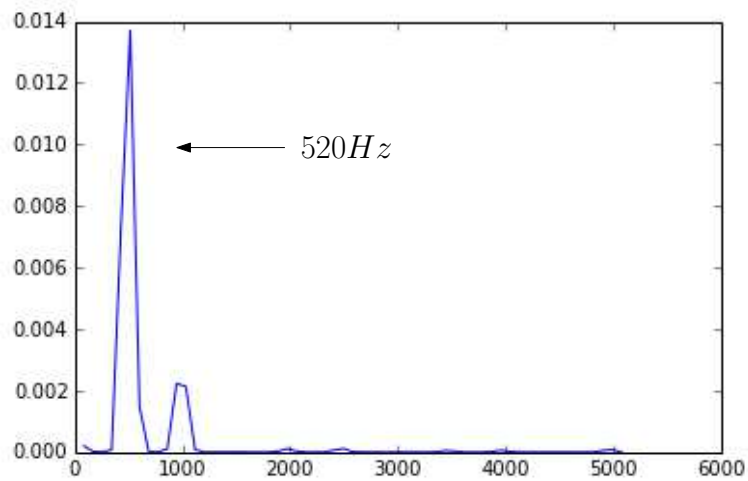


FIGURE 11 – Spectre d’une corde de clavecin

NOTES	octave	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Do	C	16.3 Hz	32.7 Hz	65 Hz	131 Hz	262 Hz	523 Hz	1 046.5 Hz	2 093 Hz	4 186 Hz	8 372 Hz	16 744 Hz
Do dièse ou Re bémol	C# / Db	17.3 Hz	34.6 Hz	69 Hz	139 Hz	277 Hz	554 Hz	1 109 Hz	2 217 Hz	4 435 Hz	8 870 Hz	17 740 Hz
Re	D	18.3 Hz	36.7 Hz	74 Hz	147 Hz	294 Hz	587 Hz	1 175 Hz	2 349 Hz	4 698 Hz	9 396 Hz	18 792 Hz
Re dièse ou Mi bémol	D# / Eb	19.4 Hz	38.9 Hz	78 Hz	156 Hz	311 Hz	622 Hz	1 244.5 Hz	2 489 Hz	4 978 Hz	9 956 Hz	19 912 Hz
Mi	E	20.5 Hz	41.2 Hz	83 Hz	165 Hz	330 Hz	659 Hz	1 318.5 Hz	2 637 Hz	5 274 Hz	10 548 Hz	21 098 Hz
Fa	F	21.8 Hz	43.6 Hz	87 Hz	175 Hz	349 Hz	698.5 Hz	1 397 Hz	2 794 Hz	5 588 Hz	11 176 Hz	
Fa dièse ou Sol bémol	F# / Gb	23.1 Hz	46.2 Hz	92.5 Hz	185 Hz	370 Hz	740 Hz	1 480 Hz	2 960 Hz	5 920 Hz	11 840 Hz	
Sol	G	24.5 Hz	49.0 Hz	98 Hz	196 Hz	392 Hz	784 Hz	1 568 Hz	3 136 Hz	6 272 Hz	12 544 Hz	
Sol dièse ou La bémol	G# / Bb	26.0 Hz	51.9 Hz	104 Hz	208 Hz	415 Hz	831 Hz	1 661 Hz	3 322 Hz	6 645 Hz	13 290 Hz	
La	A	27.5 Hz	55.0 Hz	110 Hz	220 Hz	440 Hz	880 Hz	1 760 Hz	3 520 Hz	7 040 Hz	14 080 Hz	
La dièse ou Si bémol	A# / Bb	29.1 Hz	58.0 Hz	117 Hz	233 Hz	466 Hz	932 Hz	1 865 Hz	3 729 Hz	7 458 Hz	14 918 Hz	
Si	B	30.8 Hz	62.0 Hz	123 Hz	247 Hz	494 Hz	988 Hz	1 975 Hz	3 951 Hz	7 902 Hz	15 804 Hz	

FIGURE 12 – Relation note/fréquence